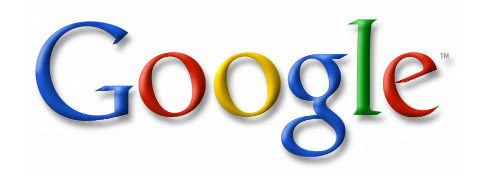





UNIVERSITEITSBIBLIOTHEEK GENT



VOYAGE

ASTRONOMIQUE

ET GEOGRAPHIQUE.

VOYAGE
ASTRONOMIQUE ET GEOGRAPHIQUE, DANS L'ÉTAT DE L'EGLISE,

ENTREPRIS PAR L'ORDRE ET SOUS LES AUSPICES

DU PAPE BENOIT XIV,

Pour mesurer deux dégrés du méridien, & corriger la Carte de l'Etat ecclésiastique,

Par les PP. MAIRE & BOSCOVICH de la Compagnie de Jesus,

TRADUIT DU LATIN,

AUGMENTÉ de Notes & d'extraits de nouvelles mesures de dégrés faites en Italie, en Allemagne, en Hongrie & en Amérique.

Avec une nouvelle Carte des Etats du Pape levée géométriquement.



A PARIS,

Chez N. M. TILLIARD, Libraire, Quai des Augustins, à S. Benoît.

M. DCC. LXX.

AVEC APPROBATION, ET PRIVILEGE DU ROI.



AVERTISSEMENT.

LE Livre dont on donne la traduction fut imprimé à *Rome* en 1755, & dédié au Pape *Benoît XIV*, sous les auspices duquel la mesure des dégrés du méridien de *Rome* avoit été entreprise, à la persuasion & sous la protection spéciale du Cardinal *Valenti*, son premier Ministre. C'est l'ouvrage de deux habiles Mathématiciens, déja assez connus dans la république des Lettres.

Presque tout ce qui a été écrit depuis près d'un siecle sur la figure de la Terre, a été écrit en françois. La mesure réitérée de 9 ou 10 dégrés en France, celle de trois dégrés du méridien sous l'équateur, d'un dégré sous le cercle polaire, de deux dégrés au Cap de Bonne Espérance, sont le sujet d'autant d'ouvrages françois; l'ouvrage même espagnol, composé sur cette matiere, a été traduit en françois: celui ci ne devoit point être excepté de la loi commune; il renferme des choses trop intéressantes, & pour le progrès de l'Astronomie, & pour l'honneur de notre nation; & l'on ne sera pas fâché de le voir placé à côté de ceux de MM. *de Maupertuis*, *Clairaut*, *Bouguer*, *de la Condamine*, *Cassini de Thury*, *de la Caille*, & de plusieurs autres Auteurs François qui ont consacré leurs veilles & leurs travaux académiques à la résolution d'une question également nécessaire à la navigation, la Géographie, la Physique & l'Astronomie. D'ailleurs ces sortes d'ouvrages ne peuvent que gagner à être traduits en françois: un grand nombre d'instrumens, & d'additions aux instrumens d'Astronomie, ont des noms en françois, & ne se peuvent rendre en latin

que par des expreſſions équivoques, ou des périphraſes; ce qui n'a pas donné peu de peine au P. *Boſcovich*, comme il le témoigne lui-même au commencement du quatrieme Livre, où il donne la deſcription des inſtrumens qui ont ſervi à ſa meſure. De plus, l'expérience prouve que, quoiqu'on entende bien le latin; quand on n'eſt pas dans une habitude continuelle de le lire, les inverſions de la langue latine fatiguent l'attention; ce qui doit arriver ſur-tout dans les ouvrages de Mathématique qui demandent déja par eux-mêmes une attention ſuivie. Enfin ce qui rend cette traduction plus néceſſaire, c'eſt que la plupart des exemplaires de l'original ſont renfermés à *Rome* dans la Calchographie ou Imprimerie papale; qu'ils ne ſe débitent que là; qu'on n'en a envoyé à aucun Libraire étranger, & qu'il n'y en a qu'un petit nombre en France, où ils devroient être le plus répandus.

L'ouvrage eſt diviſé en cinq Livres: le premier, le quatrieme & le cinquieme ſont du P. *Boſcovich*; les deux autres du P. *Maire*. Le premier contient la relation de ce qu'on a fait pour découvrir la figure de la Terre, & l'hiſtoire de ce voyage en particulier; hiſtoire plus variée que ne ſembloit le promettre un ſi court trajet dans le pays du monde le plus connu. Le ſecond donne avec une élégante préciſion la meſure du dégré. Le troiſieme réforme la Carte géographique de l'Etat de l'Egliſe qui étoit fort défectueuſe, & contient des remarques très utiles. Ce Livre eſt preſque l'unique Traité que nous ayons d'Aſtronomie pratique: on y trouvera pluſieurs choſes d'une invention nouvelle, pour la perfection des inſtrumens d'Aſtronomie, entre autres un

excellent micrometre, ou instrument de vérification, dont l'usage ne peut devenir trop tôt universel. Le cinquieme traite de la figure de la Terre, déduite de l'équilibre & de la mesure des dégrés. Il faut avoir lu ce Livre pour en sentir tout le mérite : on n'y emploie que la plus simple Géométrie pour résoudre quantité de problêmes qu'on n'avoit cru jusqu'à présent accessibles qu'aux nouvelles méthodes.

Un grand nombre d'Académiciens de l'Académie royale des Sciences sont nommés & cités dans cet ouvrage : on y voit rassemblées, comme sous un point de vue, leurs plus subtiles recherches. C'est un honneur pour cette Compagnie de voir des Souverains Pontifes travailler sur son plan à la perfection de l'Astronomie & de la Géographie.

On a ajouté quelques Notes pour plus grand éclaircissement du texte. Les dernieres Notes du cinquieme Livre contiennent les mesures de dégrés nouvellement faites dans l'*Autriche*, la *Moravie*, la Stirie, la Hongrie, le Piémont & l'Amérique septentrionale ; la comparaison de ces dégrés avec ceux dont on avoit déja la mesure ; & le résultat de cette comparaison pour l'ellipticité, la densité, la grandeur & la figure de la Terre, tel que le P. *Boscovich* l'a tiré lui-même.

On propose de plus la Table suivante, calculée sur les rapports marqués au Livre IV, n°. 373, du palme, & du pas romain à la toise & au pied de *Paris*.

TABLE

Pour réduire les pas & les palmes romains en toises & pieds de Paris.

pas	toises	pieds	pouces	lignes	palmes	toises	pieds	pouces	lignes
1	0	4	7	0.2222	1	0	0	8	3.0333
2	1	3	2	0.444	2	0	1	4	6.0666
3	2	1	9	0.666	3	0	2	0	9.0999
4	3	0	4	0.888	4	0	2	9	0.1333
5	3	4	11	1.111	5	0	3	5	3.1666
6	4	3	6	1.333	6	0	4	1	6.1999
7	5	2	1	1.555	7	0	4	9	9.2333
8	6	0	8	1.777	8	0	5	6	0.2666
9	6	5	3	1.999	9	1	0	2	3.2999
10	7	3	10	2.222	10	1	0	10	6.3333
20	15	1	8	4.444	20	2	1	9	0.6666
30	22	5	6	6.666	30	3	2	7	6.999
40	30	3	4	8.888	40	4	3	6	1.333
50	38	1	2	11.11	50	5	4	4	7.666
60	45	5	1	1.332	60	6	5	3	1.999
70	53	2	11	3.554	70	8	0	1	8.333
80	61	0	9	5.776	80	9	1	0	2.666
90	68	4	7	7.998	90	10	1	10	8.999
100	76	2	4	2.222	100	11	2	9	3.333
200	152	4	8	4.444	200	22	5	6	6.666
300	229	1	0	6.666	300	34	2	3	9.999
400	305	3	4	8.888	400	45	5	1	1.332
500	381	5	8	11.	500	57	1	10	4.666
600	458	2	1	1.332	600	68	4	7	7.999
700	534	4	5	3.444	700	80	1	4	11.333
800	610	6	9	5.776	800	91	4	2	2.666
900	687	3	1	7.998	900	103	0	11	5.999
1000	763	5	5	10.	1000	14	3	8	9.333

PRÉFACE

PRÉFACE.

Du P. Boscovich *Editeur, & l'un des deux Auteurs de l'Ouvrage latin.*

AU LECTEUR.

Nous avons terminé, le P. *Maire* & moi, le voyage entrepris par les ordres, sous les auspices, & aux frais de Sa Sainteté le Pape *Benoît* XIV. Je vous propose ici à ce sujet, mon cher Lecteur, un Recueil de divers Opuscules ou Livres, dont les uns sont du P. *Maire*, les autres m'appartiennent: vous y verrez le but, la suite, le résultat de nos opérations, & les avantages qui en reviennent à l'Astronomie, à la Physique & à la Géographie.

Le premier Opuscule est une Introduction historique & physique du voyage littéraire dans l'Etat de l'Eglise: je suis Auteur de ce Livre.

Le second, qui est du P. *Maire*, contient la détermination de la valeur du dégré, déduite de nos communes observations, & qu'il s'est donné la peine de calculer lui-même.

Le troisieme, qui est encore du P. *Maire*, traite de la réformation de la Carte géographique. L'Auteur a lui-même dessiné avec beaucoup de soin & d'exactitude la nouvelle Carte, sur les observations que nous avons faites ensemble.

Le quatrieme, dont je suis l'Auteur, traite de la description & de l'usage des instrumens qui nous ont servi dans ce voyage.

Le cinquieme, qui m'appartient également, contient la détermination de la figure de la Terre par l'équilibre & la mesure des dégrés.

Dans le premier Livre je me suis efforcé de me mettre à la portée de toute sorte de Lecteurs, de ceux même qui ont peu de connoissance de la Géométrie & du calcul, ou qui ne se sentent pas de goût pour cette science. Je m'y étudie sur-tout à bien faire connoître l'idée d'une telle entreprise ; & je rappelle à ce sujet le souvenir des efforts redoublés qu'on a faits dans presque tous les âges du monde pour découvrir la figure de la Terre, qui faisoit le premier objet de nos recherches.

Pour cela je donne dans le premier article une notice abrégée de ce qui s'est fait avant nous en ce genre : mais je me contente pour l'ordinaire d'effleurer la matiere ; car il faudroit un gros volume pour la traiter à fond. Je propose ensuite mes réflexions sur ce travail, & les motifs qui ont déterminé à faire cette opération en Italie, & à nous confier le soin de l'entreprise. Le second article est une relation de notre voyage : on y parle des lieux que nous avons choisis pour nos stations, & même de la forme des instrumens, de la maniere d'observer, & de l'usage des observations, autant que cela se peut faire sans le secours des figures. Pour varier, on mêle quelques remarques de physique au récit de nos travaux, & des dangers que nous avons courus plus d'une fois de perdre la vie.

Les deux Livres suivans ont été écrits par le P. *Maire* avec une briéveté & une précision qui sera fort du goût des Astronomes déja instruits par l'usage & les réflexions, & qui possedent à fond ces matieres. L'Auteur y rapporte toutes les observations nécessaires pour résoudre la question, avec le résultat de ses calculs. J'ai fait moi-même plusieurs de ces calculs, qui se sont trouvés parfaitement conformes aux siens : mais son exactitude en ce point, & sa constance à soutenir un travail si rebutant, me sont si connues, que je m'en fie plus

à lui qu'à moi-même. Le Lecteur curieux y trouvera beaucoup de choses tendantes à la perfection de la Géographie.

L'Auteur touche dans le second Livre, mais d'une maniere très succinte, quelques points concernant les motifs & l'histoire de notre voyage; ce qui fait que je les ai traités plus au long dans le premier Livre. Il touche aussi, mais avec le même laconisme, ce qui regarde la forme des instrumens, & la maniere de les vérifier: ce qui m'a pareillement engagé à traiter cette matiere à fond dans le quatrieme Livre, où je donne la figure gravée de nos instrumens, & où j'entre dans beaucoup de détails d'Astronomie-pratique, & d'autant plus volontiers, que les instrumens que j'ai fait construire ont beaucoup de choses nouvelles, dont je juge que la description faite avec soin ne doit être ni inutile, ni désagréable aux Astronomes.

Dans le troisieme Livre, le même Auteur parle de la réformation de la Carte géographique: il rend compte des observations que nous avons faites à ce sujet, de celles que nous avons été obligés d'emprunter, des sources où nous avons puisé, & du dégré de confiance que mérite chaque observation en particulier. Pour assurer aux nôtres celle qui leur est due, le P. *Maire* commence par exposer en détail les obstacles que nous avons eu à surmonter, les erreurs auxquelles nous avons pu être exposés, & ce qu'il y auroit à ajouter à notre travail, pour avoir une Carte topographique dans toute l'exactitude possible; d'où quelques personnes, peu versées dans ces matieres, jugeront peut-être que la Carte que nous publions est très imparfaite, & que ce que nous avons fait en ce point se réduit à très peu de chose. Mais si on fait attention à la liste des villes & autres lieux principaux, placée à la fin de ce Livre, avec leurs longitudes & latitudes, dans lesquelles nous ne croyons pas qu'il se trouve une seule erreur d'une

minute; on verra que nous avons fait tout ce qu'il falloit pour atteindre à notre but, à savoir la correction de la Carte géographique. Si de plus on jette les yeux, tant sur cette Carte même que nous proposons, & qui étoit trop grande pour pouvoir être insérée dans ce volume (1), que sur la petite Préface qu'on y a ajoutée, & fait graver en même tems (2), & qu'on lise avec soin cet Opuscule du P. *Maire*, on verra encore en combien de points nous avons perfectionné la topographie même de l'Etat de l'Eglise.

A l'égard de la liste dont on vient de parler, nous avons suivi l'usage, qui est de commencer à compter les longitudes depuis l'isle de *Fer*: mais nos observations ne nous ont donné immédiatement que les différences de longitudes des divers lieux à celle du dôme de *Saint Pierre* de *Rome*. Quant aux latitudes, nous les avons déduites des observations astronomiques, que nous avons faites avec notre grand secteur, soit à *Rome*, soit à *Rimini*. Il est à observer que quoique dans une même ville la longitude & la latitude changent de plusieurs secondes, quelquefois même de plus d'une minute, d'un quartier à l'autre; nous avons marqué en minutes & secondes la longitude & la latitude du lieu de la ville, où nous avons immédiatement observé; & ce lieu étoit toujours un des plus élevés, très souvent la plus haute tour de la ville, & ordinairement vers le point du milieu.

---

(1) Pour pouvoir l'insérer dans la traduction, on a réduit l'échelle à un tiers, en n'omettant que quelques villages.

(2) Cette Préface est un abrégé de ce qu'on verra dans l'ouvrage même sur l'incertitude de la position de quelques lieux; incertitude sur laquelle on peut se rassurer depuis que M. le Baron *de Saint Odil*, Envoyé de Toscane à *Rome*, & qui a parcouru tout l'Etat de l'Eglise, a déclaré avoir vu chaque lieu dans la position où il est marqué sur la Carte.

Le quatrieme Livre donne la description & l'usage des instrumens qui ont servi à notre mesure. J'entre à ce sujet dans un détail qui pourra paroître long & ennuyeux à ceux qui sont au fait de toutes ces choses; mais il ne sera pas inutile à ceux qui s'adonnent à la pratique de l'Astronomie, & qui se plaignent de ne trouver cette pratique décrite nulle part. J'espere que ceux même qui sont exercés dans l'art d'observer, y trouveront quelque chose de nouveau qu'ils ne désaprouveront pas. Le chapitre premier traite de ce qui a rapport aux observations astronomiques, & à la détermination de l'amplitude de l'arc céleste, compris entre les deux termes extrêmes de nos mesures: le second, de ce qui concerne les mesures géodésiques, tant pour la résolution du polygone formé par nos triangles, que pour la réformation de la Carte; & le troisieme, de ce qui a rapport à la mesure actuelle des bases. On donne au commencement de chaque chapitre une description exacte des instrumens, nommément du secteur, du quart de cercle, des perches ou regles qui ont servi à la mesure des bases, des suppôts ou trépieds, & de tout ce qui concerne la construction & rectification de ces instrumens, le tout expliqué par des figures. Ensuite on traite de l'usage de ces mêmes instrumens, de la maniere de les pointer, de les caler, de les disposer: on évalue les erreurs que l'on peut commettre; on propose des théorèmes généraux pour connoître ces erreurs, & les corriger au besoin: enfin on applique toute cette théorie à nos observations, à l'égard desquelles je détermine exactement les limites des erreurs possibles. Le but de toutes ces opérations est la mesure de deux dégrés du méridien pris entre *Rome* & *Rimini*.

Comme cette mesure même étoit le premier objet de notre voyage, & qu'elle sert à déterminer la figure & la grandeur de la Terre, j'ai ajouté un cinquieme Livre qui traite de cette figure, & où j'ai voulu éprouver la force de la Géométrie;

car j'y donne par la ſeule Géométrie la ſolution de pluſieurs problêmes, qui ont rapport à ce ſujet, & dans leſquels il ſembleroit qu'on ne pût abſolument ſe paſſer du calcul.

Ce Livre eſt diviſé en deux chapitres : dans le premier on cherche la figure de la Terre par l'équilibre des fluides ; dans le ſecond, par la meſure des dégrés. A l'égard du premier, on détermine par la ſeule Géométrie la figure d'un ſolide engendré par la révolution d'une courbe autour de ſon axe, premierement dans l'hypotheſe d'une gravité quelconque donnée relativement aux diſtances, & dirigée à un centre unique ; ſecondement dans l'hypotheſe de la gravité newtonienne, tant pour l'hypotheſe d'homogénéité, que pour celle d'un noyau ſphérique, d'une denſité égale à égales diſtances du centre, & variable ſuivant la différence des diſtances. On a ajouté pluſieurs remarques ſur l'hétérogénéité, & le tiſſu irrégulier des parties de la Terre, ſur-tout proche la ſuperficie. Dès l'année 1738, j'en inſinuai déja quelque choſe dans pluſieurs Diſſertations : j'en traite ici plus au long, parceque je crois ces remarques très utiles pour les recherches qui font l'objet du préſent ouvrage. A la fin de ce chapitre on compare les obſervations faites juſqu'à ce jour ſur la longueur des pendules iſochrones, & l'on cherche par diverſes combinaiſons la figure qui en réſulte.

Le ſecond chapitre contient la ſolution des problêmes où il eſt queſtion de trouver la figure de la Terre par la meſure des dégrés. A l'égard des problêmes qui concernent l'ellipſoïde, & dans leſquels étant donnés deux dégrés, ſoit de cercles paralleles à l'équateur, ſoit du méridien, ou un du méridien & un d'un parallele, on demande l'ellipticité ; j'en donne deux ſolutions, dont la derniere, qui eſt beaucoup plus ſimple & plus facile que l'autre, ne s'eſt préſentée à moi qu'après que tout le reſte a été imprimé : on la trouvera à la fin du Livre. Après avoir épuiſé les combinaiſons de tous les

dégrés, dont nous avons jusqu'ici la mesure, & après beaucoup de remarques sur l'irrégularité de la courbe de l'équilibre, j'expose mon opinion sur le tout. Je pense donc qu'il est très probable que la Terre est applatie vers ses pôles, mais qu'on n'a point encore découvert la quantité de cet applatissement, & que la recherche qu'on en fait, loin d'être finie, est à peine commencée. Du reste j'emploie par-tout la méthode géométrique; & la seule fois que je fais usage du calcul intégral, & même du plus simple, ce n'est que pour servir de confirmation à un résultat tiré par la simple Géométrie. Quant au calcul ordinaire, je n'emploie presque jamais que les transformations les plus connues des formules qu'on trouve à l'aide de la Géométrie par l'addition, la soustraction, la multiplication, & la division des termes simples. J'espere que ce Livre sera bien reçu des Physiciens & des Géometres (1).

Il y a une méprise, Liv. V, n°. 246; j'y assure que M. l'Abbé *de la Caille* s'est servi, pour observer la gravité au Cap de *Bonne-Espérance*, du même pendule qui a servi à M. *de la Condamine*, tant dans ses observations d'Amérique, que dans celles qu'il a faites avec moi à *Rome*: on me l'avoit dit aussi. J'ai appris depuis que c'étoit seulement un pendule semblable, & tellement fait, qu'il devenoit isochrone. Mais cela ne peut nuire à nos calculs, puisque je n'y ai point employé les observations faites avec ce pendule, lesquelles ne m'étoient point encore suffisamment connues, comme je l'insinue là-même.

---

(1) On supprime ici la recommandation de l'Auteur au sujet des fautes d'impression, parcequ'on s'est donné le soin de les corriger dans la traduction. Le P. *Boscovich* n'ayant pu veiller par lui-même à l'impression de son Livre, il y a beaucoup de fautes d'impression; plusieurs même qui ne sont point marquées dans l'*errata*; on en verra un ou deux exemples dans les notes.

Si l'on retire quelque avantage de notre travail, on se souviendra que c'est le fruit du zele de M. le Cardinal *Valenti* pour le progrès des sciences, comme de la sagesse & de la munificence du Souverain Pontife *Benoît* XIV. L'un par ses conseils en a été le promoteur : l'autre l'a honoré de sa protection & de ses libéralités.

TABLE DES DIVISIONS.

LIVRE I.

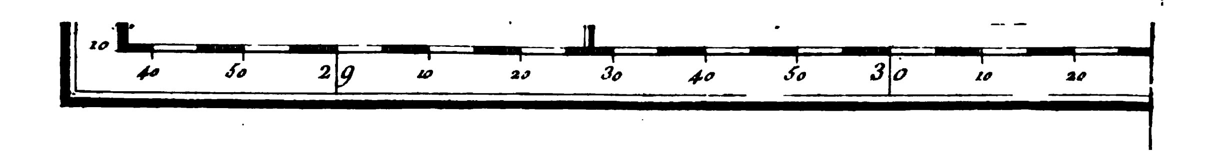
LIVRE II.

LIVRE III.

LIVRE IV.

LIVRE V.

VOYAGE



10
40
50
29
10
20
30
40
50
30
10
20



VOYAGE ASTRONOMIQUE ET GÉOGRAPHIQUE DANS L'ÉTAT DE L'ÉGLISE.

LIVRE PREMIER.

Relation historique & physique du Voyage.

CHAPITRE PREMIER.

Projet de ce Voyage : but qu'on s'y est proposé.

1. NOTRE VOYAGE avoit deux objets ; le premier, de déterminer la grandeur & la figure de la Terre ; le second, de rectifier la Carte géographique des Etats du Pape. Je m'attacherai davantage au premier, comme au principal : mais pour en donner une juste idée, il faut reprendre la chose de plus haut, & commencer par un récit abrégé des tentatives qu'on a faites jusqu'ici pour déterminer la grandeur & la figure de la Terre. Je n'en rappellerai que les

Deux objets du Voyage. La mesure du dégré, & la Carte du Pays.

principales; elles suffiront pour faire connoître l'importance & la difficulté d'une pareille entreprise.

Combien il importe de reconnoître la figure de la Terre.

2. Pour peu qu'on soit initié dans les Lettres, on ne peut ignorer les efforts qu'on fit autrefois, moins encore ceux qu'on a faits dans ces derniers tems, pour connoître la grandeur & la figure de la Terre; par combien de travaux, & avec quelle dépense, on s'est appliqué à faire cette recherche.

Sentiments absurdes des Anciens sur ce point.

3. A l'égard de la figure, quelques Philosophes de la plus haute antiquité ont eu les opinions les plus absurdes: *Anaximandre* lui donnoit la figure d'une colonne; *Cléantes*, celle d'un cône; *Leucippe*, celle d'un cylindre: *Héraclite* faisoit de la Terre un hémisphère concave; *Démocrite*, un disque creux; *Anaximène*, & *Empédocle*, une table unie; *Xénophane* & *Colophon* lui donnoient un nombre prodigieux de racines pour la fixer. Toutes ces opinions sont rapportées par *Riccioli* (1), savant Jésuite du siecle passé, observateur exact, Auteur célebre par son érudition, & par sa connoissance des inventions & découvertes faites jusqu'à son tems.

Deux méthodes pour reconnoître la figure de la Terre.

4. Mais l'absurdité de ces mêmes opinions a été reconnue par les plus célebres des anciens Philosophes: ils se sont accordés presque d'une commune voix à donner à la Terre la forme d'un globe. On a employé deux sortes de preuves pour lui donner cette figure. La premiere est tirée des loix de l'équilibre; & la seconde, des observations qui décelent sa courbure, & la mettent pour ainsi dire sous les yeux.

Preuves des Anciens pour établir la sphéricité de la Terre.

5 Des loix de l'équilibre on déduit la sphéricité des mers, dans l'hypothese que les graves soient dirigés à un seul centre, & que la Terre soit immobile: c'est de-là qu'*Archimede* entre autres en tire la preuve. Car si cette masse, composée de terre & d'eau, étoit toute fluide, & qu'elle prît la forme d'une sphere, dont le point du milieu fût le centre de gravité de toutes ses parties, il est clair que toutes les colonnes d'eau qui aboutiroient du centre à la surface, peseroient également sur le centre, c'est-à dire, qu'il y auroit équilibre: d'où il s'ensuit que les parties du globe devroient être immobiles, & la figure constamment la même. Supposons

(1) Almageste, liv. 2. chap. 1.

maintenant qu'une bonne partie de ce globe devienne solide; cette solidité ne changera rien à la position des autres parties, qui par-là même seront encore en équilibre. Si après cela cette partie solide devient plus ou moins dense, suivant un rapport quelconque; si on ajoute des montagnes, ou de nouvelles couches à sa surface, pourvu qu'on observe de charger également le centre en tout sens; cette partie solide ne changera point sa premiere position; elle soutiendra de la même façon la partie fluide; celle-ci n'aura aucun mouvement, & par conséquent sa surface sera toujours sphérique. C'est ainsi que des loix de l'équilibre, on déduisoit la sphéricité des mers. Et comme les mers se communiquent l'une à l'autre, & que les montagnes, eu égard à la grosseur du globe, n'ont pas une élevation sensible (1) au-dessus de la surface des mers; il s'ensuivoit, des suppositions précédentes, que la masse entiere de la Terre étoit sensiblement sphérique.

Observations qui prouvent la courbure de la Terre,

6. Des loix de l'équilibre on passoit aux observations. Pour se convaincre de la courbure des mers, il suffisoit de voir arriver un vaisseau. Un homme, placé sur le rivage, découvroit d'abord les voiles qui paroissoient sortir de la mer, le reste étant encore caché par la courbure; puis il découvroit le corps même du navire. D'un autre côté, ceux qui étoient dans le navire découvroient successivement des montagnes, des collines, des tours, des toits de maisons, des portes, & le rivage enfin. De plus, on remarquoit sur terre, comme sur mer, qu'à mesure qu'on avançoit vers le pôle, les étoiles, qui en sont voisines, paroissoient s'élever de plus en plus sur l'horizon, & qu'on voyoit successivement passer sur sa tête, ou au zénith, des étoiles toujours plus voisines du pôle: on remarquoit encore, en avançant vers l'orient, que le Soleil & les autres astres se levoient plutôt, & se couchoient de même.

Mais non sa sphéricité.

7. Mais ces raisonnemens, & ces observations grossieres,

(1) Chimboraço, la plus haute montagne de la Cordeliere des Andes au Pérou, & de toutes les montagnes connues, n'a que 3220 toises au-dessus du niveau de la mer: (*mesure des trois premiers dégrés du méridien, Louvre* 1752, *p.* 56) ce qui ne fait pas la deux millieme partie du demi diametre terrestre.

prouvoient seulement que la Terre étoit courbe, & nullement qu'elle fût une sphere parfaite, pas même un globe tel quel; & ce n'est que depuis environ trois cents ans qu'on a reconnu, par observation immédiate, que sa figure rentre en elle-même d'orient en occident, lorsqu'après la découverte de l'Amérique on a commencé à faire le tour du monde: ce qu'ont fait depuis un grand nombre de voyageurs, en naviguant vers l'occident, & revenant par l'orient.

Les éclipses de Lune semblent la prouver.

8. Un autre phénomene, qui, tout éloigné qu'il est de la Terre, lui appartient très particulierement, prouvoit encore plus exactement sa sphéricité au moins approchée; c'est l'ombre même de la Terre dans les éclipses de Lune. Personne n'ignore que ces éclipses ne sont autre chose que l'entrée de la Lune dans l'ombre de la Terre, ou plutôt de l'atmosphère qui l'environne. De plus, on conçoit aisément que l'ombre d'un corps sphérique, de quelque côté que se fasse sa projection, doit être de figure circulaire, & d'une courbure égale en tout sens: ce qui ne convient généralement qu'à la sphère. Or, on remarquoit dans toutes les éclipses de Lune, en quelqu'endroit du ciel qu'elles se fissent, [& il s'en fait de tous côtés, d'orient en occident, & dans un vaste espace entre le nord & le sud] que l'ombre de la Terre étoit terminée par un cercle dont la courbure étoit sensiblement la même: d'où l'on concluoit que l'atmosphere avoit une figure sphérique; & parceque l'atmosphere s'éleve assez peu, & presque également au-dessus de la Terre, comme on le voit par la durée des crépuscules, on en concluoit aussi que la Terre étoit une sphere.

Mais non une sphéricité parfaite.

9. Mais c'étoit trop conclure, & ce phénomene ne prouvoit point encore que la figure de la Terre fût absolument sphérique. Car le cercle de l'ombre est beaucoup plus grand que la Lune; & il ne tombe sur la Lune qu'une très petite portion de la circonférence de ce cercle: de plus, il n'est pas aisé de distinguer l'ombre de la pénombre: d'où il s'ensuit qu'on ne peut exactement déterminer sa courbure. Ajoutez que l'ombre de la Terre se *projectant* en forme de cône, le diametre de cette ombre, à même distance de la Lune, est plus ou moins grand, selon que la Terre est plus ou moins

éloignée du Soleil, & que la Lune, suivant ses différentes distances de la Terre, traverse une plus ou moins grande épaisseur du cône qui va en se rétrecissant; ensorte que la courbure de l'ombre n'est pas toujours égale, même dans la supposition que la Terre fût exactement sphérique.

On l'a jugée telle pendant long-tems.

10. Cependant comme cette courbure paroissoit sensiblement la même; qu'on étoit porté à croire que la nature recherchoit la figure sphérique, comme la plus parfaite; & qu'enfin la loi de l'équilibre, dont nous avons parlé, assuroit à la mer une rondeur uniforme, les Philosophes ont été fortement persuadés, & pendant plusieurs siecles, que, sauf les inégalités des montagnes & des vallées, qu'on peut compter pour rien par comparaison à la grosseur totale du globe (1), la Terre avoit exactement la figure d'une sphère; & ce n'est que depuis environ quatre-vingts ans qu'on a commencé à former quelques doutes là-dessus, à l'occasion que nous allons dire.

Une observation de M. Richer donne lieu d'en douter.

11. M. *Richer* fut envoyé sur la fin de 1671, en l'Isle de Cayenne proche l'équateur, par l'Académie royale des Sciences, pour y faire des observations astronomiques: il avoit porté avec lui une horloge qu'il avoit réglée à *Paris*, & lorsqu'il voulut s'en servir pour observer, il remarqua qu'elle retardoit chaque jour de deux minutes & demie; surpris d'un tel phénomene, qu'il ne croyoit devoir attribuer, ni à aucun changement arrivé dans l'horloge, ni à sa suspension, il soupçonna que la gravité étoit moindre vers l'équateur qu'en Europe (2): ce qui devoit rendre plus lentes les oscillations du pendule, d'où dépend tout le mouvement de la machine, & occasionner par-là même ce retardement de l'horloge.

12. Afin de s'en mieux convaincre, M. *Richer* observa exactement la longueur du pendule simple à secondes (3),

---

(1) Voyez la note du n°. 5.

(2) Voyez *Hist. de l'Acad. des Sciences* par M. de *Mairan*, pour l'année 1742. pag. 88 & 89, & la mesure de M. *Picart*, art. IV.

(3) On nomme *pendule simple à secondes* un poids mis en mouvement, & suspendu à l'extrémité d'un fil de la longueur requise pour que ce poids fasse des oscillations qui durent précisément une seconde. On le nomme simple, pour le distinguer des pendules composés de verges de métal, chargées d'un ou de plusieurs poids.

Inégalité dans la pesanteur, reconnue par celle des pendules isochrones.

& la grava sur la verge du balancier de son horloge, pour pouvoir, à son retour en France, répéter l'observation & comparer les deux mesures. Car il est certain qu'à pesanteur égale, le plus long pendule doit faire des oscillations plus lentes, & le plus court de plus promptes, & qu'à longueur égale, le pendule oscillera plus ou moins vite, selon le plus ou le moins de force de la pesanteur: d'où il s'ensuit que si deux pendules inégaux achevent leurs vibrations dans le même tems, ce qu'on appelle pour cette raison pendules isochrones, le plus long doit être sollicité par une gravité plus grande en raison de sa longueur. L'expérience vérifia la conjecture. M. *Richer*, de retour à *Paris*, trouva tant de différence dans la longueur du pendule, qu'il ne lui resta plus de doute sur l'inégalité de la pesanteur dans les diverses régions de la Terre.

D'abord contestée, puis reconnue par un grand nombre d'observations.

13. Ce phénomene frappa & mit en grande rumeur tout le monde savant (1). Quelques-uns l'attribuerent d'abord à l'inexactitude de l'observation; d'autres à la dilatation des métaux, produite par la chaleur: il y en eut même qui, après avoir fait en différentes contrées de l'Europe des observations du pendule, déclarerent qu'ils avoient trouvé partout une gravité égale: & il n'est pas étonnant qu'ayant observé à de légeres distances, ils n'aient pas apperçu les petites différences qui y répondent: les méthodes dont on se servoit pour lors dans ces sortes d'observations, n'étant pas encore au point de perfection où nous les voyons aujourd'hui. On fit depuis, avec de meilleurs instrumens, des observations beaucoup plus exactes, & dans des lieux fort éloignés les uns des autres; & elles s'accorderent à prouver que la gravité n'est point par tout la même, mais qu'elle va presque toujours en augmentant de l'équateur au pôle. Je dis presque toujours; car lorsqu'il n'est question que d'un court intervalle, on trouve quelquefois de petites anomalies qui disparoissent à de plus grandes distances: de sorte que

(1) Cependant ce fait avoit été prévu à l'Académie des Sciences avant le voyage de M. Richer. Voy. *Mes. de la Terre de M. Picart*, Art. IV, & *Hist. de l'Acad. des Sc.* pour 1666, p. 88 & 89.

si l'on prend deux endroits, dont l'un soit beaucoup plus loin de l'équateur que l'autre, la gravité sera toujours moindre dans celui-ci que dans le premier.

14. Cette différence de gravité une fois connue, la preuve qu'on tiroit autrefois de l'équilibre, pour la sphéricité de la Terre, n'a plus de force ; car si les graves se dirigeoient également de toutes parts à un même centre, & qu'il en résultât une sphere, il est évident que la gravité seroit la même à chaque point de la surface : ce qui est contredit par l'expérience. A l'égard des observations défectueuses & incertaines des anciens, elles prouvoient uniquement que la Terre étoit courbe, & qu'elle avoit à peu près la figure d'un globe. Il a donc fallu recourir à une nouvelle théorie, & à de nouvelles observations, pour déterminer exactement la figure de la Terre.

L'équilibre des mers ne prouve pas la sphéricité de notre globe.

15. Mais on n'attendit pas que l'opinion d'une gravité inégale fût constatée par des observations multipliées : à peine M. *Richer* eut-il fait le rapport de son expérience, que MM. *Huygens* & *Newton*, l'un par son seul systême des forces centrifuges, l'autre en y ajoutant sa loi de la gravitation générale, conclurent que la gravité devoit toujours aller en augmentant de l'équateur aux pôles ; que la Terre devoit être applatie vers les pôles, & renflée sous l'équateur ; & que la figure devoit être celle d'un sphéroïde applati, semblable à celle d'un oignon.

Sentiments d'Huygens & de Newton.

16. On sait que tout mouvement circulaire donne au mobile une certaine force, qu'on appelle force centrifuge. M. *Huygens* en a inventé la théorie pour le cercle : *Newton* a appliqué cette théorie à toutes les courbes. Pour se convaincre de l'existence de cette force, il suffit de faire tourner une pierre dans une fronde : la fronde est tendue ; & elle se rompra même si le mouvement est fort, & la corde foible. De même si l'on jette de l'eau sur une roue qui se meut avec vitesse, elle la rejette bien loin. De plus, il est également démontré, & par la théorie, & par l'expérience, que si des cercles inégaux sont parcourus en tems égaux, la force centrifuge est proportionnelle aux diametres des cercles ; c'est-à-dire, que si un diametre est double ou triple, la force

Force centrifuge dans le mouvement circulaire.

centrifuge sera double ou triple. On sait aussi que la force centrifuge tend à écarter le mobile du centre du mouvement; comme le fait assez entendre ce nom même de *force centrifuge*.

Directement contraire à la gravité sous l'équateur;

17. Jettons maintenant les yeux sur un globe qui tourne sur son axe: les parties les plus voisines des pôles par où passe cet axe, parcourent de très petits cercles, tandis que les autres parties en parcourent de plus grands qui augmentent à mesure qu'elles s'éloignent des pôles; tellement que le plus grand de tous est celui qui se trouve à égale distance des deux pôles, & qu'on appelle équateur. C'est-là que la force centrifuge doit être la plus grande; & elle diminue par dégrés, à mesure qu'on se rapproche des pôles. *Huygens* & *Newton* appliquerent toute cette théorie au mouvement diurne de la Terre, & jugerent que la force centrifuge devoit être la plus grande sous l'équateur, la plus petite proche les pôles, & nulle sous les pôles mêmes. Ils remarquerent de plus que sous l'équateur, la force centrifuge est directement opposée à celle de la pesanteur, ou qu'elle se dirigeoit d'un côté opposé à celui du centre de la Terre, qui est aussi le centre de l'équateur; & que dans les autres lieux elle se dirige du côté opposé au point de l'axe, qui est le centre de ce mouvement, ou de ce cercle; & que ce point est d'autant plus éloigné du centre de la Terre, que ce cercle est lui-même plus éloigné de l'équateur, & plus proche de l'un des pôles: d'où ils conclurent que la gravité étant dirigée sensiblement vers le milieu de la Terre, la force centrifuge étoit plus directement opposée à la gravité sous l'équateur que vers les pôles.

D'où il s'ensuit que la gravité est inégale en différens lieux, & que la Terre est applatie vers les pôles.

18. Ces deux raisons firent juger que la gravité primitive étoit considérablement diminuée sous l'équateur, & qu'elle l'étoit moins à mesure qu'on approchoit des pôles. D'où s'ensuivoit la différence de la gravité absolue (1), & l'applatissement de la Terre: car ce qui est dit ici de la surface, peut s'entendre aussi de toutes les couches sphériques, cachées dans l'intérieur de la Terre, & qui ont le même centre; ensorte

(1) La gravité absolue est précisément ce que nous nommons en françois la pesanteur, c'est-à-dire, la gravité primitive modifiée par la force centrifuge,

que

que les colonnes du fluide, qui aboutissent du centre à la surface, péseront moins sous l'équateur que sous les pôles; & qu'il ne pourra y avoir d'équilibre, à moins que leur défaut de pesanteur ne soit compensé par le renflement des mers à l'équateur. On considéroit de plus, que la gravité, telle que nous l'éprouvons à la surface de la Terre, devoit être composée de cette gravité primitive, qui, dans la sphere, se dirige toute à un seul centre, & de la force centrifuge qui suit une autre direction : d'où on concluoit que la gravité résultante devoit pousser les mers de côté, & non dans une direction perpendiculaire à la surface de la sphere; & par une conséquence ultérieure, qu'il étoit impossible de trouver l'équilibre dans une surface sphérique, & que la Terre devoit pour ainsi dire aller en pente de l'équateur au pôle, pour que cette gravité composée fût par-tout perpendiculaire à la surface de la Terre.

19. *Huygens* envisageoit la gravité de la même façon que *Galilée*, c'est-à-dire, qu'il supposoit une gravité uniforme & dirigée à un centre unique : mais *Newton*, qui avoit expliqué le systême du monde, en supposant que toutes les parties de la matiere s'attirent mutuellement, se servit encore de cette hypothese pour déterminer la figure de la Terre. Selon lui, la gravité n'est pas dirigée à un point fixe, qui lui serve de centre; mais elle est composée de la détermination mutuelle des parties de la matiere, qui tendent à se rapprocher les unes des autres : ce qu'il appelle encore attraction mutuelle. Or, la loi de cette attraction est telle, que des parties égales, à distances égales, tendent également les unes vers les autres : mais que la force de leur tendance change avec la distance; ensorte qu'à de plus grandes distances, la gravité diminue en raison inverse des quarrés des distances, pour parler en termes de géométrie; c'est-à-dire, par exemple, que si la distance est double, triple, décuple, la gravité sera quatre fois, neuf fois, cent fois moindre : car le quarré de deux est quatre, celui de trois est neuf, & celui de dix est cent.

La gravité selon Newton.

20. Dans cette hypothese de gravité, dès-lors que pour conserver l'équilibre, la figure sphérique se change en ellip-

D'où s'ensuit une nouvelle inégalité dans la gravité, & un plus grand applatissement de la Terre vers les pôles.

tique, ce changement occasionne une nouvelle différence dans la gravité, & cette différence même doit entrer pour quelque chose dans la détermination de la figure de la Terre. En effet, une particule de matiere, placée successivement en divers points de la surface d'un sphéroïde elliptique, ne regarde point de la même façon les autres parties du sphéroïde, & n'a à leur égard, ni la même position respective, ni les mêmes relations de distances. De-là il arrive que la gravité, composée de toutes ces gravités, n'a point par-tout la même force, ni la même direction; & *Newton* a démontré en particulier, que dans un sphéroïde homogêne & applati, la gravité est plus grande aux pôles qu'à l'équateur: d'où il s'ensuit que dans son systême, la différence de la gravité & l'applatissement de la Terre doivent être beaucoup plus considérables que dans celui de la gravité uniforme de M. *Huygens*.

Quantité de l'applatissement, suivant Huygens.

21. L'un & l'autre Auteur a cherché, par la Géométrie & le calcul, la figure qui résulte de son hypothese de gravité, & du mouvement diurne de la Terre. *Huygens* n'avoit pas beaucoup de chemin à faire: il a démontré que la gravité étoit moindre de $\frac{1}{289}$ sous l'équateur que sous les pôles; que la Terre étoit applatie vers les pôles, & qu'elle s'élevoit sous l'équateur d'environ 7000 pas géométriques: différence peu sensible, eu égard à la grandeur du diametre de la Terre: & il ne s'est pas contenté d'avoir trouvé la quantité de cet applatissement; il a déterminé toute la courbure.

Quantité de l'applatissement dans le systême de l'attraction newtonienne.

22. *Newton* avoit à résoudre un problême beaucoup plus difficile: car dans son systême, la pesanteur de chaque partie de la matiere dépend de la figure de la Terre, & cette figure dépend de la pesanteur des parties; de sorte que la figure & la gravité doivent se déterminer réciproquement l'une par l'autre. De plus, connoissant même la figure, il n'étoit pas aisé, à beaucoup près, de déterminer généralement, pour un point quelconque de la masse, la force qui résulte de la gravitation sur toutes ses parties. Ainsi la figure a échappé à ses recherches, & il n'a pu parvenir à la solution du problême, qu'en supposant une figure ovale ou elliptique, qui est une des sections coniques. D'abord il a trouvé une méthode

pour déterminer la gravité au pôle & à l'équateur, dans un sphéroïde elliptique: de-là, par une méthode de fausse position, il a trouvé la figure du sphéroïde, requise par les loix de l'équilibre, en tenant compte de la force centrifuge, & de l'attraction de toutes les parties; & il a déterminé le rayon de la Terre, sous l'équateur, de $\frac{1}{230}$ plus long que sous le pôle, c'est-à-dire, de 17 milles romains; & la gravité plus petite sous l'équateur que sous le pôle, de $\frac{1}{230}$ de celle du pôle.

23. *Newton* en étoit resté là: M. *Mac-Laurin* est parvenu avec une dextérité admirable où *Newton* n'avoit pas atteint. Ce grand homme a donné encore plus d'étendue au problême de *Newton*, & l'a résolu avec autant de précision que de bonheur. Il a trouvé que la figure d'une masse fluide & homogêne, dont toutes les parties s'attirent en raison inverse des quarrés des distances, & sont de plus poussées vers un centre donné, par une force proportionnelle à la distance à ce centre, & par une autre force dirigée du côté opposé à un plan donné qui passe par le centre même, & proportionnelle aux distances à ce plan, est celle d'un sphéroïde elliptique, ayant pour centre ce même centre donné. Il a déterminé exactement dans cette hypothese la figure de cette masse fluide, son élevation sous l'équateur, ainsi que la différence de la gravité dans les différens points; & il a trouvé les mêmes résultats que *Newton*. C'est par la solution de ce beau problême, qu'il est parvenu à expliquer de plus ce qui concerne le flux & le reflux de la mer. Solution du problême par M. Mac-Laurin.

24. Tandis qu'*Huygens* & *Newton* déterminoient par les loix de l'équilibre la figure de la Terre & son applatissement vers les pôles, quelques observations de M. *Cassini* sur la mesure du dégré d'un méridien terrestre, comparées à celles qu'avoit faites avant lui M. *Picart*, sembloient plutôt faire de la Terre un sphéroïde allongé vers ses pôles, & semblable à un œuf. Pour détailler ce fait, il faut reprendre les choses d'un peu plus haut; expliquer en peu de mots ce que c'est qu'un dégré du méridien, & les tentatives que les Anciens ont faites, & celles qu'on a faites de nos jours pour en avoir la mesure. Conclusion contraire, tirée de la mesure d'un dégré terrestre par M. *Cassini*.

Ce que c'est qu'un dégré, & sa mesure dans le Ciel.

25. Les Géometres divisent le cercle en 360 parties égales, qu'ils appellent dégrés ; chaque dégré en 60 minutes ; chaque minute en 60 secondes ; chaque seconde en 60 tierces ; & ainsi de suite. Ces dégrés, minutes, secondes, &c. mesurent l'angle formé par la rencontre de deux lignes droites. Connoissant donc un dégré d'un cercle particulier, on a toute sa circonférence. De plus, on pourra connoître le nombre de dégrés contenus dans un arc du cercle, fût-il à la plus grande distance, comme d'un cercle tracé dans le Ciel, en prenant l'angle que forment à son centre deux lignes droites, dirigées aux deux extrémités de cet arc. Par exemple : la Terre, en comparaison du Ciel, n'étant qu'un point qu'on peut prendre pour le centre du monde ; si l'une des lignes est dirigée au zénith, l'autre à une étoile, on connoîtra par l'inclinaison des lignes, c'est-à-dire, par l'angle qu'elles forment, de combien de dégrés cette étoile est éloignée du zénith.

Ce que c'est qu'un dégré du méridien sur la Terre.

26. Dans la Terre supposée sphérique, on conçoit aisément ce que c'est qu'un dégré d'un grand cercle quelconque de cette sphere, ou un dégré d'un méridien. On appelle grand cercle dans une sphere, celui qui la coupe en deux parties égales, & passe par son centre. Le méridien est le cercle qui va directement du Midi au Nord, & passe par les deux pôles. La trois cent soixantieme partie de la circonférence de ce cercle, est ce qu'on appelle un dégré du méridien. Si deux lignes tirées du centre de cette sphere, sont dirigées à deux points du Ciel, qui terminent un dégré céleste, l'arc, intercepté par ces deux lignes sur la surface de la Terre, contiendra un dégré terrestre. De-là vient qu'on tire ordinairement du Ciel, ou de l'observation des astres, la mesure des dégrés terrestres.

Mesures d'Eratosthène, de Possidonius & des Arabes.

Aussi tandis qu'on a cru la Terre sphérique, les anciens Philosophes se sont attachés pendant plusieurs siecles à mesurer un dégré d'un grand cercle de la Terre, pour en déduire la circonférence entiere & le diametre. Ils ont employé pour cela diverses méthodes. *Eratosthênes*, ayant appris que dans la Ville de *Syene* (en Egypte) on avoit à midi le Soleil à plomb sur la tête le jour du solstice, de sorte que ses rayons

éclairoient le bas des puits les plus profonds; & de plus, qu'on avoit midi à *Syene* au même moment qu'à *Alexandrie*, où il résidoit pour lors, vu que ces deux Villes étoient sous le même méridien; il mesura l'ombre que *projectoit* le Soleil à midi, & trouva la distance au zénith égale à la cinquantieme partie d'un grand cercle du Ciel, ou de 7 dégrés 12 minutes; il en conclut qu'il y avoit autant de dégrés & de minutes terrestres entre ces deux Villes, dont l'une avoit le Soleil à son zénith, & l'autre répondoit à un point du Ciel, éloigné du Soleil de ce même nombre de dégrés: sachant d'ailleurs par le rapport des Voyageurs, que ces deux Villes étoient éloignées l'une de l'autre de 5000 stades, il en déduisit, pour le dégré, la valeur d'environ 694 stades, ou de 87 milles, le mille étant de 8 stades. *Possidonius* croyant voir l'Etoile Canopus raser l'horison de Rhodes, tandis qu'à *Alexandrie* elle lui paroissoit élevée de 7 dégrés & demi au-dessus de l'horison; sachant de plus que la distance d'*Alexandrie* à Rhodes étoit d'environ 5000 stades, il conclut 667 stades, ou à peu près 83 milles, pour la mesure du dégré. Les Arabes, sous le regne, & par ordre de leur Roi *Maiman*, s'étant avancés dans les plaines de *Fingar*, dans la direction du Nord, jusqu'à ce que le pôle fût d'un dégré plus élevé sur l'horison, que dans le lieu d'où ils étoient partis, ils trouverent dans le dégré terrestre, qui répondoit à ce dégré du Ciel, environ 56 de leurs milles. C'est ainsi que les Anciens, par diverses méthodes, dont les unes se trouvent décrites imparfaitement, & par d'autres dont la mémoire ne s'est pas conservée, déterminerent le dégré du méridien terrestre.

28. Leurs mesures different beaucoup, ainsi que toutes les autres observations astronomiques qu'ils nous ont laissées: ce qui provient en grande partie de l'imperfection de leurs méthodes & de leurs instrumens, comme aussi de la différence des mesures dont ils se sont servis; car les stades & les milles n'étoient point par-tout les mêmes, & nous ne connoissons pas bien exactement aucune de ces mesures. Ainsi dès qu'on a commencé, dans ces derniers tems, à cultiver avec plus de soin l'Astronomie, on a pris aussi, avec plus de pré-

Mesures tentées par les modernes.

caution, la mesure du dégré : telles sont les mesures de *Norwood* en Angleterre, de *Snellius* en Hollande, de *Fernel* en France, de *Riccioli* en Italie. Mais ces mesures mêmes sont encore trop incertaines, ou plutôt trop peu exactes. L'Astronomie n'étoit point assez perfectionnée : les instrumens, la maniere d'observer, n'avoient pas atteint leur point de perfection.

Mesures de M. Picart & de MM. Cassini pere & fils.

29. Une plus grande précision étoit réservée au siecle de Louis le Grand. M. *Picart*, de l'Académie royale des Sciences, mesura, par ordre de Sa Majesté, un dégré du méridien : ce qu'il fit avec plus de soin, & avec des instrumens plus parfaits, qu'aucun des Astronomes qui l'avoient précédé. M. *Picart* est le premier qui ait appliqué une lunette aux instrumens astronomiques, qui n'étoient jusqu'à lui garnis que de pinules, & l'on ne peut dire combien cette heureuse invention a contribué à l'avancement & à la perfection de l'Astronomie. Le dégré qu'il mesura étoit dans la partie septentrionale de France, (de Paris à Amiens) & il en trouva la longueur de 57060 toises, dont chacune contient six pieds de Paris. Quelques années après, sa méridienne fut prolongée dans la partie méridionale de France, depuis *Paris* jusqu'aux Pyrénées, par Jean Dominique *Cassini*, que le Roi avoit fait venir d'Italie pour lui confier le soin de l'Observatoire nouvellement construit à *Paris*. M. *Cassini* mesura ce nouvel arc du méridien avec toute l'exactitude possible, & il en trouva le moyen dégré de quelques toises plus long que celui de M. *Picart*. Après sa mort, M. Jacques *Cassini* son fils, aujourd'hui vivant (1), répéta la même mesure, & continua la méridienne au Nord de Paris jusqu'au Port de *Dunkerque* : il trouva pareillement que le dégré méridional étoit le plus long.

Conséquences qu'on en tire.

30. Comme ces dégrés avoient été mesurés avec un soin extrême, il ne parut pas à M. *Cassini* qu'on pût rejetter la différence qu'il trouvoit, sur l'inexactitude des observations ; & il en conclut aussi-tôt que puisque tous les dégrés d'une

(1) Cet ouvrage du P. Boscovich a été imprimé en 1755 ; & M. Jacques Cassini, fils de Jean Dominique, n'est mort qu'en 1756. Voyez son Eloge, *Hist. de l'Acad. des Sciences pour l'année* 1756.

sphere sont égaux, la figure de la Terre n'étoit point absolument sphérique. De plus, il lui sembla d'abord que l'excès du dégré méridional sur le septentrional prouvoit que la Terre étoit applatie vers les pôles, & élevée sous l'équateur, comme le paroissoit exiger aussi le mouvement diurne de la Terre sur son axe : mais en y regardant de plus près, on reconnut bientôt qu'au contraire cette augmentation des dégrés du Nord au Midi, supposoit la Terre applatie sous l'équateur, & allongée vers les pôles ; c'est-à-dire, d'une figure semblable à celle d'un œuf (1).

31. Pour rendre cette conséquence plus sensible, il faut expliquer ce que c'est qu'un dégré du méridien dans une Terre qui ne soit point sphérique, & dont le méridien ne soit point un cercle exact ; & de quelle maniere on détermine ce dégré. Supposons la Terre sans aucune de ces inégalités qui sont à sa surface, *& unie comme la mer* (2) : c'est la figure qu'elle auroit alors qu'il s'agit de déterminer ; car ces inégalités qui frappent nos yeux, doivent être comptées pour rien. Si donc on divise cette Terre en deux, par un plan qui passe par les pôles & le centre, la courbe qui termine cette section, est ce qu'on appelle un méridien terrestre. Maintenant en quelque endroit de ce méridien qu'un homme se trouve placé, il y aura un point du Ciel qui répondra directement sur sa tête. S'il avance au Nord, le long de ce méridien, sa ligne verticale changera de direction, à cause de la courbure de la Terre, sur laquelle nous le supposons de bout, & il aura sur la tête un autre point, ou un autre zénith : & s'il a avancé suffisamment, pour que ces deux points soient éloignés entre eux de l'intervalle d'un dégré céleste, on dit qu'il a parcouru un dégré terrestre. Le

Différence des dégrés dans une Terre qui n'est pas sphérique.

(1) M. des Roubais, Ingénieur chargé de poser les signaux, donna dans un Journal de Hollande, la démonstration, que les dégrés décroissans vers le pôle, faisoient la terre allongée.

(2) Cette supposition ne change rien à la question de la figure de la Terre : les plus hautes montagnes changent moins la figure de la Terre qu'un grain de poussiere ne changeroit la figure d'une boule de six pouces de diametre.

dégré du méridien terreſtre eſt donc un arc de ce méridien dont les points extrêmes ont pour zéniths deux points du Ciel, diſtans l'un de l'autre de la valeur d'un dégré, ou des extrémités duquel abaiſſant deux lignes à plomb, juſqu'à ce qu'elles ſe rencontrent quelque part au-dedans de la Terre, ce qui ne peut manquer d'arriver à cauſe de ſa courbure, il ſe forme à leur point de concours un angle d'un dégré. Le plus haut point du Ciel, ou le zénith, eſt déſigné par un fil à plomb, chargé d'un poids. Qu'on ſuſpende ce fil à l'extrémité d'une regle, à laquelle eſt adoſſée une lunette, & qu'on dirige cette lunette ſur quelque étoile au moment de ſon paſſage au méridien: ſi la regle ſe trouve pour lors partagée également par le fil, c'eſt une preuve que l'étoile eſt au zénith: mais ſi le fil ſe trouve écarté du milieu de la regle, cette diſtance marquera l'inclinaiſon de la lunette, & la diſtance de l'étoile au zénith. C'eſt par ce moyen qu'on connoît de quelle quantité a changé le zénith, tandis qu'on parcouroit un arc du méridien terreſtre.

Que le dégré eſt plus grand, où la courbure eſt moindre.

32. On voit que ſi la Terre eſt une ſphere & le méridien un cercle, & qu'on parcoure des arcs égaux, le zénith changera toujours de la même quantité: d'où il ſuit que tous les dégrés de tous les méridiens ſeront égaux, & que les lignes perpendiculaires à la ſurface ſe rencontreront au centre. Mais ſi la Terre eſt, ou applatie, ou allongée vers les pôles, le méridien n'a plus une figure circulaire, ni ſa courbure n'eſt plus par-tout la même; & le changement du zénith ſera d'autant plus prompt, la meſure du dégré d'autant plus petite, & le concours des deux perpendiculaires d'autant plus proche de la ſurface de la Terre, que la courbure ſera plus ſenſible.

Que la Terre eſt allongée vers les pôles, ſi la courbure y eſt plus grande.

33. Si donc la Terre a une figure allongée vers les pôles, & ſemblable à celle d'un œuf, il eſt clair que ſa courbure ſera plus grande ſous les pôles & moindre ſous l'équateur; ſi au contraire la Terre eſt applatie, & ſi ſa figure reſſemble à celle d'un oignon, ſa courbure ſera plus grande ſous l'équateur & moindre ſous les pôles, & elle ira toujours en décroiſſant de l'équateur au pôle, dans ce ſecond cas, tandis que les dégrés iront toujours en augmentant; & tout au contraire

dans

dans le premier cas où la courbure augmente à mesure qu'on s'éloigne de l'équateur, & qu'on s'approche du pôle, tandis que la longueur des dégrés diminue dans la même proportion; [de sorte que le plus petit est sous le pôle, & le plus grand sous l'équateur]. Donc, puisque les dégrés de France, mesurés par M. *Cassini*, paroissoient aller en diminuant du Midi au Nord, il s'ensuivoit que la Terre étoit allongée & non applatie vers les pôles: ce qui étoit contraire à ce que *Huygens* & *Newton* avoient déduit de leur théorie de l'équilibre.

34. Ceci donna lieu à de grandes disputes parmi les Physiciens. Les uns, sans faire attention aux théories de *Newton* & d'*Huygens*, faisoient valoir les observations de MM. *Cassini* & *Picart*, qui, selon eux, décidoient la question sans appel, & prouvoient inconcestablement l'allongement de la Terre vers les pôles: d'autres qui faisoient plus de fond sur cette théorie, remarquoient que la longueur de la France étoit une trop petite partie de la circonférence de la Terre, & la différence entre des dégrés si voisins, trop imperceptible pour pouvoir échapper aux erreurs inévitables dans les observations: erreurs qui pouvoient même surpasser la différence dont on cherchoit à s'assurer. Disputes entre les Savans.

35. Pendant le cours de ces disputes assez vives, on approfondit les théories d'*Huygens* & de *Newton*; on perfectionna les instrumens; l'Astronomie spéculative & pratique firent de grands progrès. A l'égard de la théorie, M. de *Mairan* imagina une loi de gravité, telle, que le sphéroïde allongé, comme l'applati, & une différence plus grande ou plus petite dans la longueur des dégrés, pouvoient se concilier avec une différence quelconque de gravité, sans déranger l'équilibre; & il conclut que ce n'étoit que par des observations exactes qu'on pouvoit déterminer la mesure des dégrés, & la figure du méridien. Pour ce qui concerne l'Astronomie, *Bradley* trouva dans les étoiles deux mouvemens inconnus jusqu'alors, & qui, quoique petits, ne laissent pas d'influer notablement dans la mesure du dégré: car lorsqu'on veut déterminer cette mesure par la position des étoiles fixes, on observe aux deux extrémités de la méridienne la distance L'Astronomie perfectionnée.

de la fixe au zénith; & comme c'est ordinairement le même Observateur qui opere dans les deux stations, il s'écoule plusieurs jours, quelquefois même plusieurs mois d'une observation à l'autre. Or, on a découvert plusieurs mouvemens dans les étoiles : le premier, qui est connu de tout le monde, est le mouvement diurne qui se fait d'orient en occident : s'il étoit unique, les observations n'en souffriroient pas, pourvu qu'on saisît le moment du passage de l'étoile au méridien, qui seroit toujours traversé par l'étoile à même distance du pôle & du zénith de l'observateur : le second mouvement est celui de la précession des équinoxes, par lequel les étoiles s'approchent ou s'éloignent continuellement du zénith d'un lieu quelconque : ce mouvement est très lent, & il étoit déja connu des anciens Astronomes : les deux derniers sont beaucoup moindres, & n'ont été découverts que depuis trente ans (1) par *Bradley* : l'un est l'effet de l'aberration de la lumiere; l'autre d'une certaine nutation dans l'axe de la Terre : tous les deux font varier continuellement la distance d'une étoile au zénith.

Nécessité de connoître les variations observées par M. Bradley aujourd'hui constatées.

36. Si ces mouvemens ne sont pas bien connus de l'observateur, ensorte qu'il ne puisse déduire de sa théorie la quantité dont l'étoile s'est approchée ou éloignée du zénith pendant le tems qui s'est écoulé entre ses deux observations, il est clair qu'il ne pourra conclure sûrement la vraie mesure du dégré. Or, ni M. *Picart*, ni M. *Cassini* pere & fils, n'ont eu (lors de leur mesure des dégrés) aucune connoissance des mouvemens découverts de nos jours par M. *Bradley*; au lieu qu'aujourd'hui, qu'ils sont parfaitement connus, il suffit d'en tenir compte pour trouver le lieu où une étoile, une fois observée, doit se trouver en quelque tems que ce soit; de sorte que si l'on emploie des instrumens convenables, on ne se trompera jamais de deux secondes; ce qui a été suffisamment constaté par une infinité d'observations, tant de *Bradley* même, que d'un grand nombre d'Astronomes célebres qui ont observé depuis lui. Ainsi il n'y a plus lieu de craindre que la mesure

(1) En 1725. Voy. *Transact. philosophiques*.

du dégré puisse être troublée par aucun mouvement secret ou inconnu des étoiles.

37. Un autre objet dû aux nouveaux progrès de l'Astronomie, c'est la connoissance beaucoup plus exacte de ce qu'on appelle les réfractions. Lorsque le rayon de lumiere passe d'un milieu raréfié dans un air plus grossier, comme de l'éther dans l'atmosphere, il se détourne de son chemin direct : ce détour, cette inflexion, est ce que les Physiciens appellent réfraction. Son effet est d'élever les astres, ou de les faire paroître plus haut qu'ils ne sont ; & cette différence est très considérable près de l'horizon, où elle surpasse un demi degré ; mais elle décroît insensiblement, & d'autant plus, que l'astre approche de plus près du zénith. Les anciens Astronomes l'ont, ou totalement ignorée, ou peu connue ; elle a nui en particulier aux observations de *Riccioli* : aujourd'hui on la connoît si bien, qu'on n'a lieu d'en appréhender aucune erreur sensible, du moins lorsqu'il n'est question que d'une petite distance au zénith : car alors la différence n'est que d'environ une seconde par dégré ; de sorte que lorsqu'on n'a besoin d'observer que des étoiles voisines du zénith, on n'a point d'erreur à craindre de la part de la réfraction.

Théorie des réfractions, non moins nécessaire, aujourd'hui connue.

38. Enfin l'on a encore beaucoup perfectionné les instrumens d'Astronomie : *Graham* sur-tout, célebre Artiste Anglois, a donné à ce sujet des preuves de son adresse & de son industrie, tandis que tous les Astronomes s'exerçoient à l'envi sur l'usage des instrumens, sur les loix de l'optique, sur l'examen des divisions, & sur tout ce qui y a rapport, afin qu'il ne manquât rien de tout ce qui pourroit contribuer à la perfection des observations. Finalement l'on convint d'une mesure fixe, qui devoit servir de modele à toutes les autres, & prévenir toutes les erreurs qu'auroit pu produire dans la comparaison des dégrés l'inégalité des mesures (1).

Instrumens d'Astronomie perfectionnés

(1) On fit faire à Paris une regle de fer qu'on ajusta le mieux qu'il fut possible sur l'étalon conservé au Châtelet de Paris, d'une toise réformée en 1666. (Voyez Traité de M. Picart *de mensuris*, anc. Mém. de l'Acad. Tom. 6). On en fit faire une seconde égale à la premiere :

Projet d'un voyage à l'équateur & au cercle polaire.

39. L'Académie royale des Sciences forma dès 1733 (1) le dessein de déterminer avec beaucoup plus d'exactitude qu'on n'avoit encore fait, la figure de la Terre. Elle exposa à M. le Comte de *Maurepas*, Secrétaire d'Etat qui avoit le département des Académies, l'importance de cette recherche, & les avantages qui en reviendroient non seulement à la Physique & à l'Astronomie, mais à la Géographie & à la navigation, qui contribuent en tant de manieres aux usages & aux commodités de la vie : elle représenta qu'un navire dont on auroit estimé le chemin suivant la figure de la Terre qui résultoit des observations de MM. *Cassini*, pouvoit se briser contre un écueil, dont elle passeroit à plus de trente lieues (2) si la Terre avoit la figure que lui donnoit *Newton*; que le plus sûr moyen de décider la question de la sphéricité, de l'allongement ou de l'applatissement de la Terre vers les pôles, étoit de mesurer deux dégrés du méridien aux plus grandes distances possibles, & par conséquent de pénétrer, d'une part, le plus avant qu'on pourroit vers le nord, & de se transporter, de l'autre, sous l'équateur (3), puisque si la Terre est elliptique (4), ces deux dégrés suffisent seuls pour déterminer sa figure & sa grandeur; qu'enfin une entreprise si utile seroit à la fois plus glorieuse au Roi & à la Nation, que ne le fut à la Grece la fameuse expédition des Argonautes, si vantée par la fabuleuse antiquité.

40. Le projet fut goûté : deux Troupes d'Académiciens,

---

l'une resta en dépôt à l'Académie; l'autre fut emportée par les Académiciens nommés pour le voyage de l'équateur, & servit à toutes leurs mesures. (Voy. *Mes. des trois premiers dég. du mérid.* Art. XXV.

(1) La premiere proposition du voyage de l'équateur fut faite verbalement à l'Académie en 1733 par M. de la Condamine; mais le projet n'en fut agréé par le ministere qu'en 1734.

(2) Voyez Préface de la fig. de la Terre & des élémens de Géographie de M. de *Maupertuis*.

(3) Le voyage à l'équateur fut résolu dès 1734, & les passeports demandés à l'Espagne : mais ce ne fut qu'après le départ des trois Académiciens pour *Quito*, au mois de Mai 1735, que le projet du cercle polaire fut formé par M. de Maupertuis.

(4) Comme il résulte de toutes les hypotheses sur la pesanteur.

ayant à leur tête MM. *Godin* & de *Maupertuis*, partent, les uns pour l'Amérique, les autres pour la Laponie (1). Ceux-ci ayant trouvé proche de la riviere de *Tornea* (au nord du golfe de Bothnie) un terrein propre à leurs opérations, eurent bientôt fini leur mesure. Ils déterminerent la longueur du dégré du méridien qui coupe le cercle polaire; & M de *Maupertuis* l'ayant trouvé plus long d'environ 500 toises que celui de M. *Picart* en France, après avoir diminué celui-ci par les corrections nécessaires tant pour l'aberration de la lumiere, la nutation de l'axe de la Terre, en conséquence des découvertes de M. *Bradley*, que pour les réfractions (2), publia en 1737 (à son retour de Laponie) un ouvrage intitulé *Figure de la Terre*, où il prétend en effet que ces deux dégrés suffisent non seulement pour prouver l'applatissement de la Terre vers les pôles, mais pour déterminer sa figure & sa grandeur.

Applatissement de la Terre vers le pôle, annoncé par M. de *Maupertuis*, envoyé au cercle polaire.

41. Mais comme il en résultoit un applatissement beaucoup plus considérable que celui qu'on trouve par la théorie d'*Huygens*, & même par celle de *Newton*, M. *de Maupertuis* (aidé des Académiciens ses compagnons de voyage)

Corrections diverses du dégré mesuré par M. Picart.

---

(1) La Troupe académique de l'équateur étoit composée de MM. *Godin*, *Bouguer*, & *de la Condamine*: celle du cercle polaire, de MM. *de Maupertuis*, *Clairaut*, *Camus*, & *le Monier*.

(2) Sources d'erreurs, dont les deux premieres étoient inconnues, & la derniere mal connue du tems de M. *Picart*. M. de *Maupertuis* & ses compagnons de voyage, firent une autre correction au dégré de M. *Picart*, en vérifiant en 1739, par de nouvelles observations, l'amplitude de l'arc du méridien, intercepté entres les paralleles de *Paris* & *Amiens*. Voy. *dég. du mérid.* entre Paris & Amiens. *Paris* 1740, in-8°. & *Mém. de l'Acad.* Il restoit encore la mesure géodésique, ou la distance de *Paris* à *Amiens*, déterminée par M. *Picart*, à vérifier; & sur-tout sa base mesurée par lui sur le terrein de *Villejuifve* à *Juvisi*, laquelle avoit servi de fondement à toutes ses mesures, & qui n'avoit jamais été soupçonnée d'erreurs. MM. Jacques *Cassini* & l'Abbé *de la Caille* reconnurent cependant en 1740 que M. *Picart* avoit supposé cette base trop longue de près d'une toise par mille. Voyez *Méridienne de Paris vérifiée*, impression du Louvre, pag. 37: ce qui a depuis été vérifié en 1740 par quatre Commissaires de l'Académie. Voyez *Mém. de l'Acad.* 1740, pag. 281.

répéta peu après, (en 1739) avec l'excellent Secteur de *Graham*, qui lui avoit servi en Laponie, les observations *astronomiques* de M. *Picart* en France, en conservant les distances des lieux déterminées par ce Mathématicien; & les nouvelles observations ayant donné la longueur du dégré plus grande, M. *de Maupertuis* trouva la différence entre les dégrés (du méridien, mesurés en France & en Laponie) moindre presque de moitié: ce qui fut cause qu'il diminua beaucoup l'applatissement qu'il avoit d'abord donné à la Terre. Cependant on commença d'avoir quelque scrupule sur les opérations même géodésiques de M. *Picart*, (qui n'avoient pas encore été soupçonnées d'erreur,) & M. *Jacques Cassini*, fils de *Dominique*, s'étant enfin déterminé à les vérifier avec M. l'Abbé *de la Caille*, ils y trouverent une erreur très sensible (de près d'une toise d'excès par mille:) mais par un évenement des plus singuliers, les erreurs astronomiques & géographiques de M. *Picart* s'étoient presque réciproquement compensées; & en tenant compte des unes & des autres, on revenoit à peu près à sa mesure. MM. *Cassini*, *de Thury*, & *de la Caille* parcoururent toute la France avec leurs instrumens, & surtout le terrein traversé par la méridienne de Paris dans toute sa longueur: ils y firent un grand nombre d'observations, & mesurerent chaque dégré avec tant de précautions, qu'on ne peut raisonnablement former aucun doute sur la vraie mesure des dégrés du méridien dans toute l'étendue de la France: & bien que ces dégrés croissent en allant du midi au nord, leur différence est beaucoup moindre qu'on ne la concluroit par la seule théorie.

Mesure du dégré du méridien, voisin de l'équateur.

42. Sur ces entrefaites, M. *Bouguer* & M. *de la Condamine* arrivent d'Amérique (en 1744 & 1745,) après avoir déterminé, par dix ans de travaux & de peines incroyables dans le vallon de *Quito*, la mesure de trois dégrés du méridien les plus voisins de l'équateur. Chacun d'eux a publié séparément ses observations (1). Leurs résultats sur la mesure

(1) Fig. de la Terre, déterminée par les observations de MM. *Bouguer & de la Condamine*, in-4°. Paris 1749. par M. Bouguer. Mesure des trois premiers dégrés du méridien dans l'hémisphere austral par M. de la

du dégré voisin de l'équateur, s'accordent très bien entre eux, & different peu de celui qu'avoient publié un peu auparavant les deux Mathématiciens (1) envoyés par le Roi d'Espagne, pour accompagner les Académiciens François, & qui avoient observé conjointement avec M. *Godin*, séparément de MM. *Bouguer* & *de la Condamine*. Si les différends qui se sont élevés entre tous ces Observateurs, ont été un peu vifs, ils ont du moins servi à constater avec la derniere évidence leur exactitude scrupuleuse à éviter toute espece d'erreur, & leur détermination de la mesure du dégré n'en devient elle-même que plus évidente.

43. Or, leur dégré, considérablement moindre que celui du nord, & que celui de France corrigé par les nouvelles observations (de 1739 & 1740,) donne à la vérité une nouvelle preuve de l'applatissement de la Terre, mais ne s'accorde pas avec la théorie par laquelle, supposant au méridien une figure elliptique, on en déduit la quantité de cet applatissement. Si l'on compare entre eux les dégrés d'Amérique & de Laponie; puis l'un & l'autre séparément à celui de France, il en résulte trois différens rapports de l'axe de la Terre au diametre de l'équateur (2); & cette différence est si considérable, qu'on ne peut absolument l'attribuer, ni à la négligence des Astronomes, ni aux défauts des instrumens dont ils nous ont donné une description fort exacte. De plus, les observations faites très soigneusement par les Académiciens du nord, & par ceux de l'équateur sur la longueur du pendule à secondes, prouvent bien que la gravité est plus grande en Laponie qu'à *Paris*, & à *Paris* qu'à *Quito*; mais cette inégalité n'est pas absolument celle qu'avoit trouvée

Différences qui résultent de la comparaison des dégrés.

Condamine, Imp. royale 1751, in-4°. Voyez aussi *Mém. de l'Acad. des Sciences* 1746.

(1) Dom George Juan, Commandeur de l'Ordre de Malthe, & Dom Antoine de Ulloa; alors Lieutenant de vaisseaux de S. M. C., aujourd'hui l'un Chef d'Escadre, Commandant des Gardes de la Marine, & Ambassadeur à Maroc, l'autre Gouverneur de la Louisiane.

(2) Voyez tous ces différens rapports dans la *Mesure des trois premiers dégrés du Méridien* de M. *de la Condamine*, pag. 258 & suiv. ou *Mém. de l'Acad. roy. des Sciences* pour 1746, pag. 686 & 687.

Newton; ni celle qu'une ellipse déterminée par tels qu'on voudra de ces dégrés, pris deux à deux, semble requérir pour conserver l'équilibre.

Efforts que l'on fait pour les concilier.

44. Ainsi dans le tems même où l'on croyoit la question décidée par les nouvelles mesures, & que la figure de la Terre & la quantité de son applatissement paroissoient déterminés avec le plus de précision, on se trouva replongé dans de nouvelles incertitudes. M. *Bouguer* combina les trois dégrés mesurés, l'un en Amérique, l'autre en France, le troisieme en Laponie; & après les avoir comparés entre eux, & avec un dégré du parallele mesuré en dernier lieu par MM. de l'Académie royale des Sciences (1), il trouva qu'ils pouvoient tous se concilier avec une sorte de régularité dans le méridien, en supposant que les dégrés du méridien qui croissent de l'équateur au pôle, selon la loi de la gravité newtonienne, pour une Terre homogêne, en raison des quarrés des sinus de latitude, pour parler le langage des Mathématiciens, augmentassent dans la nouvelle figure imaginée par M. *Bouguer*, en raison des quarrés-quarrés de ces sinus. Mais cette figure même ne peut se concilier avec les autres dégrés mesurés en France par M. *Cassini*; d'ailleurs nous n'avons point de théorie qui exige cette courbure plutôt qu'une autre: enfin puisqu'après avoir mesuré deux dégrés, & les avoir fait convenir avec une ellipse, déja déduite elle-même d'une théorie qui explique parfaitement tant de phénomenes célestes, il s'en est trouvé un troisieme qui ne pouvoit compatir avec cette ellipse, il y avoit tout lieu de craindre que si l'on en mesuroit quelque part un quatrieme, il ne s'accordât pas mieux avec l'hypothese de M. *Bouguer*, & ne dérangeât la loi qui concilie les trois autres (2). M. *Clairaut*, associé à M. *de Maupertuis* dans l'expédition du nord, ayant approfondi la théorie de l'équilibre (3), conclut qu'il falloit

(1) Le dégré du parallele entre le 43[e]. & le 44[e]. dégré de latitude, mesuré en 1740 par MM. *Cassini de Thury* & *de la Caille*. Voy. *Méridienne de Paris vérifiée*, pag. 105 & 106.

(2) C'est ce qui est arrivé par la mesure d'un dégré en Afrique.

(3) Cet ouvrage de M. *Clairaut* a paru en 1743, in-8°. un ou deux

recourir

recourir à une différence de denſité dans les différentes couches de la Terre, qu'il fait néanmoins varier ſuivant une certaine loi, en approchant du centre. Il a concilié très élégamment cette variation avec la figure de la Terre & la différence de la gravité; & il a cru qu'au moyen de cette loi, qui n'eſt contredite par aucun phénomene, on pouvoit rendre raiſon de la grandeur de certains dégrés, & de la longueur des pendules à différentes latitudes.

Sentiment de l'Auteur ſur l'irrégularité de tiſſure des parties de la Terre.

45. Pour moi, après avoir lu l'ouvrage de M. *de Maupertuis*, qui parut le premier, & réfléchi ſur les méthodes d'obſerver, & ſur tout ce qui a rapport à cette matiere, il me vint une penſée que je n'ai pu depuis m'ôter de l'eſprit, ſavoir, que l'anomalie des dégrés & des pendules iſochrones, venoit en grande partie d'une tiſſure inégale & irréguliere des parties internes de la Terre, telle que ſi cette inégalité avoit lieu proche la ſuperficie, elle dérangeroit la proportion des dégrés; que ſi elle étoit enfoncée plus avant, elle altéreroit la figure même de la Terre; j'entends cette figure qu'elle auroit ſi on retranchoit toutes les inégalités extérieures qui ſont à ſa ſurface. Je propoſai pluſieurs réflexions à ce ſujet, dans une Diſſertation ſur la figure de la Terre, qui parut dès l'an 1738; d'autres en l'année 1741, dans une Diſſertation ſur la différence de la gravité dans les différentes parties de la Terre; d'autres enfin dans une Diſſertation ſur les obſervations aſtronomiques, publiée en 1742; & ſi ma conjecture eſt vraie, il n'y a plus lieu de s'étonner que la différence, tant des dégrés de la Terre que de la gravité, ne ſuive exactement aucune proportion réguliere.

Cauſe de la déviation du fil à plomb dans les obſervations aſtronomiques.

46. Car pour ce qui eſt des inégalités voiſines de la ſurface, repréſentons-nous une Terre homogêne & preſque ſphérique, & mettons à ſa ſurface un autre globe homogêne à cette Terre; le fil à plomb ſera ſollicité, dans le ſyſtême de la gravitation univerſelle, par deux forces, dont l'une dirigera le plomb vers la maſſe de la Terre, l'autre vers ce globe qui eſt à ſa ſurface; & ces forces ſeront en

---

ans avant le retour des Académiciens de l'équateur, ſous le titre de *Théorie de la figure de la Terre.* Paris 1743.

raiſon du demi diametre de la Terre au demi diametre du globe (1). Ainſi cette ſeconde force détournera le fil à plomb de la direction qu'il auroit ſans le globe ; & j'ai démontré par un calcul fort ſimple, que cette déviation du fil à plomb ſur un globe voiſin, étoit d'une minute pour un globe d'un mille de rayon, & par conſéquent de 15 ſecondes, ſi le rayon du globe eſt d'un quart de mille, (ou de 250 pas géométriques) ; & que ſi le globe eſt éloigné, cette aberration n'eſt point ſenſible, & peut être regardée comme nulle.

Grand dérangement dans la meſure des dégrés, cauſé par d'aſſez petits moles.

47. De-là une montagne, au pied de laquelle ſe feroit l'obſervation, & dont l'action ſeroit équivalente à celle d'un globe de 250 pas de rayon, feroit dévier de 15 ſecondes le fil à plomb dont on ſe ſert pour déterminer la diſtance des étoiles au zénith : & ſi une telle déviation ſe faiſoit en ſens contraire aux deux extrémités d'un dégré, l'erreur du dégré ſeroit d'une demi-minute, c'eſt-à-dire, de près de 500 toiſes : différence preſque égale à celle des dégrés meſurés au nord & à l'équateur (2), ou des dégrés juſqu'ici les plus inégaux. Que ſi l'on meſure un arc de pluſieurs dégrés, l'erreur ſe répartit ſur le nombre total, & devient d'autant moindre, qu'il y a plus de dégrés : mais elle eſt toujours bien

---

(1) En effet, ces forces ſont en raiſon directe des maſſes, & en raiſon inverſe des quarrés des diſtances. Soit donc le demi diametre de la Terre $= a$, celui du globe $= 1$; le rapport des maſſes ſera égal à $\frac{a^3}{1}$; & parceque ces globes agiſſent comme ſi toute leur maſſe étoit compénétrée au centre, la raiſon inverſe des quarrés des diſtances ſera $\frac{1}{aa}$. Donc la raiſon compoſée de la directe & de l'inverſe, ſera $\frac{a^3}{aa}$ ou $\frac{a}{1}$ c'eſt-à-dire, celle du demi diametre de la Terre au demi diametre du globe.

(2) Le dégré du méridien, voiſin de l'équateur, étant, ſuivant la meſure des Académiciens, d'environ 56750 toiſes, & celui qui coupe le cercle polaire, de 57438, la différence eſt de 688 toiſes, & ne ſera même que de 672, ſi on retranche 16 toiſes pour l'erreur qu'a cauſé la réfraction négligée par M. de Maupertuis dans cette évaluation du dégré. Voy. *Meſ. des trois premiers dég. du mérid.*

plus que suffisante, pour déranger toute progression réguliere, dans la différence des dégrés.

Qu'il y a & qu'il doit y avoir des inégalités voisines de la surface de la Terre, & capables d'action.

48. Or, on trouve souvent des montagnes plus grosses; & si elles ne cachent point de concavités, telles qu'il y en eut probablement dans *Chimboraço*, cette énorme montagne du Pérou, qui, suivant les observations de MM. *Bouguer* & *de la Condamine*, n'a produit qu'une déviation de 7 secondes (1); si, dis-je, elles sont assez compactes pour égaler la moyenne densité de la Terre, elles produiront des erreurs encore plus considérables. Mais ce que fait une montagne placée sur la surface de la Terre, une différence de densité dans les parties qui sont au-dessous de la surface, d'un côté ou d'autre, peut également le produire; de même qu'une grande cavité souterraine qui se trouveroit voisine du lieu de l'observation. Il est vrai que ces erreurs diminuent dans le cas où la densité seroit plus grande vers le centre qu'à la surface; mais elles augmentent aussi dans le cas où la densité seroit plus petite, & beaucoup plus encore si la Terre ressembloit plus à une croute, ou à une coque vuide, qu'à un globe solide.

La réponse de M. de Maupertuis à cette objection, est insuffisante.

49. Maintenant, puisqu'il y a tant d'inégalités sur la surface de la Terre, & que de si petites différences produisent de si grandes déviations dans le fil à plomb, n'est-il pas naturel de penser qu'il y a de semblables inégalités répandues dans l'intérieur de la Terre, & capables du moins d'occasionner une déviation de quelques secondes? N'est-il pas visible au moins qu'on peut, qu'on doit même les soupçonner à juste titre? M. *de Maupertuis* fait mention dans ses élémens de Géographie, composés en 1740, qu'on lui objecte la déviation causée par les montagnes, (& je sais que ma Dissertation étoit dès-lors entre ses mains,) & il répond qu'on n'a pas coutume de faire des observations astronomiques au pied d'une montagne de cette hauteur, & capable de produire un si grand effet: mais cette réponse ne satisfait point à l'objection tirée tant de l'irrégularité de tissure dans les parties qui

(1) Voyez *Fig. de la Terre* de M. Bouguer.

ſont au-deſſous de la ſurface, que des concavités profondes : circonſtances que je n'avois pas omiſes dans mon objection. Or, il n'en eſt pas de ces inégalités ſouterraines comme de celles des montagnes : un Obſervateur ne les voit point, ne les connoît point; comment les éviteroit-il? A l'égard de la conſtitution des parties internes, on pourroit peut-être haſarder quelques conjectures; mais ſans qu'on puiſſe eſpérer d'en avoir jamais de connoiſſance certaine.

Effet des inégalités intérieures de la Terre.

50. Que ſeroit-ce ſi ce noyau ſolide de la Terre que les mers environnent, avoit dans ſa plus grande profondeur des inégalités plus grandes encore, & tout à fait irrégulieres? Cette ſeule raiſon ne ſuffiroit-elle pas, ſuivant les loix de l'équilibre, pour que les mers fuſſent alors plus renflées en certains endroits, en d'autres plus applaties; enſorte que la différence des dégrés ne ſuivît point, ou du moins que de fort loin, une progreſſion réguliere? Car l'hypotheſe d'où l'on part pour trouver par l'équilibre la figure de la Terre, & qui conſiſte à ſuppoſer que le globe n'étoit d'abord qu'un fluide, & qu'il s'eſt durci en partie, après avoir trouvé l'équilibre ; cette hypotheſe, dis-je, n'eſt appuyée ſur aucune preuve, pas même ſur la plus légere conjecture: & quoique le ſentiment qui ſuppoſe la Terre compacte au point que demande l'équilibre, (ce que des Architectes un peu inſtruits obſervent d'ordinaire dans la conſtruction des voutes,) ne manque pas abſolument de vraiſemblance, s'il eſt queſtion d'une grande différence à l'état que demande l'équilibre; il n'en a plus aucune, lorſqu'il ne s'agit que d'une petite différence : car dans ces voutes mêmes, les plus habiles Architectes ſe mettent peu en peine d'avoir un équilibre parfait, perſuadés que la cohéſion des parties peut y ſuppléer : c'eſt ainſi que nous voyons pluſieurs maſſes de montagnes & d'iſles ſe ſoutenir ſans apparence d'équilibre par leur propre ſolidité : pourquoi ne pourroit-il pas arriver quelque choſe de ſemblable dans l'intérieur de la Terre, de ſorte que le centre de figure ne concourût point avec celui de la maſſe & de la gravité, autour duquel les parties ſont en équilibre; ou que la denſité fût fort inégale, à égales diſtances du centre en tout ſens, & qu'il y eût de grandes cavités ſemées ſans ordre ſur toute l'étendue de la maſſe?

Soupçon de MM. de *Maupertuis* & *de la Condamine* sur cette irrégularité de tissure.

51. M. *de Maupertuis* lui-même, ayant pesé avec plus de soin toutes ces raisons, en sentit sans doute toute la force; & dans la Lettre qu'il publia quelques années après sur le progrès des sciences, (en 1752) il fait si peu de fond sur sa mesure du dégré, & sur toutes les autres, qu'il assure même qu'il est à craindre que les deux hémispheres, quoiqu'appuyés sur la même base, ne se ressemblent point pour la figure (1); & M. *de la Condamine*, après avoir rendu compte de la mesure des dégrés, qu'il a déterminée conjointement avec M. *Bouguer*, traite avec élégance, quoiqu'assez en détail, des effets que peuvent produire ces inégalités & ces irrégularités de tissure (2).

Preuves d'analogie.

52. L'analogie ou le procédé ordinaire de la nature, peut déja nous faire soupçonner plutôt quelque irrégularité, qu'une loi fixe & constante dans la figure de la Terre. Que d'inégalités dans ses autres productions, dans les feuilles d'arbres, les fruits, les concrétions des mines de sel, les membres des animaux! Il y en a jusques dans le mouvement des astres; & celles-ci, pour être moins sensibles, n'en sont pas moins réelles, & n'en ont pas moins donné la torture aux Astronomes, sur-tout quand il a été question de déterminer le cours de la Lune, de Jupiter & de Saturne. Certainement s'il est permis de raisonner ici par analogie, nous conclurons plutôt pour la figure irréguliere, que pour une courbure uniforme. Le préjugé de régularité & de simplicité, est une source d'erreurs, qui n'a que trop souvent infecté la philosophie. On a cru pendant plusieurs siecles, que les astres avoient un mouvement circulaire & uniforme; que la Terre étoit exactement sphérique, & cent choses de cette espece, au grand préjudice du progrès des sciences; & ces préjugés sont cause qu'on a si long-temps négligé de faire les observations les plus propres à décider la question.

53. Ceci m'a conduit à une autre réflexion. On regardoit autrefois la Terre comme sphérique, & sa courbure étoit

---

(1) Pag. 73 & 74.

(2) Voy. *Mesure des trois premiers dégrés du méridien*, Imp. royale 1751, Art. 30 & 31.

Doute de l'Auteur, si les paralleles sont exactement circulaires.

censée circulaire en tout sens. Deux mesures actuelles de dégrés du méridien à différentes distances de l'équateur, ont prouvé que les méridiens ne sont pas des cercles, & que la Terre n'a pas, d'un pôle à l'autre, la figure circulaire. Une troisieme mesure ne laisse pas même aux méridiens la figure elliptique que la théorie leur avoit conservée, quelle que soit la cause inconnue jusqu'ici de cette différence; mais on croit encore la courbure circulaire autour du pôle, c'est-à-dire, qu'on prend les paralleles pour des cercles; comme si la Terre, sans être sphérique, étoit à cela près comme faite au tour, & de la figure d'un œuf ou d'un oignon, en un mot, un solide de circonvolution, engendré par la révolution d'un méridien autour de l'axe. C'est pour cela que quoique les dégrés dont on a la mesure, aient été pris sur des méridiens fort différens, & placés à de très grandes distances les uns des autres, néanmoins lorsqu'il est question d'en conclure la figure de la Terre, on les regarde tous comme si c'étoient les dégrés d'un même méridien: on n'a point encore examiné si la courbure ne s'écarteroit pas aussi en ce sens de la circulaire. Il faut, si les paralleles sont des cercles, qu'à égales distances de l'équateur tous les dégrés soient égaux; & au contraire, qu'ils soient inégaux, si les paralleles ne sont pas circulaires. Pourquoi donc ne pas mesurer à peu près par la même latitude, ou sous le même parallele, & à différentes longitudes, deux dégrés du méridien, pour s'assurer s'ils sont réellement égaux? Car les Astronomes savent qu'il est beaucoup plus difficile d'avoir une mesure exacte des dégrés des paralleles que de ceux des méridiens. Celui qui exécuteroit avec succès la mesure de quelque dégré d'un parallele, ne feroit pas seulement une chose nouvelle, mais une chose utile & nécessaire (1).

54. Il y avoit plusieurs années que je m'occupois de ces

---

(1) Il y a eu deux dégrés de longitude mesurés en Provence en 1740. Voy. *Méridienne de Paris vérifiée*, pag. 99 & suiv. Voy. aussi *Mémoires de l'Acad. royale des Sciences* 1735, pag. 1 & suiv. Voy. enfin la Note pag. 39 du *Journal historique du voyage à l'équateur* par M. de la Condamine, & l'extrait de son *Voyage d'Italie*, Mém. de l'Acad. des Sciences de 1757, pag. 398.

différentes idées, lorſque m'entretenant un jour avec M. le Cardinal *Valenti*, Miniſtre de Sa Sainteté le Pape Benoît XIV, lequel ayant conſervé le goût des Lettres & des Sciences, qu'il a cultivées dans ſa jeuneſſe, aime à ſe délaſſer de ſes importantes occupations par des converſations ſavantes; je fis tomber le diſcours ſur cette matiere. Sa pénétration lui fit, à la premiere ouverture, ſentir le prix d'une telle recherche: il me demanda s'il y avoit moyen d'exécuter une pareille entrepriſe dans les Etats du Pape: ma réponſe fut que les Etats de S. S. s'étendoient depuis *Rome* vers le nord, au-delà de deux dégrés; que dans cet intervalle il y avoit des montagnes qui ſe voyoient les unes des autres, des plaines & des plages unies, aiſées à meſurer à la perche, ce qui ſembloit promettre un heureux ſuccès; que la partie ſeptentrionale de ce trajet étoit ſous le même parallele que la partie méridionale de France, où paſſe le méridien de *Paris*, & à une aſſez grande diſtance vers l'orient, pour qu'on pût comparer utilement le dégré du méridien de Rome à celui du méridien de Paris, par la même latitude.

Projet d'une nouvelle meſure de dégrés en Italie.

55. Son Eminence ayant fait ce rapport à Sa Sainteté, dont on connoît le goût pour toute ſorte de littérature, me chargea par ſon ordre de décrire géométriquement la méridienne de *Rome*, juſqu'à l'extrémité ſeptentrionale de l'Etat eccléſiaſtique, & de déterminer la valeur du dégré du méridien. Nous avions alors à *Rome* le P. Chriſtophe *Maire*, Jéſuite Anglois, excellent Littérateur, mais ſurtout cultivant par goût l'Aſtronomie & la Géographie, & d'ailleurs d'une ſanté capable de ſupporter les fatigues du voyage. Je n'eus pas de peine à obtenir de M. le Cardinal *Valenti* de nous aſſocier le P. Maire & moi pour un ouvrage que deux Obſervateurs peuvent exécuter avec plus de facilité & d'exactitude qu'un ſeul. Le P. *Maire*, de ſon côté, conſentit à tout, & ouvrit un avis important ſur la réformation de la Carte géographique. Il obſerva que puiſqu'il nous falloit tranſporter un grand quart de cercle ſur de hautes montagnes, pour déterminer la direction de la méridienne, & la meſure du dégré par la poſition de nos ſignaux, nous pourrions en même tems relever pluſieurs autres points, & parcourir enſuite avec un petit quart de

Projet pour la réformation de la Carte géographique.

cercle tout l'Etat eccléſiaſtique, déterminer la longitude & la latitude des Villes, & autres lieux principaux, & corriger la Carte qui fourmilloit d'erreurs; qu'il n'y avoit point de particulier qui ne voulût avoir la topographie de ſes terres, & qu'il étoit bien plus important à un Souverain d'avoir une deſcription exacte des Pays ſoumis à ſa domination.

56. L'avis fut adopté ſans délai, & nous reçumes au mois de Juillet 1750 des ordres relatifs à ce double objet du voyage, dont je donne un récit abrégé dans le Chapitre ſuivant. Ce que j'ai dit ſuffit pour faire connoître le projet, l'objet & le double but de notre entrepriſe, que j'expoſe dans le titre même de cet ouvrage; l'un, de déterminer la courbure de la Terre dans les Etats du Pape, en la tirant de la meſure même des dégrés; l'autre, de réformer la Carte géographique. Nous avons meſuré un intervalle d'un peu plus de deux dégrés, d'où nous avons conclu la valeur du dégré moyen, & déterminé la courbure de la ſurface de la Terre pour cette contrée. La détermination de cette courbure ſert à la recherche de la figure totale de la Terre; mais la meſure d'un dégré ne donne la courbure que pour le lieu où s'eſt faite la meſure. Il faut enſuite comparer cette courbure à celle qu'on a trouvée ailleurs, pour en tirer les conſéquences ſur la figure & la grandeur de la Terre.

Le dégré du méridien reconnu plus petit, prouve que les paralleles ne ſont pas circulaires.

57. Or, nous avons trouvé par nos meſures une courbure beaucoup plus forte (1) que celle du dégré méridional de France, meſuré par MM. de l'Académie royale des Sciences, & preſque par la même latitude; car à 43 dégrés de latitude, nous avons trouvé le dégré de 56979 toiſes (2), tandis que MM. *Caſſini de Thury* & *de la Caille* l'ont trouvé de 57048 par 43 dégrés & demi, ce qui ſemble prouver que les paralleles mêmes ne ſont pas exempts d'irrégularités & d'inégalités,

(1) Il y a dans le texte *multò minor*; mais c'eſt évidemment une faute d'impreſſion, puiſque la courbure eſt d'autant plus forte, que le dégré eſt plus petit, voyez nº. 33, & que le dégré d'Italie, de 56979 toiſes, s'eſt trouvé plus petit de près de 80 toiſes que le dégré méridional de France de 57048 toiſes, comme l'Auteur l'expoſe deux lignes plus bas.

(2) Il faut ôter 4 toiſes, ſuivant la Note du nº. 75, Liv. 1.

comme

comme je m'en étois douté dès le commencement Du reste, quoique notre dégré soit beaucoup plus petit que celui que M. *Cassini* a mesuré dans la partie méridionale de France, il est encore de 18 toises plus grand qu'il ne devroit être, suivant la théorie de M. *Bouguer*, qui donne pour cette latitude 56961 toises.

58. Tandis que nous mesurions un dégré en Italie, M. *de la Caille*, Académicien de *Paris*, qui avoit été envoyé au Cap de *Bonne-Espérance* pour faire des observations astronomiques dans l'hémisphere austral, ayant rencontré un terrein propre à mesurer un dégré par la latitude de 33. d. 18 m. & demie, trouva ce dégré de 57037 toises, c'est-à-dire, plus grand que le nôtre, au lieu qu'il auroit du être beaucoup plus petit: il ne s'accorde guere mieux avec le dégré méridional de France, auquel il est presque égal; & il surpasse de près de 200 toises celui que M. *Bouguer* déduit de sa théorie pour cette latitude. Ainsi il paroît non seulement que les paralleles s'écartent de la figure circulaire, mais que suivant la conjecture de M. *de Maupertuis*, dans cette Lettre sur le progrès des sciences (n°. 51. L. I.), les deux hémispheres ne se ressemblent point.

La mesure de M. *de la Caille* en Afrique, donne une plus grande inégalité dans la figure de la Terre:

59. Je ne voudrois pas cependant en conclure ce que M. *de Maupertuis* semble vouloir faire entendre au même endroit, & ce que la plupart concluront d'une différence beaucoup plus considérable, trouvée depuis par M. *de la Caille*; savoir, qu'il faut renoncer à l'espérance de pouvoir déterminer la figure de la Terre par la mesure des dégrés, & qu'il vaut mieux avoir recours aux parallaxes de la Lune, proposées autrefois par M. *Manfredi* à l'Académie royale des Sciences, comme un moyen très propre à ces sortes de recherches; & que M. *de Maupertuis*, par une méthode aussi élégante qu'exacte, a appliqué à la détermination de la figure de la Terre (1).

Ce qui ne doit pas faire abandonner cette méthode.

60. Cette méthode même dépend presque entierement des mouvemens de la Lune; & je doute que les mouvemens de

(1) Voyez *Parallaxe de la Lune*, Œuvres de M. de Maupertuis.

Méthode pour déterminer la figure de la Terre par les parallaxes de la Lune.

la Lune puissent être assez exactement connus, soit par la théorie, soit par les observations, pour qu'il n'y ait pas quelques erreurs à craindre dans la méthode, qui seroit d'ailleurs très utile, si l'on pouvoit une fois être bien assuré de toutes les anomalies de la Lune, & répondre de quelques secondes dans une observation.

Qu'il faut mesurer plusieurs dégrés, même voisins les uns des autres ;

61. Quant à la mesure des dégrés, on doit bien plutôt s'efforcer d'entretenir l'émulation parmi les Astronomes, & d'exciter la magnificence des Souverains, pour multiplier ces mesures en différens endroits de la Terre : ce qui seroit, à mon avis, très utile pour en déterminer la figure ; car puisque les différences produites par les inégalités de tissure & de densité, soit immédiatement au-dessus de sa surface, comme les montagnes & les collines, soit au-dessous de sa superficie, ne suivent point elles-mêmes une progression réguliere ; elles feront paroître nécessairement les dégrés en certains endroits trop longs, en d'autres, trop courts. Donc prenant un milieu entre la plupart des dégrés qui se touchent, comme cela se pratique dans toutes les observations astronomiques, les erreurs se corrigeront réciproquement ; & comparant ensuite ces dégrés moyens, on s'assure de la courbure en plusieurs lieux éloignés les uns des autres, & par-là même de la configuration de la surface de la Terre dans ces mêmes lieux : ce qui est déja un grand avantage. Si de plus on trouve quelque loi qui représente toutes ces courbures de la surface, on en pourra déduire la constitution des parties intérieures. Ce n'est que par la multiplicité des observations qu'on peut parvenir à perfectionner toute la Physique, particulierement l'Astronomie & la Géographie.

Que l'irrégularité de tissure est presque tout au-dessus de la surface ;

62. Or je croirois volontiers, & ce soupçon n'est pas appuyé sur une légere conjecture, que toute l'inégalité & l'irrégularité se trouve, non dans l'intérieur le plus profond, ou fort avant dans la Terre, mais proche de la surface, & qu'elle vient surtout des parties qui s'élevent au-dessus de cette surface même, auprès de laquelle il arrive souvent des changemens considérables. Car on peut démontrer aisément que les inégalités de densité, voisines de la surface, produisent de grandes différences dans la mesure des dégrés, tandis qu'elles

n'en produisent que de très petites dans la longueur du pendule à secondes, dont on se sert pour mesurer la gravité; comme au contraire, que des inégalités, placées à une grande profondeur, lesquelles, pour agir avec la même force, doivent être beaucoup plus considérables, dérangent notablement le pendule, & fort peu le dégré. En effet, une montagne, au pied de laquelle se feroit l'observation, & qui équivaudroit à une sphere de 250 pas de diametre, ou un quart de mille, produiroit, comme nous l'avons dit, une déviation d'environ 15 secondes dans le fil à plomb, & le double de cette déviation entraîneroit une erreur de près de 500 toises dans la mesure d'un dégré. Or, cette même montagne attirant obliquement, & toujours avec une force égale le pendule à secondes, elle n'apportera dans son mouvement, ni par conséquent dans sa longueur, aucune différence sensible. Mais si pareille masse étoit placée au-dessous de la superficie de la Terre, ensorte qu'elle augmentât directement la gravité, elle ne causeroit dans le fil à plomb aucune déviation sensible; mais elle augmenteroit la longueur du pendule à secondes d'environ un quart de ligne: ce qui fait une différence considérable. Que si la masse supposée étoit enfoncée fort avant dans la Terre, en la supposant même placée de côté, elle n'attireroit qu'obliquement le fil à plomb, & parlà même ne le feroit que très peu dévier; mais elle ne laisseroit pas d'agir avec le reste de la masse terrestre sur le pendule à secondes qu'elle feroit allonger (1) à proportion qu'elle augmenteroit la force de son poids. Cependant, comme nous l'avons déja remarqué, pour le cas d'une grande profondeur, ou d'une grande distance, il faut une masse beaucoup plus considérable pour produire ces deux effets.

63. Maintenant si nous comparons entre elles les longueurs observées du pendule, nous trouverons qu'elles s'écartent beaucoup moins de la loi qu'elles doivent suivre de l'équateur au pôle suivant la théorie, que les dégrés dont nous

Que la mesure des dégrés est fort troublée par-là; que celle de la gravité en est peu altérée.

(1) Pour savoir pourquoi on est obligé, quand la gravité est moindre, de raccourcir le pendule à secondes, & de l'allonger quand elle est plus grande, il suffit de se rappeller ce qui a été dit n°. 11 & 12 de ce Ier Liv.

avons la mesure : ce qui semble indiquer que les inégalités, voisines de la surface de la Terre, font dévier de quelques secondes le fil à plomb ; mais qu'elles n'augmentent ni ne diminuent sensiblement la gravité, ou ne l'alterent que suivant une loi constante.

La mesure des dégrés de France & des nôtres, s'accorde avec cette conjecture.

64. C'est ce qu'on peut encore conclure vraisemblablement de la comparaison de notre dégré avec ceux de France. Nos observations astronomiques ont été faites à *Rome* & à *Rimini* ; & outre que l'*Apennin* se trouve entre deux, le sol s'éleve tout à coup : ce qui doit produire une déviation dans le fil à plomb, & augmenter l'amplitude de l'arc céleste, compris entre le zénith de ces deux Villes, & par-là même donner aux dégrés de cet arc un moindre nombre de toises. Les pyrénées peuvent avoir produit en France un effet tout contraire ; car leur position tendoit à diminuer l'amplitude de l'arc observé : ce qui a pu allonger le dégré méridional. D'autres causes de cette nature ont répandu quelques anomalies sur les autres dégrés de France : il ne faudroit cependant pas leur faire, non plus qu'au nôtre, ni à ceux du Pérou & de Laponie, beaucoup de violence, pour les plier à une loi uniforme & réguliere ; il suffiroit de faire un petit changement aux dégrés de France, surtout en diminuant un peu les plus méridionaux, & en augmentant un peu la longueur du nôtre.

Utilité de ces expéditions.

65. Tout ceci ne peut être bien éclairci que par des observations multipliées en diverses contrées de la Terre : ce qui fait voir l'utilité, la nécessité même de ces sortes de mesures pour le progrès de l'Astronomie, de la Géographie, & de toute la Physique (1).

(1) Le P. *Boscovich* a supplié l'Impératrice Reine de donner des ordres pour mesurer des dégrés dans la Moravie, l'Autriche & la Stirie, pays remplis de montagnes, & dans les plaines de Hongrie. Il a prié aussi le Roi de Sardaigne d'en faire mesurer un dans le Piémont, où le plat pays se trouve entre l'Apennin & les Alpes, tout au contraire de ce qui se voit dans son propre dégré, où l'Apennin est entre deux plaines. Enfin dans son voyage en Angleterre, il a représenté à la Société Royale l'avantage qu'il y auroit de faire mesurer un dégré en Amérique, avec d'autant plus à raison, que depuis que l'Astronomie est perfectionnée, l'Angleterre n'avoit rien fait pour connoître la figure de la Terre. Toutes

CHAPITRE II.

Relation historique du Voyage : utilité qu'on en a retirée.

66. CE fut au commencement de Juillet 1750 que nous reçumes des ordres relatifs à notre voyage ; & notre premier soin fut dès-lors de préparer les instrumens nécessaires à la mesure du dégré : c'étoit le premier objet de notre commission, & je dois en rendre compte. Quant à la correction de la Carte, elle ne demandoit pas de grands préparatifs ; un petit quart de cercle pouvoit suffire, du moment surtout qu'avec un instrument d'un plus grand rayon, nous aurions déterminé la direction de notre méridienne, & la position de nos principales stations. Le P. *Maire* avoit un petit quart de cercle d'un pied de rayon, qui pouvoit se transporter sans peine d'un lieu à un autre, & qui étoit tellement construit, & déja vérifié par un si grand nombre d'observations, qu'avec une attention médiocre nous n'avions pas même à craindre une minute d'erreur. Cet instrument nous a été d'un grand usage pour déterminer la position des lieux divers qui devoient entrer dans la Carte géographique.

1750. Juillet.

Préparation des instrumens pour la mesure des dégrés & la Carte ;

67. La direction de la méridienne & la détermination du dégré demandoient plus d'appareil. L'une & l'autre opération exigeoit des mesures géodésiques, & des observations astronomiques d'une grande délicatesse. A l'égard des mesures géodésiques, il nous falloit une base rectiligne de plusieurs milles, & actuellement mesurée dans un terrein uni. Pour cela il

La mesure en exige de plus grands.

---

ces demandes du P. *Boscovich* ont eu un heureux succès. On voit déja dans le cinquante-huitieme volume des Transactions philosophiques, années 1768, page 327, la mesure du dégré du Piémont, faite par le célebre P. *Beccaria*; celle du premier dégré du P. *Liesganig*; celle du dégré de Pensilvanie, faite par MM. *Masson & Dixon :* le P. *Liesganig* mesure actuellement son second dégré en Hongrie. Quand on aura le détail des mesures des PP. *Liesganig & Beccaria*, on verra avec la derniere évidence l'action des montagnes sur le fil à plomb Le lecteur judicieux sentira les obligations que l'on a au P. *Boscovich*, d'avoir sollicité ces mesures.

eſt néceſſaire d'avoir une meſure fixe, dont le rapport avec les meſures qui ont ſervi dans les autres opérations de cette eſpece, par exemple, avec la toiſe de *Paris*, ſoit ſûrement & exactement connu. De plus, on doit avoir de longues perches ou regles ſolides, exactement rapportées à cette meſure, avec quelques autres uſtenſiles propres à donner aux perches une poſition convenable, ſurtout un niveau, des trépieds ou ſupports, dont nous aurons encore occaſion de parler.

Grand quart de cercle pour les grands triangles. Signaux ſur les montagnes.

68. Il nous falloit encore pour nos meſures géodéſiques un quart de cercle d'un aſſez grand rayon, tel, que nous puſſions répondre, à quelques ſecondes près, de la meſure des angles d'une ſuite ou chaîne de grands triangles, qui doit s'étendre d'une extrémité de la méridienne à l'autre, & à peu près dans la même direction: & pour connoître plus exactement cette direction, il eſt néceſſaire de comparer un des côtés du polygone formé par cette ſuite de triangles, avec le Soleil levant ou couchant. Outre cela, comme on place ordinairement ſes ſtations ſur de hautes montagnes, on doit déterminer auſſi avec une exactitude ſuffiſante, les hauteurs & les abaiſſemens reſpectifs des ſignaux: (autant d'opérations auxquelles un petit quart de cercle ne pourroit ſuffire). Enfin les ſignaux qu'on place dans chaque ſtation, doivent être tels, qu'on puiſſe les appercevoir à une très grande diſtance, & pointer ſur eux des ſtations voiſines, comme étant les points où ſe terminent les triangles.

Obſervations aſtronomiques pour l'arc céleſte compris entre les deux extrémités de la méridienne.

69. Tout ceci eſt néceſſaire pour déterminer avec préciſion la direction de la méridienne, réduire les diſtances des ſignaux à un même niveau, ou à une ſurface parallele à la Terre, & avoir ſur cette ſurface la longueur de l'arc terreſtre du méridien, intercepté par les paralleles des lieux choiſis pour faire les obſervations aſtronomiques, aux deux extrémités de cet arc, & déterminer par ces obſervations l'amplitude de l'arc céleſte correſpondant, ou le nombre de dégrés & de minutes contenu dans l'arc terreſtre: ce qui ſe fait en obſervant de part & d'autre la diſtance d'une étoile au zénith dans le moment de ſon paſſage au méridien; d'où l'on tire, comme nous l'avons déja inſinué, en dégrés & minutes la

distance d'un zénith à l'autre. Car on voit que pour avoir le nombre de toises qui convient à un dégré moyen, il suffit de connoître, d'une part, le nombre de toises contenues dans l'arc terrestre mesuré, & de l'autre, le nombre de dégrés & de minutes que comprend le même arc.

70. Or, la détermination de la distance d'une étoile au zénith, est ici une opération si délicate, qu'on doit absolument y éviter jusqu'à l'erreur d'une, ou au plus de deux secondes. Car si l'on ne mesure qu'un dégré, chaque seconde d'erreur en entraîne une de seize toises. Cependant si l'on mesure un arc de plusieurs dégrés, l'erreur se partage, & devient d'autant moindre, que le nombre de dégrés mesurés est plus grand. Mais la nature des lieux, comme dans le cas où nous nous trouvions (bornés par la mer), ne permet pas toujours de mesurer un arc d'un grand nombre de dégrés; & il n'est pas même à propos d'en renfermer un si grand nombre dans la mesure, de crainte qu'une trop grande distance de l'étoile au zénith ne soit une nouvelle source d'erreur par l'incertitude de la réfraction. Ainsi on ne doit rien oublier pour rendre les observations astronomiques les plus exactes qu'il sera possible, & y éviter l'erreur d'une, ou au moins de deux secondes.

Elles doivent être exactes à une ou deux secondes près.

71. Il est donc évident que dans ces sortes d'opérations, on doit se servir d'un instrument d'un rayon beaucoup plus grand que les quarts de cercle ordinaires, & susceptible d'une bien plus grande précision. Du reste, comme on ne l'emploie communément qu'à mesurer un assez petit arc du méridien, on se contente de tracer sur l'instrument un arc de quelques dégrés; ce qui lui fait donner le nom de secteur. Or, on peut, au lieu d'un arc, n'y tracer qu'une ligne droite, ainsi que je l'ai fait; auquel cas il tient plus de la figure d'une croix, ou d'un triangle isocele, que de celle d'un secteur; cependant comme il est employé au même usage qu'un secteur pour mesurer de petits angles, nous lui en conserverons le nom.

Nécessité d'employer un secteur de peu de dégrés & d'un grand rayon.

72. Notre commission pour la mesure du dégré, embrassoit donc trois objets; 1°. la mesure d'une base; 2°. celle d'une suite de triangles formant un polygone; 3°. la distance de l'étoile au zénith à observer aux deux extrémités de la méri-

Trois sortes d'instrumens nécessaires.

dienne. Chacune de ces trois opérations exigeoit des instrumens particuliers ; nous devions commencer par nous en pourvoir.

Perches, supports, &c. Nécessité de faire venir une toise de *Paris*.

73. A l'égard de la mesure de la base, il n'étoit pas difficile de trouver ici des perches ou regles, un niveau, des trépieds, & autres choses semblables. Quant à la toise, nous ne pouvions nous dispenser d'en faire venir une de France, n'étant pas possible d'y suppléer par une mesure de six pieds, tirée du pied de *Paris*, nommé vulgairement pied-de-Roi, gravé sur les instrumens ordinaires, qui fait la sixieme partie de la toise. En effet, supposons que l'Artiste se fût trompé sur le pied, seulement de la dixieme partie d'une ligne, dont il y en a 12 dans le pouce & 144 dans le pied ; & l'on sait que le commun des Artistes commet des erreurs beaucoup plus considérables ; l'erreur du pied sera $\frac{1}{1440}$ de pied : donc celle du dégré, lequel est environ de 57000 toises, ou 342000 pieds, sera presque de 40 toises ; erreur trop excessive.

Mesure de la toise de *Paris*, demandée à M. *de Mairan* :

74. J'écrivis donc à M. de *Mairan*, illustre membre de l'Académie des Sciences de *Paris*, que cette Compagnie m'avoit elle-même désigné depuis quelques années pour correspondant, en m'accordant ce même titre ; & après lui avoir fait part des ordres que j'avois reçus de Sa Sainteté, je le priai de faire construire par un habile ouvrier une regle de fer sur laquelle fût gravée exactement une toise, & de me l'envoyer pour la mesure de ma base. M. le Cardinal *Valenti* qui n'oublioit rien pour faire réussir notre expédition, & à qui tout le succès en est du, écrivit en même temps à M. le Nonce à *Paris*, pour lui recommander de prendre soin de cette affaire, d'où dépendoit la certitude de notre mesure, & de faire transporter la toise à *Rome* le plus promptement qu'il se pourroit, dès qu'il l'auroit reçue des mains de M. *de Mairan*.

Précautions prises pour l'avoir exacte, & pour le transport.

75. Personne ne s'est plus étudié que M. de *Mairan* à fixer la vraie longueur de la toise : il avoit fait construire pour son usage une regle de fer, ajustée sur le même étalon que les deux qui ont servi aux Académiciens du Nord & du Pérou, les unes & les autres de la façon du sieur *Langlois*, fameux Artiste, qui conserve chez lui l'étalon de ces trois regles, dont un autre étalon étoit déposé chez M. de Mairan. Ce Savant eut

eut la bonté de m'en envoyer à *Rome* une de la même main, & étalonnée sur le même modele: elle étoit également gravée sur une regle de fer, avec des divisions en pieds, pouces, lignes & parties de lignes, exprimées par des transversales. Et afin qu'il ne me restât aucun doute sur la justesse de cette regle, M. *de Mairan* m'écrivit avec sa politesse & son exactitude ordinaire, qu'il l'avoit soigneusement comparée à la sienne, en se servant pour cela d'une loupe, & qu'il l'avoit réduite à une parfaite égalité (1).

On se sert en attendant d'une mesure de 9 palmes romains.

76. Elle partit de *Paris* d'assez bonne heure; mais comme elle venoit par mer, sur un bâtiment qui s'arrêta dans plusieurs ports, elle ne nous parvint à *Rome* que plusieurs mois après, & le tems pressoit de mesurer la base: d'ailleurs nous craignîmes, en la portant avec nous, de l'exposer aux accidens du voyage, & à l'humidité de l'air. Ainsi d'un commun consentement nous préparâmes une autre regle de fer, sur laquelle nous gravâmes deux points très fins, à l'intervalle de neuf palmes romains, pris sur l'étalon public, gravé sur la pierre, & conservé au Capitole, mais dont les divisions très grossierement gravées, ne donnent pas la longueur du palme avec assez de précision. Nous nous réservions de comparer dans la suite cette mesure à la toise de six pieds de *Paris*, pour connoître plus exactement le rapport du pied de roi au

(1) La toise de M. *de Mairan*, sur laquelle il a fixé celle des RR. PP. *Maire* & *Boscovich*, est plus petite de $\frac{8}{75}$ de ligne que celle qui a servi à mesurer le dégré du Pérou. Ainsi il faut ôter 7 toises du dégré d'Italie pour le comparer à celui qui a été mesuré sous l'équateur: de même il faut ôter 4 toises pour le comparer à celui du Nord, parceque la toise du Nord est plus petite de $\frac{1}{10}$ de ligne que celle du Pérou. (*Exposition du calcul astronomique par M.* de Lalande, p. 198. *Mém. de l'Acad. des Sciences* 1754, p. 178.) On ôtera aussi 4 toises pour le comparer à celui de France, mesuré par M. *Cassini*, puisque la toise dont M. *Cassini* s'est servi dans la méridienne vérifiée en 1740, ne différoit pas sensiblement de la toise du Nord employée à cette vérification; la mesure de l'ancienne base de M. *Picart*, de *Villejuifve* à *Juvisi*, vérifiée par les Commissaires de l'Académie en 1756 avec la toise du Nord, s'étant trouvée de 5748 toises 7 pouces $\frac{1}{2}$, la même à un demi pied près que l'avoient trouvée M. *Cassini* pere, & M. l'Abbé *de la Caille* en 1740. *Méridienne de Paris vérifiée*, pag. 56. *Mém. de l'Acad. des Sciences* 1754, pag. 182.

palme romain. Nous savions déja que neuf palmes devoient faire un peu plus de six pieds, ou d'une toise ; mais quelle que fût sa longueur, fût-elle même arbitraire, elle pouvoit également nous servir, pourvu que nous eussions un moyen certain de connoître assez exactement son rapport à la toise. Or, nous avons trouvé ce rapport par deux méthodes, que j'expliquerai en détail dans le quatrieme Livre : nous avons répété plusieurs fois cet examen toujours avec un succès égal, & un accord parfait, sans qu'il nous puisse rester aucun risque d'erreur qui influe d'une maniere sensible sur la mesure du dégré.

Perches tirées d'un vieux mât de navire.

77. Voilà pour ce qui concerne la mesure originale, à laquelle nous avons rapporté toutes nos mesures. Quant aux trois perches qui devoient contenir chacune trois de ces mesures, ou 27 palmes romains, je les ai tirées, tant à *Rome* qu'à *Rimini* (car nous avons mesuré deux bases sur le terrein, une dans le voisinage de chacune de ces deux Villes, comme je l'ai insinué dans le Chapitre premier), de deux vieilles pieces de bois qui avoient long-tems servi de mât de navire : précaution nécessaire pour qu'elles fussent moins exposées à changer de longueur par les variations de la température de l'air. Je ne dis rien ici, ni des supports à trois pieds, sur lesquels nous posions ces perches en mesurant nos bases, ni des lames de métal que nous y avons ajoutées, ni des moyens que nous avons employés pour mettre les perches de niveau, ni de la méthode dont nous nous sommes servis pour les comparer plusieurs fois le jour à notre regle de fer, & pour connoître leur allongement, leur raccourcissement, & la petite courbure qu'y produisoient l'humidité ou les alternatives de température de l'air : tout cela se trouve expliqué dans le quatrieme Livre, où je donne plus en détail la description & l'usage des instrumens.

Du secteur & du grand quart de cercle. Eloge de M. Wood Anglois,

78. Nous avions plus d'inquiétude au sujet du secteur & du grand quart de cercle, ne trouvant point à *Rome* d'ouvrier assez habile pour y travailler. Le célebre Artiste Dominique *Lusverg* n'étoit plus ; & il a été plus aisé d'hériter de ses biens que de son industrie. Personne n'eût été plus propre à nous consoler de sa perte, que M. *Wood*, Gentilhomme

Anglois, mon ami particulier, attaché à M. le Cardinal *Valenti*, & dont la mort prématurée vient de répandre le deuil dans toute la Ville; homme d'un esprit supérieur, dont le talent, l'adresse incroyable dans la construction des machines de tout genre & les plus compliquées, qu'il travailloit, qu'il finissoit de ses propres mains, l'égaloient aux plus habiles Maîtres de l'Europe: notre amitié me mettoit en droit de lui demander ces instrumens, & il n'auroit pu les refuser à M. le Cardinal; mais je le voyois occupé de soins plus importans; divers ouvrages commencés depuis long-tems, & qui ne pouvoient plus s'interrompre, épuisoient toute son attention.

79. Nous avions de plus à *Rome*, & nous y possédons encore M. *Rufo* Prêtre, natif de *Vérone*, habile dans les ouvrages d'optique, lunettes, télescopes, microscopes, & autres instrumens de Physique expérimentale, qu'il s'entend également à construire & à réparer. On lui avoit confié depuis peu le cabinet de méchanique du grand College *Romain* pour le mettre en ordre & l'augmenter de nouvelles machines; mais il n'avoit jamais travaillé de quart de cercle; il n'avoit jamais vu de secteur. Remplacé par M. Rufo de Vérone,

80. Cependant comme son talent & son adresse nous étoient connus; que nous pouvions d'ailleurs le visiter fréquemment, & conduire l'ouvrage de l'œil; qu'enfin il étoit le seul à qui on pût s'adresser, nous nous en rapportâmes à lui, & avec d'autant plus de raison, que je voulois faire construire un secteur d'une nouvelle invention, & à l'égard duquel tout Artiste devoit être novice: j'en donne une description fort détaillée dans le quatrieme Livre, ainsi que du quart de cercle dont le P. *Maire* a rendu la lunette fixe double (1): ce qui nous a été d'un grand secours, comme nous le verrons là même, surtout pour la vérification nécessaire dans le cas où l'on observe des hauteurs verticales, & pour faire cette vérification sans retourner l'instrument. M. *Rufo* a imaginé lui-même fort à propos plusieurs moyens pour faciliter l'usage du micrometre, & pour donner aisément au quart de cercle une position oblique Dirigé par le Pere Maire & l'Auteur.

(1) Voyez Liv. IV, n°. 179.

en tout ſens ; & après en avoir communiqué avec nous, il a également réuſſi dans l'exécution. J'y ai fait ajouter une piece qui me paroît fort propre à vérifier les diviſions du limbe, & qui, je crois, pourra être dans la ſuite d'un grand uſage aux Obſervateurs. Mais je renvoie tout ceci au quatrieme Livre, où nous aurons lieu d'en traiter plus au long & plus à ſa place. Au reſte, les ſoins de M. *Rufo* ont ſi bien réuſſi, que rien n'a manqué aux deux inſtrumens pour donner aux obſervations la plus grande exactitude : le ſeul micrometre de la lunette fixe du quart de cercle, n'ayant pas été à l'épreuve des accidens du voyage, s'eſt dérangé en chemin ; & faute d'ouvriers en état d'y faire les réparations néceſſaires, il n'a pu nous ſervir qu'à une partie des uſages auxquels il étoit deſtiné : nous avons ſuppléé aux autres, de la maniere que je dirai dans le quatrieme Livre.

Projet des opérations dans le cours de l'année.

81. Etant donc convenu de tout avec notre Artiſte, je comptois qu'il ne lui falloit que deux mois pour le quart de cercle, autant pour le ſecteur, & qu'ainſi nous aurions dans peu tout ce qui étoit néceſſaire pour la meſure du dégré. Dans cette ſuppoſition, nous devions avant l'hyver choiſir toutes nos ſtations, meſurer tous nos angles, & conduire la ſuite de nos triangles juſqu'à *Rimini*, où devoit aboutir la méridienne de *Rome* prolongée au nord, ſuivant les réſultats de M. *Manfredi*, tirés des obſervations géodéſiques de M. *Bianchini*, de diverſes conjectures, & de quelques obſervations aſtronomiques. De plus, nous devions choiſir aux environs de *Rimini* un terrein propre à une baſe, & la meſurer en attendant l'arrivée de notre ſecteur. Le ſecteur venu, nous devions faire à *Rimini* nos premieres obſervations aſtronomiques, retourner inceſſamment à *Rome* pour faire les correſpondantes, avec le moindre intervalle poſſible, à l'autre extrémité de la meridienne, y choiſir & y meſurer une baſe de vérification pour conſtater la meſure du dégré. Ainſi, je me flattois qu'au bout de quelques mois nous verrions la fin de nos opérations.

Retardemens ſurvenus.

82. Mais il y eut bien à rabattre de mes eſpérances. Notre Artiſte, occupé d'autres ſoins, nous fit attendre plus d'un an entier notre quart de cercle : la conſtruction du ſecteur fut la

matiere de nouveaux délais de plusieurs mois : ce qui ayant plusieurs fois dérangé tout le systême de nos voyages, & toute la suite de nos observations, nous a tenus deux ans & quelques mois en campagne. L'unique fruit que nous ayons retiré de ses lenteurs, a été de faire, en attendant, quelques excursions pour corriger la Carte, pour reconnoître la position des montagnes, & choisir à loisir toutes nos stations avant que de procéder à la mesure des angles : choix que nous avons fait beaucoup plus commodément que nous n'eussions pu le faire dans le cours même de nos opérations.

Choix des stations.

83. Nous partîmes donc de *Rome* le premier Octobre avec notre petit quart de cercle, pour reconnoître le terrein, suivant à peu près la direction de la méridienne; & étant entrés dans la Province de Sabine, nous arrivâmes à *Palombara*, petite Ville appartenant à la maison *Borghese*, située au pied d'une haute montagne nommée *Gennaro*, que nous avions vue de *Rome*, & qui dès-lors nous avoit paru fort propre à établir un poste (1). Sa cime, terminée en pointe, pouvoit être apperçue de très loin, & fournir un point fixe, sans qu'il fût presque besoin d'autre signal. Le côté de la montagne qui regarde *Rome*, s'éleve presqu'à pic au-dessus d'une vaste plaine qui se continue au sud-ouest au-delà de *Rome* jusqu'à la mer. La vue s'étend fort loin, d'un côté, dans la Toscane, de l'autre, dans le Royaume de Naples, dont une croupe de l'*Apennin* cache pourtant la partie la plus voisine.

1750. Octobre.

Départ de *Rome*.

84. Nous escaladons cette montagne le P. *Maire* & moi, accompagnés d'un homme de mérite, & d'un bon ami, M. *Tosio*; car pourquoi tairois-je le nom de ceux qui par pure amitié ont bien voulu nous accorder l'hospitalité, se donner la peine de nous suivre jusqu'au sommet des plus hautes montagnes, & joindre à nos observations un témoignage respectable (2) ? Nous vîmes dès-lors que nous pouvions passer le

Station du mont *Gennaro*.

(1) L'auteur remarque ici que bien qu'il écrive en latin, il se servira le plus souvent des noms vulgaires des lieux, surtout quand les noms latins seront inconnus ou fort douteux ; l'érudition nécessaire pour une plus ample recherche de ces noms, étant étrangere à cet ouvrage.

(2) Nous omettons ici & ailleurs quelques détails étrangers à l'objet

mont *Soracte*, quoique d'ailleurs fort propre aux observations, parceque nous découvrions plus loin une montagne qui occupe tout le terrein entre *Soriano* & *Viterbe*, & dont l'une des pointes conserve encore son ancien nom de *Cimini*. Cette montagne nous parut propre à terminer notre premier triangle, appuyé vers le sud au dome de la Basilique de Saint Pierre de *Rome*. Nous jugeâmes aussi qu'il seroit facile de trouver vers le nord, aux environs de *Terni*, une troisieme montagne, d'où l'on pût découvrir la pointe de *Cimini*, de *Soriano*, & le mont *Gennaro*, & qui pût terminer notre second triangle.

Construction des signaux.

85. Nous convînmes en même tems de prendre pour signaux des especes de cabanes fort élevées, que nous ferions construire avec des branches d'arbres sur les hauteurs : précaution nécessaire à l'égard des montagnes, dont le sommet a une certaine étendue, & ne présente aucun point fixe sur lequel on puisse pointer, & qui ne laissoit pas d'être fort utile dans celle où nous étions pour lors, quoique sa cime fût couverte d'un amas de pierres qui a la forme d'une pyramide. Nous donnâmes la préférence à cette espece de signaux, parceque la plupart de nos montagnes, & même les plus arides, étoient presque couvertes de bois jusqu'au sommet. Ces baraques étoient tantôt quarrées, tantôt circulaires, suivant la disposition du lieu. Nous commençions par faire planter une enceinte de longues branches, enfoncées de plusieurs palmes dans la terre, & inclinées l'une vers l'autre par le haut; elles étoient traversées par d'autres branches qu'on y attachoit avec des cordes & des clous, & qui les retenoient dans cette position : cela fait, on revêtoit le tout de feuillage. Le diametre de l'édifice étoit d'environ 20 palmes (1) : il y avoit ordinairement quelque chose de plus en hauteur ; de sorte que de loin on l'auroit pris pour une tour.

86. Nous avons éprouvé que ces sortes de cabanes, placées au sommet des montagnes, se distinguent aisément de loin, même avec de petites lunettes, lorsqu'elles se *projectent*, non

---

du voyage, dans lesquels la reconnoissance engage l'Auteur, d'autant plus que la plupart des noms omis seroient inconnus aux lecteurs François.

(1) Près de 14 pieds.

sur d'autres montagnes, mais sur le ciel même; car la montagne paroît alors terminée par une ligne qui n'est interrompue que par une tache noire, formée par la cabane : cette tache s'éleve un peu au-dessus de la ligne, & se fait d'abord remarquer; jusques-là, que quoique nous ayons eu quelquefois des triangles dont l'un des côtés étoit de 50 milles, nous ne laissions pas, avec les petites lunettes de notre quart de cercle, & par un tems peu serein, d'appercevoir très distinctement tous nos signaux. Mais s'il y avoit derriere le signal une montagne plus élevée que le signal même, ce qui nous est arrivé deux fois seulement, & dans une même station, on ne le découvroit qu'avec beaucoup de peine; encore falloit-il que le ciel fût bien pur : le meilleur tems pour cela est celui où le Soleil éclaire les vapeurs qui sont entre ces deux montagnes; ce qui fait comme une espece de nuée lumineuse, sur laquelle le signal se *projecte* par une tache noirâtre qui le décele. Mais si le signal étoit encore plus bas, on ne pourroit absolument le distinguer à une si grande distance; & il faudroit en ce cas raccourcir les triangles & couvrir les signaux de linceuls, ou d'autres choses semblables, tirant plutôt sur le blanc que sur le noir. J'ai cru que cet avis pourroit être utile à ceux qui voudroient entreprendre un ouvrage semblable au nôtre, pour les diriger dans le choix de leurs stations, & ne pas les exposer au danger de perdre leur tems en vaines tentatives.

Ils doivent être sur le sommet des montagnes pour être apperçus de loin.

87. Revenus à *Rome*, nous prîmes la route de *Soriano*, petite Ville riche & peuplée, appartenant à la maison *Albani*. Notre premier soin, en arrivant, fut de nous transporter sur la montagne voisine; nous reconnûmes que son sommet & ses flancs étoient entierement couverts d'arbres de haute futaie. Ainsi on ne jugea pas à propos d'y placer un signal : il eût fallu abattre trop de bois pour parvenir à le rendre visible. Nous préférâmes de chercher à mi-côte quelque endroit découvert, & nous le trouvâmes au-dessus du Bourg de *Caprarola*, proche une petite maison placée sur une hauteur, d'où la vue s'étendoit au loin, & d'où l'on découvroit, d'une part, le dome de *Saint Pierre*, de l'autre, le *Gennaro*, & au nord sur la rive gauche du Tibre, entre *Todi* & *Amélie*, une

Station du mont *Soriano*.

montagne vis-à-vis de *Terni*, où il y avoit plusieurs pointes qui paroissoient propres à terminer notre troisieme triangle. Nous apperçûmes encore du côté de *Terni* une autre montagne à deux pointes, qui, avec la précédente & celle de *Gennaro*, sembloit pouvoir former un nouveau triangle.

Voyage à Terni, à Todi, à Pérouse.

88. Ayant donc passé le Tibre, nous allâmes d'abord à *Amélie*, puis à *Terni*. Nous montâmes sur la montagne voisine, à laquelle les habitans du lieu donnent le nom de *Turremaggiore* (grande Tour). Son sommet est couvert des décombres d'une grande Forteresse, d'où nous découvrions les stations précédentes. Ainsi après avoir marqué le lieu où devoit être posé le signal, nous nous transportâmes sur la montagne qui est entre *Todi* & *Amélie*. Au sommet de celle-ci nous trouvâmes un grand arbre isolé, visible de fort loin, qui nous parut pouvoir tenir lieu de signal. De-là nous descendîmes à *Todi* pour nous rendre à *Pérouse*, située près du *Tésio*, ou *Tetio*, haute & large montagne, & qui nous parut dès-lors très propre à continuer nos triangles.

La superstition attribue le mauvais tems aux Auteurs de la mesure.

89. Le mois d'Octobre étoit avancé: le temps changea tout à coup: il tomba une si grande quantité de pluie & de grêle, les vents furent si impétueux, les orages si fréquens, que le bruit se répandit en plus d'un endroit parmi les gens de la campagne, qu'on avoit apperçu sur les montagnes voisines des hommes qui faisoient creuser la terre & abattre les arbres, sous prétexte de construire des cabanes, mais en effet pour découvrir des trésors confiés, disoient-ils, à la garde des mauvais Génies; que c'étoit là la cause du mauvais tems, & que toutes les campagnes alloient être ravagées. De pareils bruits se répandirent aussi en plusieurs autres lieux, après que nous en fûmes partis, & devinrent quelquefois funestes à nos signaux. Celui que nous avions posé sur la montagne de *Terni*, tomba deux jours après, non sans aide, puisque les matériaux en furent dispersés. Rétabli par nos soins, il disparut une seconde fois. L'avidité des paysans & des Pâtres fut un nouveau motif de déclarer la guerre à nos signaux (1): pour en avoir les

(1) On croiroit lire ici la relation de M. *de la Condamine*. Voyez son

clous,

clous, ils coupoient quelquefois les branches, & renverſoient furtivement tout l'édifice. L'autorité publique put à peine arrêter cette licence; elle n'y réuſſit que par les plus ſéveres menaces: les Lettres-patentes qui nous avoient été expédiées par ordre de Sa Sainteté, enjoignoient à tous les Gouverneurs de favoriſer le plus qu'il ſe pourroit notre entrepriſe; & ces Lettres, ſecondées du pouvoir des Magiſtrats, ne furent pas une précaution inutile pour notre propre ſûreté.

Station ſur le mont *Teſio*.

90. Mais dès que nous fûmes arrivés ſur la montagne de *Pérouſe*, nous reconnûmes que nous n'aurions beſoin ni de celle de *Terni*, ni de l'arbre que nous avions déſigné pour ſignal ſur celle d'*Amélie*, & que les payſans, malgré toutes les défenſes, avoient abattu depuis notre départ; car nous découvrions aſſez diſtinctement par un tems clair, le mont *Soriano*, quoiqu'éloigné de 50 milles; & du côté de *Spolete*, à une médiocre diſtance, une haute montagne qui ſembloit même ſe terminer en pointe, & dont la ſituation étoit ſi avantageuſe, qu'il n'y avoit pas lieu de craindre qu'on ne pût delà appercevoir la pointe de *Cimini*, du *Soriano*, & le *Gennaro*, voiſin de *Palombara*, & qu'ainſi cette montagne ne pût ſervir de point d'appui pour terminer le troiſieme triangle, comme celle de *Pérouſe*, où nous étions, pour terminer le quatrieme. Par ce moyen on diminuoit conſidérablement le nombre de triangles; & il n'en devoit coûter pour cela que de faire un abattis de quelques arbres, ou ſeulement d'élaguer ſur le *Soriano* les plus hautes branches, pour laiſſer appercevoir le nouveau ſignal qu'on y placeroit. Toutes les montagnes intermédiaires nous devenoient inutiles; car malgré la grandeur de ce triangle, aucun de ſes angles ne ſembloit devoir être trop petit. Il y avoit encore tout lieu de préſumer qu'il ſe trouveroit aux environs de *Nocéra* quelque pointe de la chaîne de l'*Apennin*, d'où l'on pourroit découvrir les montagnes de *Pérouſe* & de *Spolete*, & former avec elles un cinquieme triangle.

Journal hiſtorique du voyage à l'équateur, pages 51 & 52. Croiroit-on trouver tant de reſſemblance entre les payſans de l'*Apennin* & les Indiens des montagnes de *Quito*?

91. Ainsi après avoir fait poser un signal sur notre montagne, nous partîmes de *Pérouse* pour aller à *Assise*, & delà à *Nocéra*. Nous nous trouvions au pied d'une montagne fort escarpée & très haute, que les habitans nomment particulierement *Apennino*, ou *Pennino*, & nous choisîmes la pointe la plus élevée, d'où les mêmes habitans, & tous les gens de la campagne nous assuroient que la vue s'étendoit fort au loin sur la Marche d'Ancone & le Golfe de *Venise* d'une part, de l'autre sur les montagnes de *Pérouse* & de *Spolete*, & jusques sur celles qui sont plus voisines de *Rome*. Nous nous mîmes en chemin pour aller reconnoître ce poste avec quelques paysans dont nous avions besoin pour la construction du signal (car à mesure que nous choisissions nos stations, nous y faisions tout de suite placer des signaux pour mieux distinguer de loin le poste choisi), lorsque tout à coup le sommet de la montagne se couvrit d'un nuage épais, le vent & l'orage le rendirent inaccessible, même à nos paysans, & nous fûmes obligés de revenir sans avoir rien fait. Comme le tems devenoit de jour en jour plus mauvais, & que cette montagne, située au milieu de l'*Apennin*, alloit dans peu se couvrir de neige, nous nous contentâmes de marquer aux ouvriers le lieu où ils devoient placer le signal, & que nous avions reconnu de *Nocéra* même, & la forme qu'ils devoient lui donner; puis revenant sur nos pas, nous prîmes par *Foligno* la route de *Spolete* pour reconnoître plus sûrement la montagne que nous avions apperçue de *Pérouse*, dans la pensée que si nous pouvions y établir un poste, comme il y avoit tout lieu de l'espérer, nous aurions avant l'hyver plus de la moitié de notre suite de triangles arrêtée, avec des signaux posés dans chaque station.

Station sur le mont *Pennino*.

92. Arrivés à *Spolete*, nous apprîmes de M. *Ancajani*, qui joint à l'éclat de la naissance les charmes de la politesse, que la montagne que nous cherchions ne pouvoit être que le *Fionchi* proche le village d'*Ancajano*, terre qui lui appartenoit, & qui a donné son nom à sa famille. Je ne puis exprimer les obligations que nous avons à ce Seigneur: nous n'avions pas l'honneur d'être connus de lui; sa politesse, son amour pour les Sciences y suppléa: il voulut lui-même nous

Station sur le mont *Fionchi*.

servir de guide jusqu'au sommet de *Fionchi* (1), par un chemin aussi difficile que long, l'espace de plusieurs milles. J'eus beau lui représenter l'incommodité de la saison, la longueur & la difficulté du chemin; il ne voulut rien écouter. Au premier jour serein nous montâmes de compagnie sur la montagne, dont la position nous parut favorable, car on découvroit de-là le *Gennaro*, le *Soriano*, avec les montagnes de *Pérouse* & de *Nocéra*. Il nous aida à déterminer avec le petit quart de cercle la position de ces montagnes, & de plusieurs autres lieux: ce que nous avons pratiqué dans toutes les occasions qui se sont présentées, tant dans cette excursion que dans toutes celles qui l'ont suivie, montant tantôt sur les tours & les clochers des villes & des villages où nous passions; tantôt au sommet des montagnes. Nous établîmes notre signal sur la pointe la plus haute d'une longue croupe très aiguë; & M. *Ancajani* le fit faire si solide, que malgré la violence des vents & des pluies d'hiver, il a subsisté en son entier pendant plusieurs années.

Descente dangereuse de cette montagne par le mauvais tems

93. Toute la matinée fut très belle: l'après-midi, comme je le craignois, ne lui ressembla pas; nous eûmes de la neige au sommet, de la grêle dans la premiere descente, ensuite une pluie abondante jusqu'à la nuit. Je pris les devants à pied, trouvant moins de danger & plus de facilité à descendre à pied qu'à cheval: je fus long-tems arrêté par un torrent à l'entrée de la nuit. Je pris enfin mon parti, & mes compagnons de voyage ne me rejoignirent que lorsque je l'eus passé, ayant de l'eau jusqu'à la ceinture. Tout cela n'empêcha pas notre Hôte de nous accompagner sur la même montagne les deux années suivantes, quand il nous y fallut retourner avec le grand quart de cercle, mais dans des circonstances plus favorables & suivies d'un heureux succès.

Danger de mort en allant d'*Assise* à *Nocera*.

94. J'ai rappellé cet accident pour faire voir qu'il y a sur nos montagnes même bien des incommodités à essuyer, & bien des risques à courir, & que notre commission, pour avoir été exécutée au cœur de l'Italie, n'en étoit ni moins difficile,

(1) On retranche ici un plus long détail des attentions du Seigneur du lieu.

ni moins pénible. Si je voulois raconter tout ce qu'il nous en a couté de peines & de travaux, & les dangers même prochains de mort auxquels nous avons été exposés plus d'une fois, ayant souvent à marcher sur le bord des précipices, par des sentiers étroits & difficiles à reconnoître, dans des tems pluvieux, & dans la saison la plus incommode; il y auroit de quoi remplir un volume. Laissant à part tous les autres évenemens de ce genre, je ne me rappelle encore qu'en tremblant le jour où nous allâmes d'*Assise* à *Nocéra*. Nous prîmes par les montagnes, où le chemin est trois fois plus court que par la grande route de *Foligno:* notre guide fut saisi à mi-chemin d'un mal qui lui prit subitement, & qui l'obligea de s'arrêter dans une chaumine: il nous conseilla de continuer notre route, en nous assurant que le chemin étoit facile, & que nous ne pouvions nous tromper. Nous poursuivîmes donc; mais au bout de quelque tems nous trouvâmes deux chemins au lieu d'un: celui que nous prîmes dégénéra bientôt en un sentier bordé d'un précipice, & pratiqué sur le bord escarpé d'une montagne coupée presqu'à pic sur un torrent qui en baigne le pied. Le sentier étoit si étroit, que nous ne pouvions ni descendre de cheval, ni tourner bride; & il étoit en quelques endroits tellement gâté par les pluies, que nos chevaux même n'avançoient qu'en tremblant. Nous marchâmes long-tems entre la crainte & l'espérance, dans une inquiétude & une agitation difficiles à peindre. Enfin nous arrivâmes au sommet, où nous trouvâmes un homme que la Providence y avoit conduit, & qui, gagné par l'appas d'une bonne récompense, nous fit faire un long circuit par des chemins creux & escarpés, pour nous conduire à un autre torrent, qu'il fallut passer & repasser cent & cent fois, à travers des roches & des gués dangereux, & pour nous remettre dans le grand chemin, à plusieurs milles de *Nocéra*, où nous n'arrivâmes qu'à nuit close. Je ne me permettrai que rarement de pareils récits: ils ont trop peu de rapport au but de notre voyage, & ce n'est point là ce que nous y allions chercher.

95. Le tems devenoit de jour en jour plus mauvais, & les pluies si abondantes, que pendant le cours de cet hyver le *Tibre* sortit deux fois de son lit, & inonda *Rome*. Nous rentrâmes

1750. Novembre.

dans cette ville le 12 Novembre pour presser la construction du secteur & du grand quart de cercle. J'écrivis à quelques amis qui étoient sur les lieux, de nous choisir encore quelques stations jusqu'à *Rimini*, & d'y faire placer des signaux : je leur en prescrivois la forme, & leur indiquois la disposition convenable des montagnes. Nous profitâmes des lumieres qu'ils nous communiquerent à ce sujet ; & étant allés l'automne suivante jusqu'à *Rimini* pour reconnoître par nous-mêmes la situation des lieux, nous ajoutâmes à nos premieres stations deux montagnes & une colline, savoir le *Catria* au voisinage de *Cantiano*, le mont *Carpegna* qui donne son nom à une illustre famille romaine, & au pied duquel le Cardinal Carpegna, le dernier de cette maison, a fait bâtir un palais qui peut le disputer aux plus beaux de Rome; enfin le petit mont *Luro*, voisin de la mer adriatique, & sur le sommet duquel nous trouvâmes un seul clocher qui peut être reconnu & distingué de fort loin, tous les autres bâtimens étant tombés en ruine.

Le tems devient mauvais de plus en plus.

Choix de trois autres stations.

96. Le *Catria* forme avec le *Pennino* près *Nocéra*, & le *Tésio*, voisin de *Pérouse*, notre cinquieme triangle. Le polygone qui les renferme tous, paroît un peu incliné en cet endroit, parcequ'il y a quatre triangles appuyés sur le *Tésio*, au lieu qu'il n'en aboutit que trois à chacune des autres stations. Le sixieme triangle est appuyé sur le mont *Carpegna*, le *Pennino*, & le *Catria*; le septieme sur le mont *Luro*, le *Catria* & le *Carpegna*; & le huitieme sur le *Carpegna*, le *Luro*, & l'extrémité de la base mesurée sur la plage de *Rimini*. Ainsi nous avions entre *Rome* & *Rimini* sept stations intermédiaires, & huit triangles. Nous aurons encore occasion de parler de ce même polygone, & des bases, dans le détail des opérations de l'année suivante 1751.

Le dôme de Saint Pierre de Rome, lié à la mer adriatique au moyen de sept stations & de huit triangles.

97. Nous restâmes six jours à *Rome*, pendant lesquels nous nous occupâmes de divers détails concernant les instrumens; & à la premiere apparence de beau tems nous nous remîmes en campagne pour lever la Carte du pays renfermé entre le grand chemin qui conduit de *Rome* à *Florence*, la Méditerranée, le *Tibre*, & la frontiere de Toscane: ce qui faisoit partie du second objet de notre commission. Nous avions

Reconnoissance du terrein entre la mer & le grand chemin de Toscane, pour la correction de la Carte.

réservé cette course pour l'hyver, qui est assez doux dans les plaines voisines de la côte, au lieu que l'air y est fort mal sain pendant l'Eté. Après avoir suivi pendant quelque tems la grande route, nous détournâmes sur la gauche vers *Sutri*, ville ancienne, mais peu habitée. De-là nous fîmes quelques excursions, & bon nombre d'observations, malgré les pluies qui recommencerent alors, & qui, cette année sur-tout, ne nous firent point de grace. De tous les postes où nous avons observé, le plus avantageux pour les observations géographiques, est une montagne conique, d'où la vue s'étend fort loin sur toute la plaine de la campagne de *Rome*, & sur une bonne partie de la côte; on l'appelle *Rocca Romana:* elle est peu éloignée de *Sutri*, & domine l'ancien lac *Sabatin*, qui a pris le nom de lac *Bracciano* d'un Bourg voisin. Nous n'y avions pas encore fini nos observations, lorsque la pluie nous surprit: elle nous déroba d'abord la vue de l'horizon: bientôt après elle nous obligea de quitter la partie: mais le principal étoit fait. Nous continuâmes à avancer sur la gauche du côté de *Viterbe* jusqu'à *Toscanella*, ville ancienne, autrefois fort peuplée, qui portoit le nom de *Tuscania;* mais aujourd'hui le mauvais air en rend le séjour insupportable pendant les chaleurs: elle n'est plus reconnoissable; & toute la contrée voisine jusqu'à la mer, est si changée, que de près de cinquante, tant bourgs que villages fort peuplés, qui composoient son territoire, & dont nous avons vu les plans dans la Maison de ville, il en reste à peine quatre ou cinq d'habités; encore n'y a-t-il que fort peu de monde.

Observations à Montéfiascone, Acquapendente, Vétérano, &c.

98. De *Toscanella* nous allâmes à *Montefiascone*, autrefois *Mont-falisque*, ville renommée pour ses vins: elle est sur le grand chemin qui conduit de *Rome* en Toscane: le dôme de l'Eglise principale se voit des montagnes les plus éloignées: il nous a été d'un grand secours pour déterminer plusieurs positions. Nous observâmes dans un lieu découvert, où il y avoit autrefois une forteresse, à peu de distance du dôme. Le Ciel étoit serein; mais la terre étoit couverte de neige: ce qui ne nous empêcha pourtant pas de relever quantité de points, & de déterminer la position du lieu où se faisoit l'observation, & sa distance au dôme, où nous visions des autres lieux:

opération néceſſaire en pareil cas, & que nous n'avons jamais négligée dans l'occaſion. Nous éprouvâmes cependant alors une ſorte d'incommodité à laquelle nous avons été ſouvent expoſés ailleurs : les lieux maritimes qui ſe trouvoient dans la même direction que le Soleil, ſe déroboient à notre vue : ils étoient comme enſevelis dans une eſpece de nuage qui les couvroit pour ainſi dire de ſon ombre : ce qui arrive par-tout en hyver à l'égard des objets ſitués au midi ; & en toute ſaiſon à l'égard des objets ſitués le matin au levant, & le ſoir au couchant. Nous continuâmes notre marche, vers le nord, juſqu'à *Acqua-pendente*, autrefois *Aquula*, en ſuivant la grande route : c'eſt, de ce côté, la derniere Ville des Etats du Pape, ſur les confins de la Toſcane : elle eſt comme au fond d'un entonoir formé par les montagnes ; ainſi il n'eſt pas aiſé d'en fixer la poſition : opération délicate, qui ne fut terminée que dans un ſecond voyage par la poſition de quelques lieux à droite & à gauche de la grande route de *Rome*. Le lendemain nous revînmes un peu ſur nos pas, & nous prîmes enſuite à droite pour aller par *Valentano* & *Canino* du côté de la mer.

1750. Décembre.

Retour à Rome par Civita-vecchia & Bracciano.

99. Nous fîmes une ſtation à *Montalte*, autrefois *Graviſci*, petite Ville réduite aujourd'hui preſqu'à rien : elle eſt environ à une lieue de la mer, & ſur les confins de la Toſcane. Nos obſervations commencées le ſoir à notre arrivée, furent terminées le lendemain de grand matin. Nous nous remîmes en route, & nous cotoyâmes la mer juſqu'à *Corneto*, dont l'air eſt très mal ſain, & qui eſt ſemée d'une ſi prodigieuſe quantité de tours, qu'elle reſſemble de loin à une forêt de cyprès. On conçoit que ces tours ſont ſujettes à autant de parallaxes qu'elles ont d'aſpects différens ; qu'ainſi on courroit riſque de prendre l'une pour l'autre, & que par conſéquent aucune ne peut ſervir de ſignal. Nous montâmes ſur la très haute tour de la maiſon *Fani*, où nous obſervâmes juſqu'à midi. Nous pourſuivîmes juſqu'à *Civita-Vecchia*, port de mer célebre par ſes foires, où nous n'arrivâmes que de nuit. Il y avoit cette nuit là même, qui fut celle du 12 au 13 Décembre, une éclipſe de Lune que nous ſouhaitions d'obſerver ; mais nous ne pûmes arriver à tems pour faire les

préparatifs néceſſaires, que d'ailleurs les nuages dont le Ciel fut couvert toute la nuit, euſſent rendu inutiles. Nous nous bornâmes donc à nos opérations géographiques; & après quelques courſes aux environs, nous quittâmes la mer pour les montagnes. Nous paſſâmes à *Tolfa*, anciennement le marché de *Claudius;* puis à *Bracciano*, dont il a déja été parlé, & nous revînmes le 19 Décembre à *Rome*.

Obſervations faites dans ce voyage. Recherche des Cartes dans le pays.

100. Je n'ai fait mention dans ce récit que des villes, des principaux bourgs, & de quelques autres lieux plus propres aux obſervations géographiques; j'en uſerai de même dans la ſuite. Cependant nous n'avons omis aucune occaſion d'obſerver; & dans tous les bourgs & villages de notre paſſage, nous montions d'abord au lieu le plus éminent, qui étoit ordinairement le clocher, de-là nous relevions tous les objets qui ſe préſentoient à notre vue. Nous nous ſervions pour cela d'un petit quart de cercle, ou d'autres eſpeces d'inſtrumens aiſés à manier, & de diverſes méthodes qui ſont d'uſage à de petites diſtances, & dont je pourrai dire un mot dans le quatrieme Livre. Sa Sainteté nous avoit fait remettre des ordres aux Magiſtrats des Provinces, ainſi qu'aux Evêques, & nous nous ſervions du crédit qu'ils nous procuroient pour faire la recherche de toutes les Cartes particulieres, & autres documens concernant la poſition des lieux, & ſurtout le cours des rivieres. Rarement avons-nous trouvé quelque choſe d'exact en ce genre; & l'on peut dire en général, que dans tout l'Etat eccléſiaſtique, rien de plus négligé que la Géographie.

Obſtacles de la part de deux Curés de villages.

101. Ces lettres revêtues de toute l'autorité pontificale, n'ont pas empêché que nous n'ayons eu bien des contradictions à eſſuyer, non ſeulement de la part des ruſtres & des montagnards, mais quelquefois même, quoique beaucoup plus rarement, dans des villages, & de la part de perſonnes qui avoient eu de l'éducation. Près du lac *Bolſéna*, ſur le grand chemin de *Rome*, eſt un petit village nommé *San Lorenzo*, où l'on change de chevaux de poſte: comme ce lieu ſe trouvoit ſur notre paſſage, nous priâmes le Curé de nous faire ouvrir le clocher de ſon Egliſe pour y obſerver: il fit tant de réſiſtance, qu'à peine il ſe rendit à la vue des ordres du Souverain, & à nos menaces de porter plaintes contre lui. On lui

lui avoit fait croire, comme nous l'apprîmes bientôt de ses paroissiens, qu'il y avoit dans ce clocher un trésor anciennement caché, & que quelques jours auparavant il étoit venu des voyageurs pour le chercher. Nous fûmes traités ailleurs encore plus durement par un autre Curé. Nous nous étions présentés de la maniere la plus respectueuse, & il n'y répondit que par des brusqueries réitérées: il n'eut égard ni à nos Lettres, ni au témoignage d'un illustre ami qui m'avoit connu à *Rome*, & qui ayant appris notre arrivée, vint nous offrir un hospice dans une belle maison que le lieu n'annonçoit pas; & où il nous dédommagea amplement de tous les rebuts que nous venions d'essuyer. Le Curé prit le parti de se retirer, tant pour se délivrer de nos instances, que pour ne pas s'exposer au chagrin de nous voir monter malgré lui dans son clocher par l'autorité de quelqu'autre, comme il arriva en effet: il sortit du village pour n'y rentrer qu'après notre départ; & il ne reconnut son erreur qu'après avoir été appellé à *Rome* pour y être réprimandé: tant on étoit prévenu de je ne sais quelles idées superstitieuses au sujet de notre voyage.

102. Nous demeurâmes un mois à *Rome*, où les pluies, qui ne discontinuoient point, sembloient vouloir nous arrêter. Sur la fin de janvier 1751, nous fûmes envoyés à l'embouchure du Tibre: un mois auparavant ce fleuve avoit ébranlé toutes les digues qu'on lui oppose en cet endroit pour augmenter sa vitesse, écarter le sable apporté par la mer, & donner entrée aux navires. Nous nous y portâmes avec zele, tant pour remédier à un désordre qui interrompoit le commerce, que pour lever la carte des environs & celle de la côte, en déterminant la position des tours qui la bordent. A peine fûmes-nous arrivés, que les pluies recommençant, le Tibre se déborda derechef, inonda toutes les campagnes voisines, & qu'on vit une seconde fois les bateaux aller & venir dans les carrefours de *Rome* (1). Nous étions à deux

1751. Janvier.

Débordement du *Tibre*.

(1) Le P. Boscovich a décrit en fort beaux vers cette inondation dans son Poëme des éclipses; nous n'en citerons que quelques morceaux.

Ipse pater Tibris, hinc pluvia, nivibusque solutis
Turgidus, Hetruscis retro inde repulsus ab undis,

milles de *Porto*, dans un lieu où il n'y a presque d'autre bâtiment qu'une maison basse & étroite de la Chambre apostolique, & une tour autrefois construite au bord de la mer pour défendre l'entrée de la riviere, que les sables, accumulés avec le tems, ont peu à peu éloignée du rivage. Du reste, on ne voit en ce pauvre lieu que quelques cabanes de pêcheurs, quelques chaumieres où demeurent environ trois cents tant pêcheurs que matelots & manœuvres employés par le ministere public à garder le passage & à réparer les digues.

103. Une fois que le Tibre fut sorti de son lit, il s'accrut au point d'investir toutes les chaumieres & toutes les cabanes du hameau : notre logis n'en fut pas exempt : bientôt le dégré fut inondé, & l'eau gagnoit l'étage supérieur : quelques-uns même commençoient à craindre que nous ne fussions submergés : ce qui, vu le voisinage & le niveau de la mer, ne paroissoit possible que dans le cas où la maison fût renversée par le choc des eaux (1). La faim nous menaçoit d'un danger plus pressant. Nous passâmes dans cette triste situation huit jours entiers, pendant lesquels les vivres ne nous auroient pas manqués si nous eussions été seuls ; mais il falloit en faire part à cette foule de malheureux qui n'avoient d'autre ressource. Nous dépêchâmes une barque à *Porto* pour en tirer du secours : elle eut bien de la peine à surmonter le courant de la

Danger provenant du défaut de vivres.

Ventorumque furore gravi percussus, ab imo
Jam toties indignatus caput extulit alveo,
Et vastos latè campos vallesque profundas
Obruit : ipsa etiam magnæ per compita Romæ
Erupit, sine lege furens, miserosque Quirites
Terruit obsessos mediis circum undique tectis.

De Solis ac Lunæ defectibus. Londini 1760, page 195.

(1) Me quoque namque illâ obsessum regione repentè
Exiguo inclusit tecto ; jamque ima tenebat
Limina, perque gradus assurgens ardua visus
Velle minax tabulata domus conscendere ; meque
Et socios tumidis rabidus demergere in undis : *ibid.*

riviere à travers la campagne inondée ; & à son arrivée elle ne trouva point de vivres. *Porto* est une ville ruinée, où l'on compte à peine vingt habitans : l'unique boulanger qui fournit aux villages voisins de l'embouchure du Tibre, pour se dérober aux poursuites de ses créanciers, s'étoit sauvé peu de jours auparavant, sans laisser ni bled ni farine. C'étoit un spectacle lamentable & qui arrachoit les larmes, que l'aspect de tant d'infortunés qui du haut de leurs masures & des mâts de leurs barques, la pâleur sur le front & tremblans d'effroi, imploroient du secours & demandoient du pain (1).

104. Le premier jour de l'inondation, comme je spéculois cette nouvelle mer, j'apperçus à l'aide de ma lunette un Pere Minime avec un jeune homme à la distance d'environ un mille : ils étoient sortis de *Porto* pour regagner leur bateau : l'eau les avoit gagnés au milieu de broussailles épaisses : ils tendoient les mains, ils appelloient du secours, & personne ne pouvoit, ni les voir, ni les entendre. Nous dépêchons à l'instant même une barque avec des gens intelligens ; nous les recueillons dans notre logis où ils demeurerent avec nous pendant la huitaine. Ce jeune homme étoit un Gentilhomme Suisse que sa mere envoyoit au royaume de *Naples* près de quelques parens qu'il avoit au service du Roi des deux Siciles : les voleurs ne lui avoient rien laissé, & il se voyoit hors d'état de poursuivre sa route : je le fis conduire à *Rome*, & de là à *Naples* à sa destination.

On sauve la vie à un Religieux & à un jeune homme de qualité.

105. Comme le mal alloit en augmentant, & que le Tibre paroissoit s'enfler chaque jour de plus en plus, nous pensâmes sérieusement à envoyer un exprès à *Rome* à travers ces campagnes submergées ; car pour le Tibre, il étoit trop rapide

On dépêche à Rome, d'où l'on envoie des provisions.

(1) Quæ facies rerum fuit illa ; è culmine summo
Hinc pueri, & miseræ matres, ac rustica turba,
Una omnis, nautæ è male tutis navibus inde,
Cum macie obducti vultus & voce trementi
Frugem inclamarent, frugem vicina sonarent
Littora, & affusi fluctus, atque improbus imo
Insultans frugem Tibris resonaret ab alveo. *ibid.*

pour pouvoir être remonté. La commission étoit périlleuse, & nous eûmes peine à trouver quelqu'un qui en voulût courir les risques. Notre messager s'étant mis dans un canot avec deux rameurs, ils n'eurent pas trop de tout un jour pour atteindre, au bout de cinq milles, le pied des montagnes les plus voisines, d'où notre exprès se rendit promptement à *Rome*: mais on y avoit déja pensé à nous, aux soldats gardes-côtes, & à tous nos compagnons d'infortune. Les Magistrats qui n'ignoroient pas le danger où nous nous trouvions, nous avoient envoyé par le Tibre un fort bâtiment, & d'abondantes provisions: elles ne pouvoient arriver plus à propos pour des gens réduits à la derniere extrémité. Bientôt après l'inondation cessa, & le Tibre rentra dans son lit (1).

Dommages causés par l'inondation.

106. Pendant ces jours de calamité, les larges digues élevées de part & d'autre de l'embouchure du Tibre, avec leurs encaissemens, & qui dans la premiere inondation avoient été simplement endommagées, furent renversées sous nos yeux. Le courant en entraîna une partie dans la mer, après les avoir brisées; le reste fut ébranlé, renversé & mis hors d'état de pouvoir servir. Peu s'en fallut qu'on ne vît périr en une seule nuit tous les bâtimens de charge qui étoient à l'embouchure du fleuve. Un des plus considérables, battu par les vagues, avoit déja commencé à arracher les pieux de la digue auxquels il étoit amarré, & à peine on y put remédier au milieu des ténébres (2).

---

(1) Ergo per undantes hinc campos fluctibus, atque hinc,
Arboreas inter frondes, & cespite multo
Densa loca, exiguam bino cum remige contra
Ire ratem libuit, collesque exponere ad altos.
. . . .
Attamen interea, tanti haud ignara pericli,
Subsidium jam Roma vigil summiserat. *ibid.*

(2) Quin etiam adversum quà se devolvit in æquor,
Aggeribusque amplis, valloque coercitus ora
Stringitur, & vasto delatas æquore merces
Excipit, ac dominam dorso transmittit in Urbem,

107. J'eus le loisir d'examiner attentivement la situation des lieux, l'état des digues, & le dommage qui se présentoit à ma vue; & à mon retour à *Rome* je remis aux Magistrats un mémoire où je proposois mes vues sur les causes de cette inondation, & sur les moyens qu'on pouvoit employer pour empêcher que de tels débordemens ne fissent une autre fois de pareils ravages. Du reste je ne pense pas qu'on doive attribuer l'inondation à l'embouchure du fleuve, ni qu'on puisse entierement la prévenir. Le P. Maire joignit à ma dissertation une carte de l'isle du Tibre, exactement dessinée. Dès que le fleuve fut rentré dans son lit, nous revînmes à *Rome*, d'où nous repartîmes bientôt avec des experts pour examiner sur les lieux ce qu'il y avoit à faire. Ce second voyage ne fut pas long; mais il fallut près de deux ans & un grand nombre d'ouvriers pour réparer les désordres de l'inondation.

On travaille à les réparer.

108. A notre retour nous pensâmes à mesurer une base dans le voisinage de *Rome*; & le terrein qui nous parut plus propre, fut le long de la voie Appienne, qui conduit de *Rome* à *Albe*. Cette base faisoit face au mont *Gennaro*, avec lequel elle pouvoit former un triangle convenable. Ce chemin est depuis long-tems abandonné, & l'ancien pavé entierement rompu: la plupart des débris en ont été enlevés depuis environ vingt ans pour paver les rues de *Rome*; de sorte qu'il n'y reste plus en quelques endroits que les plus grandes pierres qui bordoient autrefois la chaussée: on y a déja labouré & semé en plusieurs endroits. A droite & à gauche du chemin

Choix d'une base sur la voie Appienne.

Fræna furens morsu disrupit, & impete primo
Dissolvit compagem, ac duræ repagula fregit;
Inde trabes fundo evulsas disjecit, apertos
Perque maris campos, vicinaque littora sparsit.
Vidi ego cum tenues per rimas insinuaret
Spumanti sese fluctu, cum cornibus altis
Obnixus primos aditus sibi quæreret; inde
Dimotis victor trabibus jam corpore toto
Irrueret, vulsamque inferret in æquora molem. *Ibid.*

Tout cet endroit mérite d'être lu dans l'ouvrage même.

ſont deux longues files de tombeaux antiques, qui ne préſentent plus aujourd'hui qu'un triſte amas de ruines & de maſures; mais qui n'ont pas laiſſé, ainſi que les pierres latérales, de nous être fort utiles: car le chemin eſt tiré au cordeau depuis *Rome* juſqu'à *Albe*: il s'éleve un peu proche l'Egliſe Saint Sébaſtien, où l'on voit le tombeau de *Métella*; c'eſt un grand mauſolée de pierre de forme circulaire, avec une ancienne inſcription qui s'eſt bien conſervée, & qui eſt connue de tous les antiquaires. De-là on retrouve une partie de l'ancien pavé, ſur lequel, ayant avancé quelques pas, on découvre dans la direction du milieu du chemin, entre les deux files de tombeaux, une grande tour antique proche la porte d'*Albe*: ce qui prouve que la route eſt parfaitement alignée.

Extrémités de la baſe.

109. Nous fixâmes une des extrémités de notre baſe au tombeau de *Métella*, je veux dire au point du chemin qui répond perpendiculairement au milieu de l'inſcription; & l'autre extrémité au-deſſous de *Frattochie*, à trois milles d'*Albe*, & à l'endroit où le chemin eſt interrompu par un clos d'arbres fruitiers appartenant à la maiſon *Colonne*, & répondant à une de leurs maiſons de campagne, placée de l'autre côté du chemin. Nous marquâmes ce terme de notre baſe par un gros quartier de pierre, que nous enterrâmes ſur une éminence, un peu en-deçà du mur de l'enclos; & pour mieux reconnoître l'endroit, nous plaçâmes à l'entour divers reperes. C'étoit un avantage pour nous que ce chemin ne fût point fréquenté; nous n'avions point à craindre que notre meſure fût troublée par les paſſans; mais peu s'en fallut un jour ſurtout que cette ſolitude même ne nous devînt funeſte. J'allois, accompagné d'un ſeul homme, au lieu où nous avions interrompu l'ouvrage du jour précédent, lorſque je me vis aſſailli par huit gros chiens qui étoient ſortis d'une cabane voiſine, appartenante à des bergers. Nous montâmes ſur une hauteur, & à coups de pierres nous tâchâmes de les écarter. Il y en eut un de bleſſé, & les bergers qui étoient accourus de loin, rappellerent les autres. Nous commençâmes les premiers jours d'avril la meſure de cette baſe: les pluies qui ne diſcontinuerent point, nous obligerent deux fois de l'interrompre, & nous ne pûmes la terminer qu'aſſez avant dans le mois de mai.

1751. Avril.

110. Voici quels étoient les instrumens qui nous ont servi dans cette mesure : nous avions trois perches équarrées, de 27 palmes chacune, marquées à un bout des chiffres 1, 2, 3, suivant l'ordre où elles devoient être placées. Chaque intervalle de 9 palmes étoit distingué par les lames de cuivre, marquées d'un petit point : ainsi il y avoit quatre lames sur chaque regle, savoir, deux aux extrémités, & deux vers le milieu, qui divisoient la perche en trois mesures égales. Outre une regle de fer, où nous avions gravé deux petits points à la distance de 9 palmes, nous en avions une autre de la même longueur, armée de deux pointes, l'une fixe, l'autre mobile qu'on arrêtoit au moyen d'une vis à telle ouverture qu'on vouloit; c'est ce qu'on appelle communément compas fidele, à cause que ses pointes sont paralleles entre elles, & fortement attachées au corps de l'instrument : (cet instrument se nomme en françois compas à verge). Nous nous en servions plusieurs fois le jour pour prendre sur la premiere regle l'intervalle de 9 palmes, & le transporter sur les lames de cuivre des perches, afin de connoître les changemens qui y avoient été produits par les variations dans la température de l'air. On trouvera décrit dans le quatrieme livre le moyen dont nous nous servions pour reconnoître, par des transversales gravées sur de petites lames, jusqu'aux plus légeres différences d'allongement ou de raccourcissement de ces mêmes intervalles. Instrumens nécessaires pour la mesure de la base.

111. Les trois perches portoient sur six planchettes ou tables, posées horizontalement sur une regle verticale, soutenue de trois pieds, avec une vis qui servoit à élever plus ou moins, & arrêter la regle à volonté. Des coins de bois assez larges, mais fort minces, placés sous les têtes des perches, leur donnoient le dégré d'élevation convenable. Les autres instrumens consistoient en un fil à plomb, un niveau ordinaire, composé d'un tube rempli de liqueur avec une bulle d'air, & un thermometre de *Réaumur*. Nous avions pris aussi quatre aides, & un domestique à nos ordres. Nous procédions à la mesure de la maniere qui suit. Suite du même sujet.

112. On posoit d'abord les perches horizontalement sur les tables à trois pieds, & dans la direction de la base, savoir, la premiere sur deux tables, la seconde sur la 2e. & 3e. table, Ordre observé dans la mesure de la base.

& la troisieme, sur la 3e. & 4e. table: cela fait, on venoit reprendre la premiere perche pour la porter sur la 4e. & la 5e. table, & ainsi de suite. Parmi nos aides, nous avions un maçon, homme adroit & intelligent, à qui nous avions donné le soin de placer les tables les unes après les autres, dans l'alignement des premieres, & à une juste distance: il mesuroit cette distance avec un cordeau, dont un domestique, ou l'un de nous, tenoit l'autre bout sur le milieu de la table précédente. Il devoit encore avoir soin que la table fût placée horizontalement: pour cela, il commençoit par la tenir lui-même dans cette position; & si le terrein étoit inégal, le domestique mettoit des pierres ou des coins sous les deux pieds qui se trouvoient alors élevés de terre. Enfin il élevoit cette table à la hauteur des autres, en visant à la vue simple, & l'arrêtoit avec la vis dans cette position.

Transport des perches ;

113. En même tems deux autres apportoient la nouvelle perche qu'ils tenoient chacun par un bout, & ils la plaçoient sur les deux dernieres tables, & on avoit la plus grande attention à empêcher que le bout de la perche suivante ne heurtât contre la perche précédente, ou de causer le moindre mouvement dans la table. On ne devoit pas même faire toucher les têtes des perches, mais seulement les rapprocher de fort près. Ensuite, avec deux coins placés en sens contraire, on achevoit de les mettre de niveau; & de peur qu'on ne fut obligé pour cela de toucher à la perche précédente, la table devoit être plutôt inclinée vers la partie antérieure que vers la postérieure de la base.

Moyen de les aligner ;

114. Pour placer la nouvelle piece dans la direction de la base, un de nous visoit par les perches ou regles à la porte d'*Albe*, & indiquoit de la main le côté où devoit être portée la seconde tête de la derniere perche: les tombeaux seuls auroient pu suffire pour diriger le coup d'œil. S'il arrivoit qu'un nuage, ou quelque hauteur, ce qui étoit rare, nous dérobât la vue de la porte d'*Albe*, nous marquions l'alignement avec des jallons plantés au milieu du chemin, dont les bords étoient trop bien marqués pour qu'on pût se méprendre sur le point du milieu. Celui qui avoit disposé la table étoit encore chargé d'aligner la perche; & tandis qu'il en portoit la tête

à

à droite ou à gauche, un ſecond aide la ſoulevoit par l'autre bout, de crainte que ce mouvement ne dérangeât la premiere table.

115. Le niveau d'eau poſé ſur la perche, indiquoit à celui qui avoit ſoin de diſpoſer la table, à quel point il devoit l'élever pour trouver le niveau ; & tandis qu'il la mettoit à ſon point, ceux qui avoient apporté la perche, la ſoulevoient tant ſoit peu, tant pour lui faciliter cette opération, que pour prévenir tout dérangement dans la premiere table. Quelquefois auſſi on mettoit les deux coins ſous l'autre bout pour l'élever un peu, & corriger l'inclinaiſon de la table. Dès que nos aides furent un peu au fait de cette manipulation, tout s'exécutoit en peu de tems, & de façon à nous contenter. Nous portions les précautions juſqu'au ſcrupule, quoique la ſolidité des tables pût nous raſſurer ſur le danger de cauſer le moindre mouvement dans les premieres perches. Une fois ſeulement tout notre appareil fut renverſé par un coup de vent ; ce qui nous obligea de revenir à l'endroit où le matin nous avions repris notre meſure.

Moyen de les mettre de niveau ;

116. La perche placée, comme les têtes ne joignoient point, nous prenions avec un compas l'intervalle des points gravés ſur les lames, & nous les tranſportions ſur l'échelle de *Tycho*. Cette valeur connue s'écrivoit ſur le régiſtre, où nous avions préparé des tables à quatre colonnes, dont la premiere contenoit le nombre des meſures, compoſées chacune de trois perches, la ſeconde l'intervalle entre la premiere perche de cette meſure & la derniere de la précédente, la troiſieme & la quatrieme les deux autres intervalles des perches ; & au haut des colonnes étoit écrit *premier*, *ſecond*, *troiſieme* intervalle : ce qui prévenoit toute erreur ſur le nombre des meſures. Car à chaque fois qu'on tranſportoit une perche, il falloit écrire un nouveau nombre à la place qui lui étoit préparée ; ainſi à moins d'en omettre trois de ſuite, on n'auroit pu ſe rencontrer avec les numéro gravés ſur les têtes des perches pour les diſtinguer. Par exemple, lorſqu'il eſt queſtion de la troiſieme perche, il faudroit, ſi l'on avoit omis un nombre, écrire l'intervalle qu'il laiſſe dans la colonne qui a pour titre *ſecond intervalle*. Le P. Maire avoit préparé des tables d'une grande

Maniere de marquer leur intervalle.



propreté, & il y écrivoit tous les nombres avec une ſcrupuleuſe attention. Le plus ſouvent nous répétions la meſure des intervalles, quoique nous les euſſions déja évalués ſéparément, en les portant ſur l'échelle, pour comparer enſuite nos réſultats.

Tranſport des tables & autres inſtrumens. Uſage du thermometre.

117. Le quatrieme aide n'avoit d'autre emploi que de tranſporter les tables, & l'étui contenant la regle de fer, le compas à verge, & le thermometre. Cette caiſſe repoſoit à l'ombre, & nous conſultions de tems en tems le thermometre, pour connoître au juſte, par le dégré de chaleur, la variation de l'intervalle de 9 palmes gravé ſur la regle de fer. Nous ne crûmes pas devoir négliger cet examen, quoique eu égard à la température du climat, & moyennant la précaution de n'expoſer jamais la regle au Soleil, nous ne trouvaſſions dans un même jour que de légeres différences. Le dégré moyen de chaleur, au tems de notre meſure, s'eſt trouvé le dix-ſeptieme au-deſſus du terme de la glace, déſigné par le nombre 1000.

Meſures à prendre dans un terrein inégal;

118. Nous n'avions d'autres meſures à prendre tant que le terrein étoit à peu près de niveau; mais dès que ces inégalités nous obligeoient d'élever ou d'abaiſſer conſidérablement nos tables, pour lors le dernier bout de la perche précédente, au lieu d'appuyer ſur le milieu de la table, la débordoit; de même le premier bout de la perche ſuivante débordoit une autre table, qu'on élevoit ou abaiſſoit plus ou moins, ſuivant que le terrein l'exigeoit, pour donner à d'autres perches une poſition horizontale: enſuite au moyen d'un fil à plomb, nous faiſions répondre ces deux bouts l'un à l'autre, ou bien nous prenions avec un compas la diſtance de la perche la plus baſſe au fil à plomb. Rarement avons-nous été obligés d'en venir là; car outre que le terrein étoit aſſez égal, nos tables pouvoient au beſoin s'élever ou s'abaiſſer d'une quantité ſuffiſante: mais nous avions toujours préparé ſix tables, deux pour chaque perche, pour le cas où une pente plus roide nous auroit obligés d'appliquer pluſieurs fois de ſuite le fil à plomb. Les ſix tables n'ont ſervi enſemble qu'une ſeule fois, ſavoir à la fin de notre baſe, que nous jugeâmes à propos de terminer ſur une éminence, pour pouvoir de-là découvrir l'autre extrémité, comme auſſi le mont *Génarro*, premiere ſtation, qui

1751. Mai.

devoit former avec la base notre premier triangle, fondement de toutes nos opérations.

119. Lorsqu'à l'entrée de la nuit, ou aux approches d'un orage, nous interrompions la mesure, nous marquions l'endroit où nous en étions, en faisant tomber le fil à plomb de l'extrémité de la derniere perche dans un creux, où nous enterrions une tuile marquée en travers d'une ligne répondant à l'extrémité du poids: nous remplissions ce creux; & lorsque nous venions ensuite reprendre notre tâche, nous découvrions la tuile, & nous remettions la perche & le fil à plomb dans la situation de la veille; ou bien nous nous contentions de placer une seconde perche, dont au moyen d'un fil à plomb, nous faisions répondre la tête perpendiculairement à la ligne gravée sur la tuile. Dans l'interruption, & la reprise de la mesure;

120. Par cette maniere de mesurer, nous étions dispensés de nous traîner sur le sol, comme MM. *Bouguer* & *de la Condamine*, quand ils mesurerent leur base; & nous n'avions pas sujet de craindre aucun dérangement dans les perches: nous mesurions aisément sept à huit cents toises par jour; ensorte que huit à neuf jours auroient pu suffire pour achever notre mesure, si le mauvais tems & la force des pluies n'eussent souvent interrompu notre ouvrage, & ne nous eussent même obligés par deux fois de revenir à *Rome*, pour ne pas perdre notre tems dans cette solitude, & n'y pas retenir des ouvriers oisifs. Notre mesure nous occupa douze jours, & nous la terminâmes le 8 de mai. Nous n'avons pas jugé à propos de remesurer cette base, parcequ'elle ne devoit servir qu'à vérifier nos mesures conclues, & que nous avions déja désigné pour notre base principale le rivage de *Rimini*, comme beaucoup plus égal & plus facile à mesurer deux fois que la voie Appienne. La base de vérification s'est trouvée, après toutes les réductions, de 53562 $\frac{1}{2}$ palmes, qui réduites à la toise de Paris, font à très peu près 6139 $\frac{1}{2}$ toises entre les termes précédemment désignés: car nous trouvâmes notre mesure de 9 palmes romains égale à 891 $\frac{30}{100}$ lignes, dont la toise de Paris contient 864; ensorte que cette mesure est à la toise comme 89130 à 86400, ou comme 2971 à 2880. Tems employé à cette mesure.

121. Cependant la congrégation générale, pour l'élection

Le P. Maire député pour l'élection du Général.

d'un nouveau Général de notre Compagnie, indiquée pour le 21 juin, approchoit; & le P. Maire devoit s'y trouver ce jour-là même, ayant été choisi pour la seconde fois par sa province d'Angleterre en qualité de l'un de ses députés électeurs. Par cette raison, & parceque notre quart de cercle n'étoit pas encore achevé, nous ne pouvions profiter pour la mesure de nos triangles de la saison de l'Eté, qui y est la plus propre, le ciel étant presque toujours serein, & la chaleur moins grande sur le sommet des montagnes; cette mesure, pour être faite exactement, requérant le concours de deux Observateurs. Nous mîmes le peu de tems qui nous restoit, à parcourir cette partie du vieux Latium qu'on appelle aujourd'hui *Province maritime*, ou campagne de *Rome*, bornée, à l'ouest par le Tibre & la terre de Sabine, au nord par l'Apennin, à l'est par le royaume de *Naples*, & au sud par la mer de Toscane, pour déterminer la situation des lieux, & corriger la carte du pays.

1751. Mai.

Voyage dans la campagne de *Rome*.

121. Nous partîmes donc de *Rome* le 17 mai avec notre petit quart de cercle. Nous commençâmes nos observations à *Castel-Gandolphe* dans le palais pontifical, d'où l'on découvre toute la côte maritime; puis à *Albe* & à *Vélétri*. Arrivés à l'ancien *Antium*, aujourd'hui *Anzo*, nous y logeâmes chez S. E. M. le Cardinal *Corsini* qui y étoit pour lors avec toute sa famille; & nous les eûmes tous pour témoins de nos observations, tant dans le palais du Cardinal, que dans la maison de campagne des *Costaguti*, qui est sur une hauteur. Delà parcourant la côte, nous allâmes au mont *Circello* & à *Terracine*; d'où reprenant la grande route, nous passâmes à *Piperno* & à *Sezze*; de *Sezze* nous fîmes une petite excursion qui nous conduisit à *Sermonete* & à *Norma*: tous ces lieux nous fournirent autant de stations, hors que nous ne pûmes monter au sommet de *Circello*, le ciel & la montagne étant entierement couverts de nuages. Après avoir attendu inutilement pendant plusieurs jours dans la tour de *Paula* au pied de ce mont, que le sommet se découvrît, nous allâmes observer du côté opposé dans un lieu élevé, nommé *San Felice*: & ayant enfin perdu toute espérance d'aborder le sommet de *Circello*, nous abandonnâmes la partie; mais j'y envoyai la

même année un jeune homme qui entend la Géométrie pratique, & qui étoit alors occupé à arpenter un terrein voisin: il découvrit de ce même point le mont *Vésuve*, qu'il reconnut à sa fumée, & le lia avec *Anzo*, & plusieurs autres lieux de la campagne de *Rome*.

123. De *Norma* nous revînmes sur nos pas, & ayant monté à un village fort élevé, & très bien situé pour les observations géographiques, que les habitans nomment *Rocca secca de Massimi*; nous nous rendîmes par une gorge de montagnes qui séparent la campagne de *Rome* de la Province maritime à *Frusinone*, & de-là à *Posi* & à *Céprano*, bourg situé sur la frontiere du royaume de *Naples*, par le chemin qui conduit de *Rome* au mont *Cassin*; d'où nous allâmes au mont *Arsene* & à la ville de *Sora*: ces deux endroits sont dans le royaume de *Naples*, mais sur la frontiere, & de-là on découvre une partie des Etats du Pape: c'en étoit assez pour nous engager à y aller; d'autant plus que nous y avons un college de la Province romaine, où il nous convenoit d'aller passer le saint jour de la Pentecôte. Nous y fussions en effet arrivés à tems, si la pluie & la grêle, dont la terre fut presque en un instant toute couverte, ne nous eussent retenus dans une misérable étable.

Voyage de *Norma à Sora*;

124. Nous passâmes deux jours à *Sora*; & nos observations finies, nous rentrâmes dans l'Etat ecclésiastique, & nous allâmes par *San Giovanni* & *Bauco*, à *Véroli* & à *Alatri*, & de-là à *Fumone*, qui domine toute la campagne de *Rome*, & où l'on pouvoit faire un grand nombre d'observations. Ensuite tournant à droite, nous nous engageâmes dans les montagnes jusqu'à *Trévi*, ville autrefois considérable sous le nom de *Tréba*; elle est située dans une vallée étroite près du *Tévéron*, environ 4000 pas au-dessous de sa source, & du bourg de *Félétino*; les montagnes qui l'entourent de toutes parts, rendent sa position très difficile à déterminer: nous nous en tirâmes de notre mieux. Nous suivîmes ensuite à travers des montagnes escarpées le cours du *Tévéron* jusqu'à *Sublaque*, célebre par le monastere & la grote de *Saint Benoît*. De-là nous grimpâmes à *Civitella*, poste avantageux, mais où nous ne pûmes observer que le lendemain, tant à cause des pluies, aussi extraordinaires dans le mois de juin qu'opiniâtres à nous pour-

De *Sora à Sublaque*;



ſuivre dans le cours de nos obſervations, que par le refus groſſier que nous fit le Curé du lieu de nous ouvrir ſon clocher : c'eſt l'aventure dont j'ai parlé plus haut au nº. 101.

De *Civitella* à *Guadagnolo*.

125. De *Civitella* nous deſcendîmes à *Paliano*, célebre forteresse appartenante à la maiſon *Colonne*, & dont le faîte nous fournit un poſte auſſi avantageux que commode. Nous paſſâmes à *Anagnie*, ville célebre & opulente ; d'où laiſſant entre *Anagnie* & *Fruſinone*, *Férentino*, dont nous avions déja déterminé & vérifié la poſition, nous traverſâmes la vallée de la campagne de *Rome*, & nous arrivâmes à *Segni* ſituée à mi-côte, où les pluies continuelles nous retinrent deux jours. Le troiſieme, nos obſervations finies par un vent de nord très piquant, qui nous fit trembler de froid au milieu de l'Eté, nous arrivâmes avant midi à *Valmontone*, qui, ſelon quelques-uns, eſt le vieux *Labicum :* nous y fîmes une ſtation, dans le magnifique palais de la maiſon *Pamfili*, Seigneurs du lieu ; enſuite, par la plus grande chaleur du jour, nous nous rendîmes à *Preneſte*, aujourd'hui *Paleſtrina ;* d'où après une ſtation de quelques heures qui nous réuſſit à ſouhait, nous montâmes à un village ſitué ſur la montagne voiſine, à l'endroit même où étoit autrefois la ville de *Preneſte :* ſon clocher eſt dans une poſition admirable ; on y découvre de tout côté l'horizon à perte de vue: nous y paſſâmes le reſte du jour, & à nuit fermée nous deſcendîmes par des chemins ſcabreux & très incommodes, à un bourg ſitué au pied du *Guadagnolo*, haute montagne, au ſommet de laquelle eſt un village du même nom : *Poli* eſt le nom du bourg ; il appartient à l'illuſtre maiſon *de Conti*, & touche à leur magnifique maiſon de campagne de *Catena.* Après quelques heures de repos, dont nous avions grand beſoin, nous montâmes à la pointe du jour au ſommet de la montagne, d'où la vue s'étend plus au loin encore que du *Génarro*, qui n'en eſt éloigné que de quelques milles : nous découvrions la vallée de *Sublaque*, toute la campagne de *Rome*, & plus loin une partie du royaume de *Naples ;* & la vue s'étendoit au-delà de *Rome* juſqu'à la mer, & au-delà de *Cimini*, l'une des pointes de *Soriano*, juſqu'en Toſcane.

1751. Juin.

126. Nous établîmes notre ſtation ſur le ſommet de *Gua-*

dagnolo près d'un puits, & ensuite sur le revers de la montagne, proche la célebre chapelle de Notre-Dame de *Mentorella* sur une roche escarpée, où, suivant la tradition du lieu, *Saint Eustache* vit un cerf portant une croix au milieu de son bois, & où l'on a bâti une chapelle sous le nom du Saint, pour conserver la mémoire de cette apparition. Il nous fallut remonter au sommet pour retourner à *Poli*, d'où nous étions partis le matin. Le jour suivant nous traversâmes une large vallée, & nous arrivâmes sur les montagnes de *Frascati*, anciennement *Tusculum*. Le village de *Rocca priora* étoit à une assez grande hauteur pour mériter notre attention : nous y passâmes la nuit, & nous y commençâmes le lendemain une de nos journées des plus fatigantes. Après y avoir observé, nous traversâmes une vallée au pied de l'*Algide*, aujourd'hui *Rocca del Papa :* nous montâmes au sommet de la montagne de *Velétri*, où les Allemands étoient campés dans la derniere guerre, mais d'où ils furent bientôt chassés par les armées combinées d'Espagne & de Naples, qui occuperent long-tems ce poste. Nous y observâmes trois heures de suite, & dans la plus grande chaleur du jour, la station étant d'ailleurs des plus favorables. De-là nous descendîmes à *Cinthien*, aujourd'hui *Gensano*, petite ville peuplée & d'un agréable séjour, appartenante à la maison *Césarini*. Nous allâmes observer sur la colline voisine, au pied d'une tour à demi écroulée; & le jour commençant à baisser, nous fîmes un grand tour par *Aricie* ou *Riccia*, *Castel-Gandolfe* & *Marino*, dont les *Colonnes* sont Seigneurs, & nous arrivâmes assez avant dans la nuit à *Frascati* dans la maison de campagne du college romain, d'où le lendemain 13 de juin nous revînmes à *Rome*, après avoir levé en moins d'un mois la carte de toute une grande Province.

Retour à *Rome* par *Frascati.*

127. La montagne d'*Albe* étoit encore des plus propres à notre dessein, car elle se voit de très loin & de tout côté; mais outre que le P. *Maire* y avoit déja observé avant notre voyage, il nous étoit aisé d'y retourner, comme nous l'avons fait les années suivantes, de *Frascati* où nous allons communément passer les féries d'automne. Nous ne jugeâmes donc pas nécessaire de nous y arrêter pour cette fois; mais je ne crois pas

On passe la montagne d'*Albe*; & pourquoi.

devoir passer sous silence une aventure, où nous courûmes le plus grand risque de la vie, quoique nous en ayons couru un assez grand nombre, & ce récit ne sera pas inutile à ceux qui auront à voyager sur les bords de la mer.

Grand risque de la vie à l'embouchure d'un lac.

128. Nous allions en chaise d'*Anzo* à *Circello*, en suivant la côte, & nous rencontrâmes sur notre passage l'embouchure du lac *Fogliano*, qui fait partie des marais pontins. Jamais chaise n'avoit passé en cet endroit; mais on nous avoit assuré qu'il n'y avoit rien à craindre, au moins en Eté; que nous pouvions en toute sûreté faire conduire notre voiture le long du rivage, jusqu'à *Circèllo*, & que nous trouverions un chemin également sûr & commode. Nous arrivons à l'embouchure: le garde de la tour *Paula*, située au pied de *Circello*, y avoit passé à cheval deux heures auparavant: notre voiturier pousse ses chevaux dans l'eau à l'endroit même où il voyoit encore imprimés les pas du cheval qui nous précédoit, regardant cet endroit comme le plus sûr. Heureusement pour nous le garde n'étoit pas loin; il s'étoit arrêté à l'autre bord pour prendre du repos, & dans le moment même il remontoit à cheval pour finir sa route. Dès qu'il nous eut apperçus, il se mit à crier de toutes ses forces, & à nous faire signe de la main d'arrêter, de tourner à droite par la mer, & loin de l'embouchure. Sur cet avis nous fîmes un grand détour; & dès que nous fûmes arrivés auprès de lui, il dit qu'il ne pouvoit s'empêcher de reconnoître & d'admirer la Providence, de ce qu'elle avoit daigné se servir de lui pour nous garantir d'un si grand péril dans ce lieu solitaire; que connoissant ce passage, il n'y étoit entré qu'avec précaution pour sonder le gué; que les eaux du lac enflées par les pluies des jours précédens, avoient fait un creux à l'embouchure de plus de deux fois la hauteur d'un homme; que si nos chevaux y fussent entrés, ils eussent infailliblement entraîné la chaise dans le gouffre; lequel venant ensuite à se recouvrir de sable, on n'auroit peut-être jamais pu savoir ce que nous fussions devenus. On est souvent exposé à des dangers de cette espece aux embouchures des lacs & des petites rivieres; & il est incomparablement plus sûr de faire un grand détour, soit à cheval, soit en voiture, en avançant dans le lit de la mer dont le fond

est

est plus solide, que de passer à l'embouchure même.

129. Nous fûmes arrêtés deux mois à *Rome*, pendant lesquels le P. *Maire* assista à la congrégation générale, & je m'occupai de mon côté à presser la construction du quart de cercle qui avançoit très lentement en notre absence, & surtout à mettre en bon état les deux lunettes & leurs micrometres. Notre instrument ne nous fut remis qu'au commencement d'août, & peu après nous le fîmes transporter à l'observatoire que M. le Cardinal *Valenti* a fait construire sur le rempart même de *Rome*: là nous prîmes plusieurs angles, tant pour connoître par le tour de l'horizon l'erreur de la division de l'instrument au point de 90 dégrés, que pour vérifier toutes les différentes parties de la division en les appliquant successivement à la mesure des mêmes intervalles. Mais cette méthode expose encore à des erreurs de plusieurs secondes; & comme elle ne réussissoit pas à notre gré, & que nous voulions d'ailleurs profiter du tems pour parcourir nos stations, nous renvoyâmes l'examen des divisions après la mesure de tous nos angles. Nous fîmes encore à *Rimini* quelques tentatives, qui ne nous réussirent pas mieux; jusqu'à ce qu'enfin revenus à *Rome* après toutes nos courses finies, j'imaginai une sorte d'instrument de vérification fort commode, que nous fîmes construire, & qui nous a beaucoup servi. J'en donne la description au quatrieme livre.

Séjour de deux mois à *Rome*.

130. Cependant j'avois obtenu un ordre pour faire abattre les arbres au sommet de *Soriano*, à l'exception d'un seul qui devoit servir de signal. Cet abattis ne pouvoit être préjudiciable aux habitans du lieu, dont chacun avoit la liberté de faire du bois à discrétion. On n'avoit pas encore suffisamment nettoyé la place, surtout du côté qui regarde *Spolete*; & au lieu d'un arbre, on en avoit laissé trois assez voisins, dont deux vus de *Rome* se projectoient l'un sur l'autre, en telle sorte que ces deux arbres & le troisieme sembloient de loin n'être que des branches écartées d'un seul: ce qui n'ayant été remarqué que lorsque nous nous transportâmes à cette station, jetta cette premiere année beaucoup de confusion dans nos premieres mesures. J'avois encore écrit pour faire placer des signaux sur le mont *Catria* & le *Carpegna*, & pour réparer

Ordres concernant les signaux.

ceux des autres montagnes : moyennant ces précautions, j'espérois que la mesure des angles de notre suite de triangles depuis *Rome* jusqu'à *Rimini*, ne nous méneroit pas plus loin que la fin de l'automne.

Signaux placés aux extrémités de la base.

131. Pour procéder à cette mesure, nous commençâmes par faire placer des signaux aux extrémités de la base de *Rome*, qui pussent être apperçus du sommet du mont *Genarro* à plus de 24 milles de distance : & comme vûs d'un lieu élevé, ils ne pouvoient manquer de se projecter sur le terrein, il falloit de nouvelles précautions pour les rendre visibles. Nous fîmes donc dresser trois solives, formant un angle droit, dont l'un des côtés suivoit la direction de la base, l'autre la coupoit perpendiculairement. On lia leurs extrémités supérieures par des traverses, & l'on revêtit deux faces du prisme depuis le milieu jusqu'au haut d'une toile de chanvre enduite de chaux. Nous en fîmes d'abord placer un sur le tombeau même de *Métella*, & proche les creneaux qui sont au-dessus de l'épitaphe, avec un plancher sur lequel nous pussions trouver place pour nous & pour notre grand quart de cercle, & d'où la vue pût s'étendre jusqu'à l'extrémité de la base, & vers le mont *Genarro* : l'autre signal fut placé sur une éminence proche l'extrémité orientale de la base. Le même jour nous allâmes prendre les angles au premier signal ; & peu s'en fallut que notre quart de cercle, pour la premiere fois qu'il nous servoit, ne fût mis en pieces, & que nous ne périssions nous-mêmes avec tous les ouvriers qui avoient construit notre échaffaud.

Grand danger de mort.

132. Tout l'édifice portoit sur deux poutres horizontales, dont l'une avoit été autrefois sciée presque entierement & en travers ; mais le trait de la scie étoit tellement couvert de poussiere, qu'il n'étoit pas possible de l'appercevoir. Nous étions sur le plancher avec des maçons qui à force de bras y montoient notre grand quart de cercle : dès que la poutre eut senti le poids de l'instrument, elle commença à fléchir, & se rompit enfin tout à fait : une partie du plancher s'écroule, le reste demeure incliné : le P *Maire* embrassa une poutre verticale, dont la solidité le mit hors de danger : ma position étoit plus critique ; & sentant le plancher se dérober sous mes

pieds, je sautai sur un rebord saillant du mur, & m'attachai des deux bras à l'un des creneaux : les ouvriers sauterent chacun de leur côté sur des roches, & d'assez haut pour qu'il y eût quelqu'un de blessé. Si notre édifice eût été construit de l'autre côté du tombeau, où le mur est fort élevé, c'étoit fait de nous : & sans rien changer à notre position, si le quart de cercle eût déja été transporté sur le milieu de notre plancher, il étoit perdu sans remede.

133. Revenus de notre frayeur, nous donnâmes des ordres pour rétablir le plancher, & nous renvoyâmes les observations à un autre jour : un seul nous suffit pour prendre nos angles aux deux extrémités de la base. Voici la méthode que nous avons suivie alors, & depuis, dans le cours de toutes nos stations. Le quart de cercle placé à peu près horizontalement, nous pointions les deux lunettes sur les signaux, & nous visions en même tems chacun de nous à un signal, de crainte que dans l'intervalle il n'y eût quelque mouvement dans la machine : le quart de cercle restant dans cette position, nous changions de lunette ; c'est-à-dire que celui qui venoit d'observer par la lunette fixe, passoit à la lunette mobile : dès que nous étions assurés que les signaux répondoient au centre des fils, nous estimions l'un après l'autre l'angle indiqué par la lunette mobile ; en quoi nous différions rarement de 4 ou 5 secondes, & alors même nous recommençions cet examen. J'expliquerai dans le quatrieme livre de quelle maniere nous estimions les fractions des divisions tracées sur le limbe. Nous avions soin à chaque opération de vérifier la position de la lunette fixe à l'égard du point zéro, en dirigeant les deux lunettes au même point. L'angle mesuré, nous marquions exactement la distance & la position du centre de l'instrument, par rapport au centre du signal : cette attention étoit absolument nécessaire pour faire à l'angle observé une petite correction qu'exige la réduction au centre. Cette correction est très aisée à pratiquer ; j'en pourrai dire un mot dans le quatrieme livre.

Maniere de prendre les angles.

134. Après avoir pris les angles horizontaux, nous ôtions l'alidade & la lunette mobile ; nous placions verticalement le quart de cercle, & nous y appliquions le fil à plomb, pour

Observations des hauteurs & dépressions.

vérifier, au moyen de la double lunette fixe, la position de l'instrument, (ce dont je renvoie le détail au quatrieme livre), & mesurer ensuite les hauteurs ou dépressions des signaux. Pour cela l'un de nous visoit au signal, tandis que l'autre examinoit le point du limbe auquel répondoit le fil à plomb. Nous plongions le poids dans l'eau, pour en arrêter le mouvement; & s'il y avoit du vent, nous couvrions d'un garde-filet le fil à plomb.

Observations au dôme de *St Pierre* & sur le mont *Genarro*.

135. Les opérations finies aux deux extrémités de la base, nous fîmes transporter notre quart de cercle au-dessus du dôme de Saint Pierre: opération fort laborieuse, l'instrument, son pied, & la caisse, que pour prévenir tout accident nous avions rendue fort solide, pesant près de 300 livres. Nous fîmes nos observations le 21 d'août; mais sans avoir pu découvrir le sommet de *Soriano* qu'à travers un nuage. Le lendemain nous partîmes pour *Palombara* & le *Genarro*, où les nuages nous déroberent d'abord la vue de l'horizon: nous ne pûmes observer que le lendemain, encore eûmes-nous beaucoup de peine à découvrir le signal de *Frattochie*, le Soleil étant déja assez bas. Ce fut là que nous commençâmes à appercevoir trois arbres sur le *Soriano*, sans savoir lequel étoit le véritable signal. Nous revînmes à *Rome*, & nous en repartîmes sur le champ pour *Soriano*, où nous vîmes qu'en effet on avoit laissé trois arbres au lieu d'un, & de plus, qu'on n'en avoit pas assez abattu aux environs.

Observations sur un arbre à *Soriano*.

136. Le plus grand inconvénient étoit qu'une croupe de la montagne, quoique plus basse, en se prolongeant vers *Spolete*, couvroit la vue de ce côté là. Le meilleur parti à prendre eût été sans doute de faire abattre aussi-tôt tous les arbres qui étoient dans cette direction; mais les habitans du lieu l'auroient vu avec peine, & ils nous assurerent qu'on pouvoit établir solidement un échaffaud sur les grosses branches d'un arbre, y transporter le quart de cercle, & découvrir de-là fort loin. Nous eûmes égard à leurs représentations: mais à peine le quart de cercle fut-il établi sur l'arbre, que le moindre vent faisoit trembler tout l'édifice & rendoit toute observation impraticable. Cet arbre étoit un des trois qu'on avoit laissés pour signal: nous le dépouillâmes de toutes ses feuilles, après quoi

nous n'éprouvâmes plus qu'un mouvement presque imperceptible. Nous n'avions plus besoin que d'un jour serein ; mais pour le trouver il nous fallut monter au moins dix fois sur la montagne, qui étoit à une heure & demie de chemin du bourg de même nom : ce qui nous retint en ce lieu l'espace de quinze jours.

137. Après avoir entierement dépouillé cet arbre même de ses menues branches, nous fîmes couper un des arbres qu'on avoit laissés pour signal, de sorte qu'il n'en restoit plus qu'un entier couvert de feuilles, qui ne pouvoit causer d'équivoque. Nous sortîmes de *Soriano* en suivant la même route que l'année précédente pour aller à *Amélie :* & sans passer cette fois par *Terni*, nous nous rendîmes à *Spolete* par un chemin détourné avec notre petit quart de cercle, pour lever la carte de cette contrée : ce que nous avons toujours pratiqué dans la suite en allant d'une station à l'autre. Nous profitions aussi de tout le tems qui nous restoit dans nos stations pour déterminer avec le grand quart de cercle la position des villes & autres lieux principaux, quand ils n'étoient pas dérobés à notre vue par l'opposition du Soleil, ni par l'interposition des nuages. Voyage à *Spolete.*

138. Nous fûmes plus heureux sur le mont *Fionchi :* dès le premier jour l'horizon fut net, & nous découvrîmes très distinctement les montagnes de *Palombara*, de *Soriano*, de *Pérouse* & de *Nocéra*. De-là nous prîmes la grande route de *Rome*, & nous nous rendîmes par *Foligno* à *Nocéra*, dont le *Pennino* n'est éloigné que de cinq milles ; mais le chemin est si rude, que nos chevaux eurent bien de la peine à le faire en cinq heures, encore ne pûmes-nous retirer aucun fruit de ce premier voyage : le ciel étoit couvert de grands & de petits nuages qui nous cachoient la plupart de nos signaux. Après avoir attendu quelque tems inutilement, nous confiâmes notre quart de cercle à des bergers, qui le mirent dans leur cabane sur la montagne, & nous revînmes à *Nocéra* sans avoir rien fait. Stations du *Fionchi* & du *Pennino.*

139. Nous étions trop mal payés de nos peines pour nous exposer à un second voyage aussi long & aussi inutile que le premier. Ainsi nous nous établîmes dans une maison de paysan à *Mosciano*, petit village située sur le penchant de la montagne à deux ou trois heures de chemin du sommet, & célebre Mission donnée.

par les eaux très salutaires de *Nocéra ;* encore fallut-il y rester neuf jours entiers : nous fûmes d'abord contrariés par les nuages qui rendirent les trois premiers voyages inutiles : les pluies survinrent ensuite, & parurent vouloir nous retenir plus longtems dans le village ; ce qui nous fit naître la pensée d'y donner une mission. Après avoir demandé les pouvoirs à M. l'Evêque de *Nocéra*, qui avoit eu la bonté de nous recevoir chez lui dans cette ville, nous nous mîmes à instruire, à prêcher & à confesser, ne croyant pouvoir mieux remplir que par des fonctions de zele le vuide de nos occupations géométriques.

Observations sur le *Pennino.*

140. Enfin après une forte pluie, le vent de nord s'éleva le 21 septembre, & nous montâmes incontinent sur le *Pennino.* Les nuages en couvrirent encore le sommet jusqu'après midi : ils se dissiperent enfin, & nous commençâmes à appercevoir les montagnes de *Pérouse* & de *Spolete ;* celle de *Catria* se découvrit un peu plus tard ; la bise ayant augmenté sur le soir, la fit sortir des nuages, & nous achevâmes de prendre nos angles à l'entrée de la nuit. Je démontai les instrumens, & les remis en caisse par un froid si piquant, que j'en eus la main engourdie au point de ne pouvoir la fermer de plusieurs mois.

Tremblemens de terre. Chute dangereuse.

141. Un soir pendant notre séjour à *Mosciano*, la nuit étant assez avancée, nous sentîmes un violent tremblement de terre, dont notre chaumine fut rudement ébranlée : un autre avoit renversé peu de tems auparavant dans le même canton la petite ville de *Gualdo*, & plusieurs villages : j'écrivois alors à M. le Cardinal *Valenti* à qui je rendois compte deux fois la semaine de nos opérations. Mais le P. *Maire* courut ces jours-là même un danger bien plus grand, dont la Providence le sauva. Dans l'un des voyages que nous fîmes au sommet de la montagne, notre guide s'avisa pour couper court, de nous mener par un sentier presque perpendiculaire : je sentis le danger, & ayant assez de forces pour monter à pied, je descendis de cheval : le P. *Maire* plus âgé garda sa monture ; mais la sangle de son cheval s'étant cassée tout à coup, le Pere glissa au même instant avec la selle sur la croupe du cheval, & tomba à la renverse entre des pointes de rochers. Tous mes sens se glacerent de frayeur : jamais la protection de Dieu n'a

paru sur nous d'une maniere plus visible: le P. *Maire* ne s'étoit point blessé: il se releve de lui-même; & la sangle attachée de nouveau, & plus étroitement serrée, il remonte à cheval, & arrive sain & sauf au sommet de la montagne.

142. Le lendemain nous revînmes à *Nocéra*, & prenant le grand chemin de *Rome*, nous passâmes à *Foligno* pour aller à *Pérouse*. Dès le jour suivant nous montâmes avec le grand quart de cercle sur le *Tésio*, & le ciel étant serein, nous fîmes sans difficulté plusieurs observations; mais nous ne pûmes découvrir la montagne de *Carpegne*: elle devoit se reconnoître à un signal qu'on m'avoit promis pour le jour même, & dont nous n'apperçûmes pas le moindre vestige avec nos lunettes, & aucun de nos guides ni de nos aides ne connoissoit de vue cette montagne. Nous découvrîmes seulement celle de *Sainte Marie*, & sur celle-ci une tour qui nous parut pouvoir former un nouveau triangle avec le *Catria* & quelqu'autre montagne. Ainsi après avoir déterminé sa position, nous revînmes à *Pérouse*. Le même jour je reçois une lettre de l'ami qui s'étoit chargé de poser le signal: il m'apprenoit que nous ne pouvions absolument nous passer du mont de *Carpegne*; mais qu'il avoit été empêché d'y poser le signal par des soldats toscans, qui depuis quelques années avoient pris possession au nom de l'Empereur du bourg de *Carpegne*, du village de *Scavolino*, & d'une grande partie de la montagne; qu'on étoit en contestation sur les limites des deux états aux environs du lieu où il falloit placer le signal; que les soldats n'avoient pas permis qu'on mît la main à l'œuvre; qu'il avoit eu beau leur représenter qu'il s'agissoit d'une opération géométrique & non militaire; & qu'on désespéroit de pouvoir leur faire entendre raison.

Observations sur le mont *Tésio*.

Des troupes empêchent de poser un signal.

143. Cette nouvelle me surprit & m'affligea: c'étoit la premiere fois que j'entendois parler de poser un signal sur un terrein en litige: si j'en eusse eu le moindre soupçon, rien n'eût été plus facile que de prévenir cet obstacle; au lieu que dans la circonstance il falloit écrire plusieurs lettres; en attendant les réponses, l'hyver qui s'avançoit à grands pas, devoit bientôt interrompre le cours de nos opérations. Après avoir délibéré sur les moyens les plus prompts de lever cet

Mesures prises pour écarter cet obstacle.

obstacle, nous crûmes devoir examiner en attendant si nous ne pourrions absolument nous passer du mont de *Carpegne:* pour cela nous fîmes transporter le quart de cercle à *Citta di Castello*, & de-là nous montâmes au sommet de l'Apennin, d'où nous descendîmes à *San Angélo in vado*, & à *Urbanie*, deux villes situées dans l'étroite vallée du *Métaro*. Après avoir examiné la situation des lieux, nous reconnûmes qu'en effet le mont de *Carpegne* nous étoit nécessaire, vu qu'on découvre de-là toute la côte de *Rimini*, & qu'il pouvoit terminer deux beaux triangles, l'un appuyé sur le *Catria* & le *Tésio*, l'autre sur le mont *Luro*. En conséquence nous écrivîmes à *Citta di Castello* d'envoyer notre quart de cercle à *Cantiano* situé au pied du *Catria*. En attendant nous allons à *Fossombrone*, à *Fano* & à *Pesaro*, & nous levons la carte de toute cette contrée avec le petit quart de cercle. Nous fûmes reçus à *Pesaro* par Mgr. François *Stoppani*, pour lors Evêque & Président d'*Urbin*, aujourd'hui Cardinal & Légat de cette Province, à qui M. le Cardinal *Valenti* nous avoit recommandé, & envers lequel les témoignages les plus expressifs de notre reconnoissance ne peuvent nous acquitter.

Voyage à *Rimini*.

1751. Octobre.

144. Nous fîmes part à ce Prélat des mesures que nous avions prises; & en attendant que les difficultés s'applanissent, nous allâmes chercher sur le rivage de *Rimini* un terrein mesurable à la perche, pour nous servir de base. Il s'en étoit déja présenté un près de *Fano*, qui au défaut d'autre, auroit pu servir à cet usage. Nous devions encore chercher un lieu propre à faire nos observations astronomiques à l'extrémité de notre méridienne, & employer le reste du tems à faire quelques excursions, pour la correction de la carte géographique, jusqu'à ce qu'il nous fût permis de construire une cabane sur le mont *Carpegne* pour nous servir de signal. Nous partîmes donc de *Pesaro* pour *Rimini*; mais au lieu de suivre la route qui borde la côte, nous détournâmes à gauche pour aller reconnoître le mont *Luro:* nous le trouvâmes tel qu'on nous l'avoit dépeint, c'est-à-dire, très propre à placer un signal; car nous découvrions de-là le mont *Catria*, celui de *Carpegne*, & tout le rivage de la mer à quinze milles de distance jusqu'à *Rimini*, où nous arrivâmes le 7 d'Octobre.

145.

145. C'étoit peu de voir suspendre le cours de nos opérations: pour surcroît de malheur, il arriva par la négligence des couriers, ou par je ne sais quelle fatalité, que les lettres que M. le Cardinal *Valenti* m'adressoit à *Rimini*, avec des ordres d'où dépendoit toute la suite de notre voyage, & d'autres lettres que nous devions remettre nous-mêmes sur les lieux, se perdirent toutes, si bien qu'on ne put jamais savoir ce qu'elles étoient devenues. Pendant que nous attendions la réponse à nos lettres, nous reconnûmes une plage qui s'étend de *Rimini* vers *Pesaro*, très propre à mesurer sur le terrein, & à nous servir de base. Nous allâmes aussi à *Saint Marin*, petite ville, mais fort célebre par son indépendance, & la liberté qu'elle conserve depuis plusieurs siecles: elle est située sur une montagne qui se termine en trois pointes fort élevées, & garnies de tours, d'où la vue s'étend d'un côté sur la Marche d'Ancone, de l'autre sur les frontieres les plus reculées de l'Etat de l'Eglise, & au-delà de *Commachio;* mais sous un ciel pluvieux & chargé de nuages, nous ne pûmes alors relever que les objets les plus voisins, dont nous fixâmes la position. Voyage à *San Marino.*

146. Nous trouvâmes un lieu fort propre aux observations astronomiques dans la maison de M. le Comte *Garampi* de *Rimini*. Les termes me manquent pour exprimer toutes les obligations que nous avons à ce Seigneur. M. *Garampi* cultiva dès son enfance l'étude de l'Astronomie, jusques-là que le célebre *Eustache Manfredi*, dont il fut disciple à *Boulogne*, en parle comme d'un compagnon de ses travaux. Nous observâmes ensemble à *Rome* en 1736 dans ce college romain le passage de Mercure sur le Soleil, & liés dès-lors d'une étroite amitié, nous avons depuis ce tems-là entrenu un commerce de lettres. De retour en sa patrie, il fit de sa maison le palais d'Uranie; il y traça une méridienne, & fit provision d'instrumens d'astronomie, qui lui ont servi à faire plusieurs observations, surtout d'éclipses. Il ne se borne pas à l'étude des Mathématiques; & à l'exemple de M. Jos. *Garampi* son frere, Chanoine de Saint Pierre de *Rome*, garde des archives du Vatican, connu dans la république des lettres par plusieurs ouvrages sur les antiquités, remplis d'érudition, M. *Garampi* y joint l'étude des médailles & la connoissance des anciens manuscrits. Observatoire établi à *Rimini*. Eloge de M. *Garampi*;

L

Les services qu'il rend.

147. Comme il vit que nous n'avions dans notre college de *Rimini* aucun endroit propre à observer les étoiles voisines du zénith, il nous conduisit chez lui, nous offrit ses instrumens, & en particulier une pendule à secondes, que nous n'eussions pu trouver ailleurs, & qui nous dispensa d'en faire venir une de *Rome :* non content de cela, il voulut assister à presque toutes nos observations, à toutes sortes d'heures, à *Rimini* & à *Penna di Billi*, petite ville, chef lieu de la province, & située sur le mont *Férétrano*, où il nous reçut dans sa maison avec magnificence: il nous suivit depuis sur le mont de *Carpegne*, quand les difficultés furent levées ; il fit lui-même pour nous un bon nombre d'observations géographiques, qu'il nous envoya à *Rome:* il détermina en particulier la position de *Sarcina*, ville située au milieu des montagnes; c'est la seule ville de l'Etat de l'Eglise dont nous ayons omis de fixer la situation par nos propres observations, n'ayant pas moins de confiance en celles de M. le Comte *Garampi* qu'aux nôtres.

148. Cette tâche finie, nous retournâmes à *Pesaro*, où nous logeâmes d'abord chez M. l'Evêque, puis chez M. *Olivieri*, l'ornement de l'Académie de cette ville, à qui nous avons eu toutes sortes d'obligations cette année & la suivante: il nous conduisit à sa maison de campagne de *Novilara* pour y travailler à la correction de la carte, & à sa terre de *Granarolo* à deux milles du mont *Luro :* il voulut être témoin des observations que nous fîmes avec le grand quart de cercle sur cette montagne même.

Signal posé sur le mont de *Carpegne.*

149. Au retour de toutes nos courses aux environs de *Pesaro*, je reçus enfin le 27 octobre la nouvelle que toutes les difficultés étoient levées; que nous pouvions en toute sûreté faire construire une cabane pour nous servir de signal sur le mont de *Carpegne*, & y aller prendre nos angles. Nous partîmes dès le lendemain de *Pesaro*, & nous prîmes notre route par *Saint Marin* pour aller à *Penna*, & de-là à *Scavolino*; d'où, tout étant concilié, le Commandant même des troupes toscanes nous accompagna sur le sommet de la montagne. Nous y désignâmes la place de la cabane & la forme qu'on devoit lui donner. Nous étions partis de grand matin par un très beau tems; nous avions trouvé le chemin escarpé, & en partie

couvert de glace : à peine fûmes-nous au ſommet, qu'il s'éleva tout à coup de la mer un amas de nuages blancs, dont notre montagne fut bientôt inveſtie. Tandis que nous deſcendions au bourg de *Carpegne*, & notre eſcorte à *Scavolino*, un tourbillon de neige ſorti du ſein de la nue, & pouſſé par un vent impétueux, nous enveloppa de toutes parts, & nous laiſſa à peine aſſez de jour pour nous conduire. Cependant nous pourſuivîmes notre route ſans accident, & le nuage étant diſſipé, nous arrivâmes le même jour à *San Angelo in vado* à l'entrée de la nuit. Le lendemain nous paſſâmes en diligence à *Acqualagna*, & à *Cagli*, ville entourée de montagnes qui rendent ſa poſition difficile à déterminer : nous la déterminâmes de notre mieux, & nous arrivâmes encore de jour à *Cantiano*.

Tentative inutile. Nouvel ordre de marche.

150. Notre quart de cercle nous y avoit devancé. Le jour ſuivant à la pointe du jour nous montâmes ſur le *Catria* : le tems étoit aſſez beau à notre départ ; mais nous n'étions pas encore à mi-côte, que tout le ciel ſe couvrit de nuages, & ne nous annonça plus que des orages & des tempêtes : le ſommet de la montagne y étoit déja plongé, & les vents mugiſſoient avec fureur. Nous attendîmes pluſieurs heures auprès du feu, pour voir ſi le vent diſſiperoit l'orage : il fallut revenir à notre gîte, & nous vîmes le lendemain matin notre ſignal & le ſommet de la montagne couverts de neige : en même tems tout le monde nous avertiſſoit que ces montagnes étoient impraticables dans cette ſaiſon ; que les payſans même des environs & les pâtres n'oſoient en approcher : ce qui nous fit perdre l'eſpérance de pouvoir finir cette année la meſure de nos angles. Nous prîmes le parti de retourner à *Rimini* pour meſurer notre baſe, & de prendre notre route par *Urbin* pour placer cette ville & les lieux circonvoiſins ſur notre carte. Nous devions enſuite faire une excurſion géographique dans la Romagne, le Bolonois & le Ferrarois, en attendant notre ſecteur, qu'on nous avoit promis pour ce tems-là. Le ſecteur arrivé, nous nous propoſions de faire au commencement du printems nos obſervations aſtronomiques de *Rimini* ; &, pendant qu'on tranſporteroit l'inſtrument à *Rome*, où nous devions en faire de ſemblables, de prendre en paſſant les angles qui nous manquoient.

1751. Novembre.

Préparatifs pour la mesure de la base.

151. Arrivés à *Rimini* le 5 novembre, nous donnâmes d'abord nos soins à faire préparer les instrumens nécessaires à la mesure de la base; j'entends les perches avec leurs lames de métal, & les trépieds; car pour la regle de fer, le thermometre & le compas à verge, nous les avions déja fait venir de *Rome*. A notre départ de *Cantiano*, nous avions particulierement recommandé au Commandant du lieu de nous envoyer sans délai notre quart de cercle sur un cheval, non sur un chariot, de crainte que quelque piece de l'instrument, quoique renfermé dans une bonne caisse, ne fût dérangée par les cahots de la voiture: précaution que nous avons toujours prise; & au défaut de cheval, nous faisions porter le quart de cercle à bras sur le sommet des montagnes. Notre dessein étoit, tandis qu'on prépareroit les ustensiles nécessaires pour la mesure de la base, de vérifier les divisions du quart de cercle; mais il se fit attendre jusqu'à la fin du mois: d'un autre côté on ne procédoit qu'avec une extrême lenteur à préparer nos perches, & autres petits instrumens: toute l'autorité des Magistrats, jointe à la promesse d'une ample récompense, purent à peine nous les procurer pour la fin de novembre.

Mesure de la base de *Rimini*.

Décembre.

152. Nous choisîmes pour notre base le rivage de la mer, depuis l'embouchure de l'*Ausa* près de *Rimini*, en tirant vers *Pesaro*, l'espace d'environ huit milles. Nous employâmes treize jours à faire cette mesure & à la répéter, non compris trois jours pendant lesquels les pluies nous obligerent de l'interrompre. Pendant tout ce tems, la température de l'air fut sensiblement la même; le moyen dégré de chaleur étoit le cinquieme au-dessus du terme de la glace: mais nous eûmes presque toujours un brouillard si épais, que sans la précaution que nous prîmes dès le premier jour de marquer l'alignement de la base par des jallons plantés fort près les uns des autres, nous n'eussions pu avancer en ligne droite: ainsi chaque fois que le brouillard s'éclaircissoit suffisamment les jours suivans pour laisser appercevoir les termes extrêmes de la base, nous continuions la même manœuvre.

Forme de la base; sa longueur.

153. Comme le rivage n'est point en ligne droite, & qu'en s'écartant de la plage les sables accumulés par les vents forment des dunes & des creux, nous ne pûmes mesurer notre

base en ligne droite : elle étoit composée de deux lignes, qui faisoient comme les côtés d'un triangle rectiligne, dans lequel, connoissant ces deux côtés par leur mesure actuelle, avec un angle quelconque, il n'étoit pas difficile de déterminer le troisieme côté, ou la base rectiligne, & cela sans aucune erreur sensible, eût-on commis dans l'angle une erreur d'une demi-minute: ce qui ne pouvoit arriver dans le cas présent où nous nous sommes servis du grand quart de cercle. Or l'angle formé par l'un des côtés connus avec la base rectiligne, s'est trouvé de 9 dégrés, 7 minutes, 45 secondes; d'où la base rectiligne a été conclue de 52674. 3 palmes romains, ou de 6037. 62 toises.

154. Cette base fut mesurée de la même maniere que celle de *Rome*; mais comme le brouillard de *Rimini* faisoit impression sur les perches, & les courboit tant soit peu, nous ne nous contentions pas de vérifier plusieurs fois le jour avec le compas à verge la longueur de nos perches, & de la comparer avec la regle de fer; nous examinions de plus cette courbure même, au moyen d'un fil tendu, & de la maniere que j'exposerai au quatrieme livre. Cette courbure n'a pas produit dans la base une différence de six pouces. Nous n'en avons point tenu compte dans la premiere base, parceque la différence étoit trop petite; mais eût-elle été aussi grande qu'à *Rimini*, elle eût à peine produit une erreur de quatre pieds sur la mesure du dégré; & en prenant un milieu entre les deux bases, l'erreur n'eût pas monté au-delà de deux pieds. Examen de la courbure des perches.

155. Nous eûmes trois obstacles à surmonter dans la mesure de la base de *Rimini*, savoir le passage de l'*Amarano*, de petits espaces de mer à traverser quand la mer faisoit un coude, & quelques monceaux de sable & inégalités de terrein. L'*Amarano* est un torrent qui, à son embouchure, a un lit fort étroit, & un fond solide; au lieu qu'à l'endroit où nous devions le passer, le lit étoit large, & le terrein mouvant: nous déterminâmes cet intervalle par un triangle, en mesurant avec nos perches le long du bord un intervalle à peu près égal, & en prenant les angles avec une exactitude qui ne permet pas de soupçonner dans ce trajet une erreur d'un demi-pouce. La marée (assez sensible dans le golfe de Obstacles à surmonter.

Venise) empiétoit quelquefois ſur notre baſe, dans les endroits où le rivage ſe courbe en rentrant dans les terres: pour lors nos aides déja exercés par pluſieurs jours de meſure, entroient dans l'eau juſqu'à mi-jambes, & meſuroient ſous nos yeux: ils nous apportoient à diverſes repriſes la meſure de l'intervalle des perches, avec un compas; & la conformité de leurs meſures nous répondoit de leur juſteſſe. Nous rencontrâmes à quelque diſtance de la mer de grands monceaux de ſables, & des creux, dans un aſſez long eſpace: nous avions préparé deux nouvelles tables beaucoup plus hautes, pour les creux les plus profonds; & nous faiſions ébouler le ſable des dunes, juſqu'à ce que les perches portant ſur le ſable même, ſe trouvaſſent de niveau.

1751. Décembre.

Effet de l'humidité ſur les perches.

156. Il eſt encore digne de remarque, qu'en comparant les perches à la regle de fer, nous trouvions quelquefois que la même perche s'étoit allongée d'un côté & raccourcie de l'autre: ce qu'on ne peut attribuer qu'à l'irrégularité de tiſſure des filamens, l'humidité produiſant dans les uns un ſimple raccourciſſement, tandis que ce raccourciſſement même faiſoit peut-être éviter certains nœuds à d'autres filamens, qui par-là même ſe lâchoient. Quelle qu'en ſoit la cauſe, le fait eſt certain.

Accord parfait entre les deux meſures.

157. J'obſerverai enfin qu'ayant remeſuré les deux côtés de notre baſe en revenant ſur nos pas, nous n'avons trouvé entre la premiere & la ſeconde meſure qu'une différence de deux pouces: ce qui ne paroît nullement un effet du haſard; mais celui de nos attentions & de nos ſoins en opérant: on peut en juger par l'expoſé que j'ai fait des précautions que nous avons priſes: mais nous en avons une preuve encore plus ſenſible; c'eſt qu'en remeſurant nous trouvions rarement plus d'un pouce de différence dans la diſtance des pierres & des briques que nous avions enterrées pour marquer le terme de chaque journée; juſqu'à ce qu'ayant parcouru la moitié de la baſe, nous ne trouvâmes plus de bornes: elles avoient été écartées dans l'intervalle par les vagues pendant une tempête violente.

Extrémités de la baſe marquées.

158. Aux deux extrémités de la baſe, comme auſſi dans le point où elle faiſoit un coude, nous avions enfoncé de force, & profondément dans le ſable de gros pilotis, ſur les têtes deſquels, après les avoir applanies, nous avions tracé deux

lignes profondes qui se croisoient, & dont l'interfection répondoit exactement aux termes extrêmes de nos deux lignes : nous les avions ensuite couverts de sable, & placé à l'entour quelques reperes, pour les retrouver plus aisément quand nous viendrions prendre nos angles.

159. Tandis que nous mesurions cette base, on nous écrivit de *Rome* qu'on ne pouvoit nous envoyer notre secteur, ni même le finir que nous ne fussions présens : ce qui nous obligea pour la seconde fois de changer l'ordre de notre marche, & de revenir à *Rome* vers la fin de décembre. Nous prîmes la grande route par *Pesaro*, *Fano*, *Sinigaglia*, *Ancone*, *Lorete*, *Recanati*, *Tolentin*, *Foligno*, *Spolete*, *Terni*, *Narni* & *Civita-Castellana*, autrefois *Fescennin* ; & dans tous ces lieux, comme dans toutes les autres villes de notre passage, nous ne manquâmes aucune occasion de travailler à la réformation de la carte ; mais ces occasions ont été ici plus rares à cause de la saison.

Retour à *Rome*.

1752. Janvier. Février.

160. Le secteur ne nous fut remis que vers la fin de février, & nous le plaçâmes dans le cabinet de *Kirker* au college romain : nous y avons une belle méridienne tracée sur un pavé de pierre, & une excellente pendule à secondes : le pavé porte sur une bonne voute, & le plafond est immédiatement au-dessous du toit, de sorte qu'il ne s'agissoit plus que de faire une petite ouverture au toit & au plafond, pour observer commodément les étoiles voisines du zénith.

Observatoire de Rome.

161. On donnera en détail au quatrieme livre (n°. 3 & suiv.) la description du secteur, & l'explication de ses divers usages. Il suffit de remarquer ici que nous avons toujours eu grand soin de donner à notre secteur une situation verticale, en faisant raser le limbe au fil à plomb, & de placer le secteur exactement dans le plan du méridien. L'axe de la lunette étoit fixe dans notre secteur : il n'y avoit point de fil mobile dans la lunette (1) ; mais nous avions une lame mobile, placée sur le limbe ; on la faisoit avancer au moyen d'un micrometre, jusqu'à ce que le point le plus voisin de la division répondît au fil à plomb, pour pouvoir estimer la distance du fil à

Description du secteur.

(1) On pointoit la lunette sur l'étoile, en inclinant le secteur de la quantité nécessaire par le moyen d'une vis. Voyez liv. IV. n°. 14 & suiv.

plomb au milieu du limbe, & la valeur de l'angle. Nous avions eu soin de rendre l'axe de la lunette à peu près parallele au plan de l'instrument, & le secteur étoit tellement construit, qu'on pouvoit aisément approcher ou éloigner le centre de l'objectif du plan du secteur, jusqu'à ce qu'on eût atteint le parallélisme : mais nous ne nous sommes nullement mis en peine de parvenir à un parallélisme rigoureux; car en retournant alternativement le secteur, on connoît d'abord de combien l'axe est écarté du plan de l'instrument; & il n'est besoin pour cela ni de prendre des hauteurs correspondantes, ni même de régler la pendule, pourvu que son mouvement soit uniforme: or cette déviation connue, il est aisé de corriger, au besoin, l'erreur qui en résulte; je dis au besoin, car par exemple en Italie, à moins que la déviation ne soit considérable, l'erreur n'est plus sensible.

Parallélisme de la lunette au plan de l'instrument.

162. Cette méthode consiste à observer trois jours de suite la même étoile, le limbe tourné le premier jour à l'orient, le second à l'occident, le troisieme encore à l'orient, en conservant le limbe dans le plan du méridien. De la maniere que notre secteur étoit fait, il ne falloit qu'un moment pour le retourner & le placer dans cette direction. Cela supposé, si la lunette est parallele, il s'écoulera autant de tems de la premiere observation à la seconde, que de la seconde à la troisieme : & ces intervalles seront inégaux, si la lunette n'est point parallele. Car si à raison de l'inclinaison de l'axe, l'étoile arrive le premier jour au centre des fils avant que d'atteindre au méridien, elle arrivera le lendemain d'autant plus tard au centre des fils, & cette différence de tems sera double de celui qui répond à l'inclinaison de l'axe : mais parceque le troisieme jour elle reparoîtra d'autant plutôt qu'elle a retardé la veille, la différence de ce second intervalle de tems sera encore double de l'erreur; ainsi la somme des différences des deux intervalles sera quadruple : ce qui donne cette analogie : l'espace du tems marqué par la pendule, écoulé de la premiere à la troisieme observation, est à la quatrieme partie de la différence de ces intervalles, comme deux cercles entiers à un quatrieme terme, lequel sera le nombre des minutes & secondes du parallele de l'étoile fixe, qui répondent à l'inclinaison de l'axe.

On

On réduira ce nombre de minutes & secondes en arc de grand cercle par la méthode ordinaire, & l'on aura cette inclinaison même, qu'on corrigera si on le juge à propos; car lorsqu'elle est petite, on peut n'en tenir compte dans notre latitude; & observât-on même près du pôle, il est incomparablement plus facile & plus court de corriger l'erreur qui en résulte, que de s'obstiner à courir scrupuleusement après le parallélisme, au risque d'y perdre un tems considérable. La différence des deux intervalles, dans l'une des positions de notre secteur, s'est trouvée de 32 secondes; d'où résulte une inclinaison de 8 secondes, répondante à deux minutes du parallele de l'étoile fixe: inclinaison légere, & qui diminua considérablement encore lorsqu'on eut changé la position de l'objectif.

Maniere d'observer les étoiles voisines du zénith.

163. Nous avons observé pendant un intervalle de plus de quinze jours trois étoiles, savoir α du signe, μ de la grande ourse, & β de la constellation d'*auriga*; & voici le procédé que nous suivions: le secteur tellement disposé que l'étoile dût passer dans la lunette, l'un de nous deux attendoit le moment du passage, & dès qu'il la voyoit paroître, il tournoit une vis, qui faisoit incliner le secteur plus ou moins, jusqu'à ce qu'il eût amené l'étoile sur le fil horizontal, & perpendiculaire au méridien; & il attendoit le moment où elle atteignît le fil qui croisoit le premier dans le plan même du méridien, en remarquant l'heure de la pendule au moment de ce passage. L'autre prenoit ensuite sa place, & voyoit suivre à l'étoile le fil horizontal, qu'elle débordoit de nuit, & qui la couvroit entierement pendant le jour. On examinoit ensuite le point du limbe auquel répondoit le fil à plomb, en avançant, au moyen d'une vis, la lame mobile jusqu'à ce qu'une de ses divisions répondît au fil: nous faisions cet examen l'un après l'autre, & à plusieurs reprises, & nous ne différions jamais de plus de deux ou trois parties de micrometre, dont il en faut trois pour une seconde. Souvent aussi nous retournions le secteur d'un jour à l'autre; & c'étoit pour nous, comme je l'ai dit, l'affaire d'un moment.

1752. Mars.

Départ de Rome.

164. Les observations astronomiques terminées à l'extrémité australe de la méridienne, nous partîmes de *Rome* avec notre secteur, pour en aller faire de semblables à *Rimini*, &

laisser le moindre intervalle possible entre les observations. Nous prîmes, pour aller à *Rimini*, la même route par laquelle nous en étions revenus l'année précédente ; & nous profitâmes de la belle saison pour déterminer la position des points que nous n'avions pû observer au cœur de l'hyver dans notre premier voyage, & il nous en manquoit presque à chaque station : tout nous réussit à souhait, le tems ayant presque toujours été extrêmement favorable.

Avril.

Observations astronomiques à *Rimini*.

165. Arrivés à *Rimini*, nous fîmes dans la maison de M. le Comte *Garampi* tous les préparatifs nécessaires aux observations astronomiques, en attendant notre secteur. L'instrument étoit renfermé dans une forte caisse, dont le fond étoit de planches épaisses & fort unies. Nous traçâmes une méridienne dans un lieu commode sous le toit ; nous y plaçâmes la pendule, puis le secteur qui se trouva tout monté le 15 d'avril, & nous commençâmes à observer. Les nuages & les brouillards vinrent nous contrarier : ce qui fit que nos premieres observations s'accordoient peu ; de plus elles furent interrompues par un accident qui dérangea le secteur. Mais depuis les derniers jours d'avril jusqu'au 15 de mai, il y eut un assez bon nombre de jours sereins : ils furent entremêlés d'autres jours, où la pluie & le mauvais tems ne nous laissoient appercevoir qu'une seule de nos étoiles, ou nous les cachoient toutes. Les observations que nous fîmes de β d'*auriga* furent en trop petit nombre, à cause de la proximité du Soleil, & trop peu sûres pour qu'on puisse y compter ; mais l'accord de toutes les autres ne nous laisse aucun doute sur la détermination de l'amplitude de l'arc. Plusieurs amis du maître de la maison, & lui surtout, furent témoins de nos opérations, & partagerent nos travaux.

Mai.

Examen des divisions. Courses géographiques.

166. Ces observations finies, nous employâmes quelques jours à l'examen des divisions du secteur ; mais de retour à *Rome*, nous reprîmes & achevâmes cet examen avec plus de soin, & par diverses méthodes. J'avois imaginé avant de quitter *Rimini*, un instrument commode pour la vérification des divisions du quart de cercle ; mais je n'y pus trouver d'ouvrier en état de l'exécuter avec assez de précision. Après quelques tentatives, nous remîmes à faire cet examen à *Rome* même

avec plus de loisir. Nous fîmes aussi plusieurs courses géographiques, entre autres sur une colline très agréable, nommée *Corvignano*, couverte de maisons de plaisance de la noblesse du pays, & dans une petite ville riche & peuplée, appellée *Saint Arcange*: & pour ne rien laisser en arriere dans ce canton avant que d'achever de prendre nos angles, nous employâmes le reste du mois de mai & celui de juin à parcourir la Romagne, le Ferrarois & le Bolonois, remettant au commencement de juillet les voyages qui nous restoient à faire sur les montagnes.

167. Nous partîmes de *Rimini* le 17 de mai, & nous arrivâmes à *Cesene*, où M. le Marquis *Michel Ange Romagnoli*, mon ami particulier, nous fit une magnifique réception. Il étoit venu au-devant de nous l'espace de plusieurs milles; ce qu'il fit encore depuis: il nous mena visiter un célebre monastere de Bénédictins au voisinage de cette ville; il y assista à un grand nombre d'observations, & à notre retour il voulut nous reconduire jusqu'à *Rimini*. Nous fûmes retenus à *Cesene* par une pluie qui dura vingt-quatre heures sans interruption. Voyage à *Cesene*;

168. De-là nous passâmes à *Cervia la neuve*, ville si petite, qu'elle ne mérite pas le nom de ville: le voisinage des salines a fait abandonner l'ancienne: l'air est très mauvais dans la nouvelle. De *Cervia* nous allâmes à *Ravennes* qui conserve encore beaucoup de monumens de son ancienne magnificence. Nous y fûmes reçus par le R. P. *Maure Sartio* de l'ordre des Camaldules, dont il est aujourd'hui Abbé à *Rome*, connu par un grand nombre d'ouvrages, qui nous conduisit au célebre monastere de *Classé*; & par M. *François Cinnano*, jeune gentilhomme, grand amateur, qui nous accompagna sur des montagnes d'un accès également difficile & dangereux. De *Ravennes* nous nous rendîmes à *Comachio*, où nous séjournâmes plusieurs jours; mais avec moins de fruit que nous ne l'avions espéré. La situation de cette ville est telle, que dans un tems serein on découvre toutes les montagnes du Bolonois & de la Romagne, jusqu'aux forts de la ville *St Marin*. Les nuages nous déroberent en partie les avantages du poste, n'ayant vu ces objets éloignés qu'une seule fois, & pendant quelques momens. A *Ravennes* & *Comachio*;

A Ferrare; 169. De *Comachio* nous allâmes à *Ferrare*, où nous restâmes huit jours. Nous fîmes des obſervations à pluſieurs repriſes ſur une haute tour de l'Egliſe principale avec le P. *Sivieri* Jéſuite, l'homme d'Italie qui poſſede le mieux la topographie du pays, & la ſcience de conduire les eaux. Comme le tems étoit toujours embrumé, les objets les plus éloignés ſe refuſoient à notre vue: le P. *Sivieri* y ſuppléa. Il avoit une collection abondante d'anciennes obſervations, ſur leſquelles il nous deſſina une carte comprenant le Ferrarois, le Bolonois d'en-deçà les monts, & les environs de *Ravennes*. Cette carte qu'il dédia au Pape Benoît XIV, & qu'il préſenta l'année derniere au Cardinal *Valenti*, nous a été d'un grand uſage: les lumieres que nous en avons tirées ont conſidérablement abregé notre travail.

A Boulogne. 170. Nous prîmes un peu à gauche pour faire quelques obſervations, en allant de *Ferrare* à *Boulogne*, où nous en fîmes pluſieurs, ſoit dans la fameuſe tour *Aſinelli*, ſoit dans notre maiſon de campagne de *Barbiano*: le ciel étoit cependant toujours fort embrumé. Nous nous trouvâmes dans cette ville au milieu d'une troupe de ſavans; je ne nommerai que ceux dont j'avois déja l'honneur d'être connu, & qui en cette occaſion n'oublierent rien pour reſſerrer les nœuds de notre ancienne amitié. M. *François Zanotti*, Secrétaire de l'Inſtitut de *Boulogne*, dont j'ai l'honneur d'être membre depuis quelques années, nous en fit voir à loiſir toutes les riches collections, en particulier le cabinet d'hiſtoire naturelle. M. *Euſtache Zanotti* nous mit à portée d'examiner les inſtrumens aſtronomiques venus de *Londres*, & nous conduiſit à l'obſervatoire, où nous obſervâmes avec lui le ſolſtice. Le P. *Riccati* Jéſuite nous accompagna à la maiſon de campagne du college, d'où nous allâmes faire des obſervations ſur une haute montagne. Il nous mena enſuite en la compagnie de M. *Gabriel Manfredi*, voir le nouveau canal de *Boulogne*, dit *Benedettino*, où nous paſſâmes quelques jours; & un bras du vieux *Pô*, ſur la droite, dans lequel ſe décharge le canal: nous parcourûmes au même tems toutes les campagnes voiſines, par ordre de M. le Cardinal *Doria*, alors Légat à *Boulogne*, qui nous ayant déja reçus à notre arrivée en cette ville, voulut

encore nous loger, & se transporta le dernier jour au lieu même où nous observions. Les bontés que Son Eminence m'a témoignées en particulier à *Boulogne*, & dont elle continue à m'honorer à *Rome*, & les obligations que je lui ai, ne me laissent point de termes pour exprimer ma reconnoissance & mon dévouement.

1752. Juin. Juillet.

171. Nous demeurâmes vingt jours tant à *Boulogne* que dans ce voyage qui nous fournit aussi quantité de relevemens. Nous nous étions proposé de faire une course dans les montagnes du Bolonois: c'étoit la partie de cette Province qui en avoit le plus besoin, tout le plat pays ayant déja été reconnu par les plus habiles Géometres de *Boulogne*, qui en avoient publié une carte à grands points: mais comme cette partie même ne renfermoit aucune ville ou bourg un peu considérable; qu'elle étoit déja décrite dans une nouvelle carte du Modenois; & qu'enfin nous étions pressés d'aller achever notre mesure trigonométrique, pour ne pas nous exposer une seconde fois aux brouillards, aux nuages & aux neiges, en laissant passer un tems favorable, nous jugeâmes à propos de revenir par la grande route de *Rome*, en nous arrêtant pour observer dans les villes & les gros bourgs qui s'y touchent de près, & en négligeant le pays montueux & les lieux peu habités, dont nous pouvions tirer la position des meilleures cartes. Nous montâmes donc par *Faenza*, *Imola* & *Forli* à *Bertinoro*, petite ville située dans un lieu élevé, d'où nous relevâmes quantité de points par un assez beau tems; car la vue s'étend de-là fort loin. Nous revînmes à *Cesene*, & ensuite à *Rimini*, où nous arrivâmes le 11 juillet (1).

Retour à *Rimini* par *Bertinoro*.

172. Notre premier soin à notre arrivée fut de faire les préparatifs pour prendre la mesure de notre suite de triangles. J'avois déja écrit pour faire rétablir les signaux tombés ou ébranlés pendant l'hyver; & j'avois pris des précautious pour empêcher que les garnisons de *Scavolino* & de *Carpegne* venant à être relevées, on ne nous suscitât quelque nouvelle

Préparatifs pour la mesure trigonométrique.

(1) Il y a dans le texte *le* 11 *mai*; c'est une faute d'impression. Voyez n°. 165.

difficulté. Nous découvrions le mont *Luro* de notre observatoire de *Rimini ;* nous commençâmes par observer le gisement de cette montagne, en mesurant l'angle qu'elle formoit avec le Soleil levant, pour en conclure la position de toute notre chaîne de triangles par rapport à la ligne méridienne. Cette observation fut faite le 21 juillet, mais dans un lieu fort incommode ; & indépendamment de ce qu'elle exigea plusieurs réductions, je compte beaucoup plus sur celle que nous avons faite depuis à loisir dans le college romain avec ma pendule dont j'étois sûr : car pour une opération de cette espece, le mouvement de l'horloge ne sauroit être trop égal. Nous allâmes ensuite placer des signaux aux extrémités de notre base de *Rimini*, où j'ai dit que nous avions enterré de grands pilotis. Celui de l'*Ausa* ne se fit pas long-tems chercher ; il étoit tout près de l'embouchure : mais la violence des vents ayant applani plusieurs monticules de sable, nous fûmes plusieurs heures sans rencontrer le second, quoique de plusieurs reperes éloignés nous eussions fait tracer des sillons à trois pieds de distance du pieu : nous commencions à perdre l'espérance, lorsqu'un de nos ouvriers le trouva par hazard enfoui à une grande profondeur. Aussi-tôt nous plaçâmes aux deux extrémités des signaux tout semblables à ceux de la base de *Rome*.

Phénomene singulier d'optique.

173. Les signaux posés, nous y allâmes prendre nos angles : ce qui fut fait en très peu de tems à l'embouchure de l'*Ausa* ; mais nous fûmes arrêtés à l'autre extrémité par un phénomene très singulier. La distance des signaux n'étoit que de huit milles, & pour les rendre plus faciles à appercevoir, ils étoient élevés de plus de 20 palmes au-dessus du sol. Du premier signal nous avions très bien distingué le second au point du jour : arrivés à celui-ci peu après midi, nous eûmes beau pointer la lunette sur le premier, dont le lieu nous étoit parfaitement connu, car il répondoit à l'endroit du port de *Rimini* le plus proche du Lazaret ; nous ne pûmes le découvrir, quoiqu'il ne pût être caché par la courbure de la mer, dont la hauteur, dans un espace de huit milles, n'approche pas de 20 palmes. nous ne découvrions que le toit de l'hôpital ; encore nous parut-il extrêmement rétreci ; il en étoit de même des voiles des navires qui étoient dans le port, & dont plusieurs

les avoient déployées; toutes nous parurent défigurées. Frappé de la nouveauté de ce spectacle, je dressai une échelle contre le signal, & ayant monté quelques échelons, je pointai la lunette, & je découvris la toile qui enveloppoit le signal de l'*Ausa;* mais ce n'étoit point par dégrés qu'elle s'élevoit de toute sa largeur au-dessus des eaux; je la découvris d'abord presque entiere, premierement comme à travers un nuage transparent, ensuite beaucoup plus distinctement, mais si étroite, qu'elle ne faisoit presque qu'une ligne: à mesure que je montois elle paroissoit s'élargir, & reprenoit, ainsi que les maisons & les voiles des navires, sa forme naturelle. Nous ne nous lassions point le P. *Maire* & moi de contempler ce phénomene, en nous élevant plus ou moins sur l'échelle, & en haussant & baissant alternativement la tête: mais l'après midi s'avançant, il fallut songer à prendre nos angles; & pour nous mettre à portée de voir le signal éloigné, nous profitâmes d'un chariot qui se trouva fort à propos: nous le plaçâmes à l'endroit où nous voulions observer; nous y établîmes le quart de cercle; & y étant montés, nous découvrîmes très distinctement notre signal, & nous terminâmes toutes nos observations.

Autre phénomene semblable.

174. Tandis que nous venions de l'autre extrémité de la base, il s'étoit levé un vent de midi dont la mer étoit un peu agitée; & j'ai souvent remarqué, tant sur le golfe de *Venise* que sur la mer de Toscane, que les vents de sud & de sud-est y donnoient occasion à un phénomene qui paroît être du même genre que le précédent: les pointes des caps ou des isles vues du bord de la mer, ou d'un endroit éloigné, tel que le rayon visuel rase la surface des flots, paroissent en l'air, comme suspendus au-dessus des eaux. Mais dès qu'on regarde d'un endroit plus élevé par un rayon plus oblique, le phénomene disparoît, & on les voit dans leur état naturel. Les rayons qui partent de l'objet, & qui passent un peu au-dessus de la surface d'une mer agitée, sont détournés de côté, je ne sais par quelle cause, de sorte qu'ils resserrent l'image de l'objet, jusqu'à le rendre invisible, à moins qu'il ne soit très grand, & la resserrent d'autant plus, qu'ils sont plus près de la surface des eaux. Cela étant, on doit perdre absolument de vue la pointe la plus haute d'un cap, tandis que ses autres parties

1751. Juillet.

élevées doivent paroître rentrer les unes dans les autres, & être d'autant plus resserrées, qu'elles sont plus hautes; ensorte qu'on ne voie plus que comme une pointe suspendue au milieu des airs. Mais c'est ici un point fort difficile à expliquer, du moins à ce qu'il me paroît pour le présent, & qui demanderoit une plus longue discussion, & un plus grand nombre d'expériences physiques, que je n'ai pu répéter dans un voyage fait à la hâte. Mais si j'ai occasion dans la suite de passer quelque tems sur une côte maritime, d'où l'on découvre sur la mer quelques rochers & quelques promontoires, je reprendrai la matiere, & je l'examinerai plus à loisir.

Autre phénomene d'optique.

175. En attendant, voici une autre remarque d'optique qui a rapport aux réfractions. Du lieu le plus élevé de notre college de *Rimini*, nous regardions avec la lunette une tour située dans le port de *Pesaro*, & souvent elle nous paroissoit assez élevée au-dessus de la mer: d'autres fois, quoique le ciel fût très serein, & l'horizon très net, & qu'il régnât un vent de nord, nous n'en découvrions pas le moindre vestige: ce qui ne peut venir que de l'inégalité qui se trouve dans les réfractions horizontales. Au reste, le phénomene dont j'ai parlé plus haut, n'a pu vicier les angles par lesquels nous avons lié cette base à notre chaîne de triangles, puisque notre quart de cercle étoit placé à une hauteur d'où nous découvrions parfaitement le signal. Enfin nous prîmes alors aux deux extrémités de la base, & les deux jours suivans à *Rimini*, tous les angles qui étoient nécessaires pour lier notre observatoite de *Rimini* à notre suite de triangles, ou au signal situé à l'embouchure de l'*Ausa*.

Observations sur le mont *Luro*.

176. La mesure de ces angles terminée, nous partîmes de *Rimini* le 25 de juillet pour n'y plus revenir, & nous arrivâmes à *Granarola* chez M. *Annibal Olivieri*, dont nous avons parlé plus haut, & qui nous y attendoit. Le lendemain nous montâmes ensemble sur le mont *Luro* avec notre grand quart de cercle, & nous y prîmes tous nos angles au pied d'un clocher. Nous n'oubliâmes pas surtout de lier au signal de l'*Ausa* la fenêtre de la maison de M. *Garampi*, d'où nous avions observé le lever du Soleil; & de crainte de nous y méprendre, nous avions fait suspendre à cette fenêtre un drap blanc. Tandis que

que nous faisions ces observations, il y eut un tremblement de terre assez considérable, qui renversa plusieurs édifices aux environs du mont *Nerone:* mais entierement occupés de notre ouvrage, nous ne nous en apperçûmes point.

177. De retour à *Granarola*, nous passâmes trois jours chez M. *Olivieri*, pendant lesquels nous fîmes plusieurs excursions dans le voisinage pour la réformation de la carte. Ayant ensuite envoyé notre grand quart de cercle en un lieu voisin du mont de *Carpegne*, nous prîmes notre route par *St Marin*, où nous fîmes pour la troisieme fois, & par un beau tems, un grand nombre d'observations géographiques, & nous nous rendîmes à *Penna*. Aux environs de *St Marin* nous avons eu l'honneur de rendre nos devoirs à Mgr *Bonajuti*, Evêque de *Montfeltro*, qui, l'année précédente, nous avoit reçus chez lui à *Penna:* par un excès d'attentions, il voulut se charger du soin de faire transporter le quart de cercle au sommet du mont de *Carpegne*, & de nous faire préparer un hospice au pied de cette montagne: il s'y trouva lui-même au jour marqué, & monta deux fois avec nous sur la montagne, où il assista à toutes nos observations: de-là il nous conduisit à *Macerata*, petite ville aux extrémités de son diocese, & qu'il ne faut pas confondre avec une autre ville de même nom dans la Marche d'Ancone. On sent mieux que je ne pourrois l'exprimer, les obligations que nous avons à cet illustre Prélat. Voyage à *Penna* par *St Marin.*

178. En allant de *St Marin* à *Penna*, nous passâmes à *San Leo*, où l'on voit un fort ou citadelle d'une situation admirable, à la cime d'un rocher escarpé: elle étoit autrefois aux Ducs d'*Urbin*, & fait aujourd'hui partie de l'Etat de l'Eglise. Il y a long-tems que cette ville dispute à *Penna* la primatie & le siege de l'épiscopat; mais c'est presque toujours en cette derniere ville que les Evêques résident aujourd'hui. Nous eûmes l'honneur de dîner chez M. le Commandant de la citadelle, de l'ancienne famille *Semproni* d'*Urbin*, de qui nous apprîmes un fait qui mérite attention. Assez près de la citadelle est une petite maison de paysans, située dans un fond; des vieillards très dignes de foi, racontent que dans leur enfance l'ombre d'un des angles du fort atteignoit à midi, dans l'un des solstices, le seuil de la porte de cette maison, & qu'avec le tems Phénomene suprenant.



elle s'en étoit écartée peu à peu, jusques-là que l'ombre d'un autre angle, fort éloigné du premier, parvenoit presqu'au même point, dans le même tems de l'année : ce qui ne peut être arrivé que par un changement de position, ou dans le sol de la maison, ou dans la roche sur laquelle est bâtie la citadelle. Ce n'est pas le seul fait de ce genre dont nous ayons eu connoissance ; il y en a des exemples en plus d'un endroit : souvent des personnes nous ont assuré qu'on découvre aujourd'hui, & d'un assez grand espace de terrein, d'autres lieux qui, de leur vivant, ou du vivant de leurs peres, étoient couverts par une colline, quoiqu'il y ait sur cette colline des édifices : ce qui fait voir que le phénomene ne doit point s'attribuer à un éboulement des terres causé par le labourage & par les pluies. La terre s'éleve en certains endroits ; en d'autres elle s'affaisse peu à peu : c'est un fait connu, que l'on a vu quelquefois naître tout à coup des montagnes dans des plaines, & des isles sur la mer ; des couches de pierre ayant été soulevées par des feux souterreins : tant le lieu de notre séjour ressemble à notre vie ! dans l'un comme dans l'autre, rien de fixe ni de permanent.

1751. Août.

Observations sur le mont Carpegne. Notre route jusqu'à Cantiano.

179. Après avoir fait nos observations dans cette ville, nous allâmes à *Penna*, puis à *Scavolino*, & au sommet du mont de *Carpegue*, où notre hôte obligeant, M. *Garampi*, qui nous y suivit le lendemain avec M. l'Evêque, assista deux fois à nos observations ; car elles ne purent être terminées le premier jour. De-là prenant la route de notre station du mont *Catria*, nous passâmes par *Macerata* pour aller à *Urbanea* ; mais comme nous eûmes occasion en chemin de faire un grand nombre d'observations, nous fûmes surpris par la nuit, & nous n'arrivâmes qu'à grande peine à une chapelle célebre en ce canton, sous le nom de *Crucifix de Bataille*, & desservie par des Prêtres séculiers chez qui nous passâmes la nuit. Le lendemain de grand matin nous nous rendîmes à *Urbanea*. Après y avoir observé, j'eus encore assez de jour pour faire une excursion à *San Angelo in vado*, qui n'en est pas fort éloigné. Le jour suivant nous arrivâmes par *Cagli* à *Cantiano*, même chemin qui nous y avoit déja conduits l'année précédente.

180. Nous montâmes le lendemain au sommet du *Catria* :

le ciel étoit beau & serein, & nous ne pouvions desirer un tems plus favorable : mais nous eûmes beau chercher avec la lunette le signal de *Pennino*, situé près *Nocera*, nos recherches n'aboutirent qu'à nous convaincre qu'il n'y en avoit point, quoique j'eusse écrit deux fois un mois auparavant au Maire de *Nocera* pour le faire rétablir. Il fallut donc s'en revenir sans avoir pu finir cette tâche, & dépêcher sur le champ un nouvel exprès au Maire pour le faire souvenir de sa promesse. Nous n'en fûmes pas quittes pour attendre ; le tems changea, & le rétablissement du signal ne nous rendit pas les beaux jours que nous avions perdus. Enfin ce signal réparé, nous remontâmes sur la montagne ; nous y achevâmes de prendre nos angles, non sans beaucoup de peine; après quoi nous y fûmes assaillis d'une pluie qui nous accompagna encore à notre retour. Station du mont *Catria*.

181. Nous partîmes de *Cantiano* le 12 d'août pour *Perouse*. Nous vîmes en passant les fameuses tables de *Gubio*. Nous fixâmes la position de ce lieu du haut d'une montagne voisine. De *Perouse* nous nous rendimes à *Antignolla*, village du domaine des *Oddi*, situé au pied du *Tesio :* nous y étions invités par les Seigneurs du lieu, qui y attendoient leur parent M. le Cardinal *Oddi*, Evêque de *Viterbe*, lequel y devoit venir passer les vacances d'automne. Il avoit déja plu en abondance pendant plusieurs jours : nous profitâmes d'un tems équivoque pour monter au sommet de la montagne, où le quart de cercle, par une pente roide & difficile, ne put arriver aussi-tôt que nous. En attendant nous observions avec le petit quart de cercle, lorsque tout à coup le ciel se couvrit de nuages ; le tonnerre & les éclairs furent bientôt suivis d'une pluie affreuse qui dura plusieurs heures : nous les passâmes dans une cabane où nous ne pouvions nous tenir de bout. La pluie étant devenue moins forte, nous montions à cheval pour nous en retourner, lorsque nous nous apperçûmes d'un accident qui, sans les précautions que nous avions prises, eût anéanti dans un moment tout le fruit de nos travaux passés. Voyage à *Perouse* & sur le mont *Tésio*.

182. Nous avions un cahier contenant un recueil de toutes nos observations faites pendant deux ans, dans lesquelles nous avions déja corrigé toutes les erreurs provenantes de la division Recueil d'observations perdu.

du petit quart de cercle : nous le conservions précieusement ; sans jamais le porter sur les montagnes : malheureusement nous l'avions pris ce jour-là avec nous pour comparer nos nouvelles observations à celles de l'année précédente : il échappa sans doute dans le trouble où nous mit le commencement de l'orage. Dès qu'on s'en fut apperçu, je me mis à parcourir malgré la pluie tout le sommet de la montagne avec beaucoup de soin, mais inutilement. Le lendemain j'y menai une troupe de paysans pris à gages : je les rangeai par ordre, comme pour faire une battue, & nous reconnûmes surtout les endroits où le cahier avoit été ouvert : mais quoique le sommet de la montagne ne soit couvert que d'une herbe fort courte, nous ne pûmes rien trouver. Les gardes que nous y envoyâmes ensuite de *Perouse*, avec une autre escorte de paysans, ne furent pas plus heureux, malgré l'appas d'une grande récompense promise. Nous ne le cherchions avec tant de soin que pour n'être pas obligés de remettre en ordre, & de réduire de nouveau nos observations : ce qui devoit couter beaucoup de travail : mais ce soin même que nous prenions fit juger de la perte que nous avions faite, & le bruit s'en répandit au loin : quelques-uns même crurent & publierent partout, que nos observations étoient perdues sans ressource.

Cette perte est réparée.

183. Mais le mal n'étoit pas sans remede : j'avois toutes les observations qui concernoient la mesure du dégré, tant dans les tablettes où elles avoient été écrites au tems même de l'observation, que dans une copie où elles avoient été mises en ordre, parfaitement conforme en ce point à l'autre cahier, tiré de la même source. A l'égard des observations géographiques, qui étoient en bien plus grand nombre, je les conservois avec soin dans ces mêmes tablettes, où elles avoient été d'abord écrites, & d'où on les avoit transportées dans le cahier perdu : j'avois avec moi celles du voyage que nous faisions alors ; les autres étoient restées à *Rome* : le P. *Maire* les avoit aussi pour la plupart dans son porte-feuille ; & la perte se réduisit presqu'uniquement à un très petit nombre d'observations de peu de conséquence, auxquelles nous suppléâmes par d'autres observations de diverses personnes, plus encore par celles que nous fîmes nous-mêmes. Je suis entré dans ce détail pour qu'on

ne s'imaginât pas que nous eussions eu assez peu de précaution pour confier à un recueil portatif unique le travail de plusieurs années, au risque de nous voir obligés de tout recommencer. Du reste nous terminâmes un autre jour, & par un tems plus favorable, cette laborieuse station; & dès que nous fûmes de retour à *Perouse*, on transcrivit de nouveau tout ce qui avoit rapport à la mesure du dégré: les autres observations furent aussi en peu de tems réduites & mises en ordre dans un nouveau journal.

184. On nous avoit écrit de *Nocera* que le signal de *Penino* avoit été rétabli précisément à la même place, où il avoit été construit l'année précédente. Pour nous assurer de ce fait, nous ne jugeâmes pas nécessaire de retourner à *Nocera*: par les dernieres observations du mont *Tesio*, nous venions de voir ce signal dans la même position; & il étoit aisé de nous en assurer davantage par une seconde direction, en répétant l'observation sur le *Fionchi*. Ce fut surtout par cette raison que nous nous déterminâmes à retourner à *Spolete*. Nous observâmes sur la route en divers lieux, surtout à *Spello* & à *Foligno*: & nous ne fûmes pas moins heureux sur le *Fionchi*, où nos observations se trouverent conformes à celles de l'année précédente. De-là nous envoyâmes notre quart de cercle à *Soriano*, bien résolus de n'y plus observer sur les arbres, mais sur un terrein solide; pour cela, de faire abattre tous les arbres qui nous déroberoient la vue de nos signaux, & de garder pour signal celui des trois qu'on avoit laissé sur pied. Nous fîmes encore plusieurs courses dans la vallée de *Spolete*, & sur les collines voisines pour la correction de la carte, accompagnés de MM. *Antoine Ancajani*, & *J. B. Pianciani*, mon illustre ami; après quoi nous allâmes de *Spolete* à *Soriano* par le même chemin que nous avions suivi l'année précédente en allant de *Soriano* à *Spolete*. Station sur le *Fionchi*.

185. Arrivés au sommet de la montagne, nous fîmes un abattis comme pour ouvrir une grande route du côté qui regarde la montagne de *Spolete*: nous reconnûmes alors que le signal de *Fionchi* se projectoit sur d'autres montagnes, ainsi que le dôme de *St Pierre* sur le sol; & il nous fallut monter plusieurs fois sur le sommet du *Soriano*, avant que de les pouvoir

Septembre.

Station sur le *Soriano*.

découvrir diſtinctement, d'autant plus que nous étions déja au mois de ſeptembre, tems où l'on fait des feux dans toute la campagne de *Rome* pour brûler le chaume & les mauvaiſes herbes, & que les fumées obſcurciſſent toute l'atmoſphere. Enfin la biſe s'étant levée le 14 ſeptembre, nous terminâmes nos obſervations; & le lendemain nous arrivâmes à *Ronciglione*, & de-là par le grand chemin à *Rome*, d'où nous étions partis ſix mois auparavant.

Retour à *Rome*.

Répétition de quelques obſervations.

186. Il nous reſtoit à répéter les obſervations que les trois arbres du *Soriano* avoient rendues douteuſes l'année précédente, particulierement ſur le *Genarro*, & dans leſquelles on ne pouvoit plus être expoſé à aucune mépriſe depuis qu'on n'avoit laiſſé qu'un ſeul arbre pour ſignal. Nous avions enſuite à parcourir la terre de *Sabine*, le territoire de *Norcia*, & les montagnes voiſines, pour deſcendre de-là dans la Marche d'*Ancone*. Nous devions y ajouter la carte du petit pays qui eſt entre *Perouſe* & la grande route de *Rome* à *Florence*, & qui ſe trouve ſur la frontiere de Toſcane. Mais comme nous avions eu peine à découvrir du *Genarro* le ſignal de *Frattochie*, qui terminoit la baſe de *Rome*, ce qui rendoit cette obſervation fort incertaine; nous commençâmes par faire placer aux deux extrémités de la baſe les mêmes ſignaux que l'année précédente, & nous répétâmes de part & d'autre les obſervations pour les rendre plus ſûres.

187. Cela fait, nous allâmes pour la troiſieme fois à *Palombara;* & après avoir répété par un beau tems nos obſervations ſur le *Genarro*, nous renvoyâmes le grand quart de cercle à *Rome*, & nous commençâmes à parcourir la terre de *Sabine*. Un de nos premiers poſtes fut le mont *Pennecchia*, voiſin du *Genarro*, d'où nous paſſâmes à *Monte Flavio*, c'eſt un village de la maiſon *Borgheſe*, ſitué ſur une hauteur; puis à *Scandriglia*, à *Fara* qui domine les environs de *Farſa*, & qui eſt ſitué ſur une haute colline, & de-là nous paſſâmes à *Poggio Mirteto*, l'une des principales villes de cette province. Après avoir obſervé dans tous ces lieux, & les autres de notre paſſage, nous dirigeâmes notre route à travers les montagnes pour aller à *Rieti*. Nous nous arrêtâmes pluſieurs heures à mi-côte dans un hermitage abandonné: c'étoit un lieu des plus

Voyage dans la terre de *Sabine*.

propres aux obſervations à raiſon de ſa hauteur. Nous demeurâmes deux jours à *Rieti*, pendant leſquels nous fîmes quelques excurſions dans le voiſinage: après quoi nous entrâmes dans une délicieuſe vallée, pour aller voir les caſcades du *Velino*, où cette riviere, après avoir coulé tranquillement le long du vallon, ſe précipite de fort haut dans le *Nar*, à trois milles ou environ de *Terni*. De-là nous paſſâmes à un bourg nommé *Pie di Lugo*, ſitué au bout de la vallée de *Rieti*, & ſur le bord d'un lac très profond, auquel il donne ſon nom. Nous montâmes enſuite au village de *Morro*, d'où nous nous engageâmes dans des montagnes infeſtées par les ours, & arrivâmes de nuit à *Leoneſſa* ſur les frontieres du royaume de *Naples*. Le lendemain nous revînmes à *Monte Leone* dans l'Etat de l'Egliſe.

188. Nous deſtinâmes cette journée à viſiter le ſommet d'une montagne voiſine, d'où la vue s'étend dans les vallées de l'Apennin, & dans tout le pays en-deçà de ce mont: ce projet nous réuſſit heureuſement, & nous obſervâmes juſqu'à la nuit. Le jour ſuivant nous allâmes à *Coſcia* & à *Norcia*, qui ont été plus d'une fois renverſées par des tremblemens de terre. De *Norcia* nous fîmes pluſieurs excurſions, & particulierement ſur une haute montagne, d'où nous déterminâmes la poſition de la ville, & nous parcourûmes enſuite tout ſon territoire. Au ſortir de-là nous paſſâmes par pluſieurs petites villes & villages, du nombre deſquels eſt le *Preci*, dont les habitans ſont renommés pour quelques opérations chirurgicales, & en particulier pour celle de la taille; & nous arrivâmes à *Viſſo*, ville opulente, mais dont la ſituation affreuſe l'eſt encore moins que le chemin qui y conduit. Cette ville eſt comme au fond d'un entonnoir: la montagne qui l'entoure de toutes parts, eſt ſillonnée en zigzag de cinq ravines très étroites, & auſſi profondes que la montagne eſt haute: ce ſont comme autant de rayons dont la ville eſt le centre, & qui la font reſſembler à une étoile d'une monſtrueuſe groſſeur; les trois premiers ſervent de lit à autant de rivieres qui ne tariſſent jamais; le quatrieme à un torrent: ces quatre courans ſe réuniſſent dans le vallon reſſerré où eſt bâtie la ville, & de-là coule le *Nar* par le cinquieme rayon: le lit de cette

Suite. Affreuſe ſituation de *Viſſo*.

riviere eſt étroit ; ſes bords ſont un rocher taillé à pic ; quelquefois même ils ſe rapprochent par le haut ; & ſous l'un de ces côtés inclinés eſt un chemin taillé en partie dans le roc, où l'on ne peut entrer ſans être ſaiſi d'horreur. Il ne faut pas demander s'il y a de la vue dans cette ville : de quelque côté qu'on ſe tourne, on ne voit qu'une montagne eſcarpée ; car pour les cinq rayons anguleux dont je viens de parler, on les perd bientôt de vue dans la deſcente ; & en élevant la tête on ne découvre que la partie du ciel, voiſine du zénith.

Tentative inutile ſur une très haute montagne.

189. Ce n'étoit pas le lieu de faire des obſervations géographiques ; il fallut pour cela recourir aux montagnes voiſines ; celles qu'on nomme *des Sibilles* n'étoient qu'à quelques milles de *Viſſo :* elles forment une chaîne élevée, ſur laquelle pluſieurs pointes s'élevent encore davantage, & qui domine le pays de la Marche d'*Ancone :* le *Mont-rond* qui fait partie de cette chaîne, eſt un peu moins élevé que les pointes ; on ne laiſſe pas de découvrir de-là l'Etat de l'Egliſe, preſque dans toute ſon étendue, juſqu'aux confins de la Toſcane, & ſur la droite toute la Marche d'*Ancone*. Nous mîmes au moins ſix heures à monter, quoiqu'à cheval, par un chemin fort incommode ; & nous avions un ciel extrêmement pur, ſans le moindre ſouffle d'air : arrivés au ſommet, nous tirons le petit quart de cercle de ſon étui, & nous meſurons des yeux *Camerine*, les villes d'alentour, & celles de la Marche d'*Ancome :* nous étions prêts à relever tous ces points, lorſque nous nous trouvâmes tout à coup plongés dans un brouillard qui occupoit tout le ſommet de la montagne, & qui ſe convertit bientôt en une nuée noire. Jamais accident pareil ne m'a mortifié ſi ſenſiblement : un poſte ſi avantageux, & qui nous avoit tant couté à franchir, nous étoit enlevé au moment même où nous croyons en profiter. Nous eûmes aſſez de conſtance, ou pour mieux dire d'obſtination, pour reſter trois heures au milieu de cette nue, expoſés à un vent impétueux ; le Soleil qui dardoit ſes rayons un peu au-deſſous de nous, & qui éclairoit les flancs de la montagne, nous donnoit quelque lueur d'eſpérance ; mais la nue encore plus opiniâtre la fit enfin évanouir : cependant le jour baiſſoit, & il fallut ſonger à la retraite. A peine étions-nous deſcendus un

peu

peu au-dessous du sommet de la montagne, que le Soleil reparut, & nous découvrit, tant que la vue pouvoit s'étendre, tout le pays situé à l'occident, mais en pure perte, ne pouvant plus le lier avec les objets de l'orient & du nord.

190. Comme la nuit approchoit & que nous espérions de pouvoir monter le lendemain au sommet de la montagne, nous nous détournâmes un peu de notre route pour aller à l'église de Notre-Dame de *Macereto*, à laquelle on a beaucoup de dévotion dans le pays. Les Prêtres qui desservent cette église nous firent grand accueil; leur maison est ample & commode; nous y passâmes la nuit. Dès qu'il fut jour, le sommet de toutes ces montagnes parut tout couvert de neige, & enveloppé d'épais nuages: ce qui nous obligea de renoncer à notre projet, & de retourner à *Visso*, d'où nous montâmes le lendemain avec beaucoup de peine sur une assez haute montagne qui est du côté opposé. Nous avions pris avec nous un homme du pays pour nous indiquer les lieux voisins; & n'ayant pu lui trouver à tems un cheval, je lui cédai le mien: je montai à pied pendant trois heures, & j'arrivai au sommet trempé de sueur, dans le même état qu'un homme qui sort du bain. Ce n'étoit pas là mon coup d'essai: un jour que nous devions monter sur le *Genarro*, ma mule de louage s'étoit échappée pendant la nuit: en attendant qu'elle se retrouvât, je me mis en chemin avant le point du jour pour arriver au sommet vers le lever du Soleil: j'en ai usé de même en plusieurs autres rencontres; & je puis me rendre le témoignage de n'avoir jamais laissé échapper une occasion favorable d'observer, dans la vue de m'épargner quelque incommodité.

On est contraint de lui en substituer une autre.

191. De-là nous déterminâmes de notre mieux la position de *Visso*; d'où nous partîmes le lendemain de grand matin. Nous entrâmes dans une large vallée qui ressemble à une plaine, & dont le sol est plus élevé que le sommet de plusieurs montagnes. Le tems étoit serein; mais nous avions à notre gauche les montagnes de la Sibille, sur lesquelles il tomboit de la neige, que les vents, malgré la distance, portoient jusqu'à nous. Nous allions à *Arquata*, ville autrefois riche & peuplée, en prenant notre route par un petit village qu'on nomme le *Castelluccio*, dont la plupart des habitans

Haute vallée. Hyver de *Castelluccio*.

1752. Octobre.

passent l'hyver à la maniere des Lapons, comme on nous en assura dans l'endroit même. Pendant cette saison, les hommes en état de voyager conduisent à *Rome* des chevaux chargés de charbon, préparé dans les forêts voisines; ils vivent de ce commerce; tandis que les vieillards, femmes & enfans restent ensevelis dans leurs maisons sous la neige pendant plusieurs jours, & quelquefois des mois entiers, sans pouvoir mettre le pied dehors, & sans autre boisson que de l'eau de neige fondue au feu: pour cela ils amassent une grande quantité de bois pendant l'automne, & font provision de farine pour tout l'hyver.

Danger dans une gorge de montagne.

192. Au bout de la vallée dont je viens de parler, nous tombâmes dans une gorge fort étroite, par laquelle on descend de la montagne de la Sibille dans la Marche d'*Ancone*: la petitesse du détroit augmentoit la force du vent, au point que les nuages portés par le vent contre le flanc de la montagne, s'élevoient en se brisant comme des vagues, & sembloient jetter de l'écume; ensorte que nos chevaux avoient beaucoup de peine à avancer. On nous apprit que ce passage est souvent impraticable, & qu'il est arrivé plus d'une fois que des voyageurs, enlevés avec leurs chevaux par un vent impétueux, ont été jettés fort loin, & écrasés contre les rochers. Arrivés au côté opposé de la montagne, nous découvrîmes une grande partie de Marche d'*Ancone*, & la petite ville même d'*Arquata* resserrée sur les bords du *Tronto*, & dans un fond extrêmement bas: car la côte, qui s'éleve peu à peu, & comme par dégrés, de la vallée du *Tibre* à celles de *Terni*, de *Rieti*, de *Norcia*, & à celle de *Visso* dont nous venons de parler, finit tout d'un coup en ce lieu, où elle est coupée presque verticalement sur la rive du *Tronto*. De ce point de vue *Arquata* offre le même aspect qu'une petite place vue de la fenêtre d'un étage très élevé. Le spectacle du ciel couvert de nuages noirs, qui s'étendoient jusqu'à la mer, inspiroit de l'horreur. La nuit étoit fermée quand nous tombâmes dans la ville: je dis que nous tombâmes, car la pente étoit si rapide, que nos chevaux, en roidissant les jambes, glissoient par leur propre poids, comme sur un plan incliné. Alors nous fûmes accueillis d'une pluie horrible; &, ce que je n'avois vu nulle part, elle tomba

pendant trois jours & trois nuits sans interruption ; de sorte que les terres furent toutes détrempées dans tout ce canton, & dans la province d'*Ascoli*, & qu'en partant d'*Arquata*, nous fûmes obligés pendant les deux premiers jours de notre marche de prendre de grands détours pour éviter les embarras du chemin, causés par l'éboulement des terres qui le bordoient, & les boues encore fraîches dont on avoit fait de grands monceaux d'espace en espace.

Voyage dans la Marche d'*Ancone*. Observations de physique.

193. Le vent de nord s'éleva subitement le quatrieme jour, & nettoya tout l'horizon : nous vîmes alors la montagne entierement couverte de neige ; ainsi après avoir fixé la position de ce lieu, nous suivîmes le cours du *Tronto*, à travers quantité de villages & de bourgs, jusqu'à l'endroit où les chemins n'étoient plus praticables. La riviere étoit extraordinairement enflée, & il y avoit long-tems que son pont étoit tombé en ruine. Nous couchâmes à trois milles d'*Ascoli*, ne pouvant ni avancer, ni passer la riviere. Le lendemain nous quittâmes le grand chemin, qui de-là jusqu'à la ville est assez large, & même, en d'autres tems, commode pour les voitures ; mais qui rompu alors, n'étoit pas même bon pour des gens de pied. Nous prîmes des chemins de traverse, par les montagnes, & nous ne pûmes arriver à *Ascoli* que sur le midi. L'après dînée nous allâmes observer à la citadelle, & le lendemain sur le mont *Polesio*, qui tire son nom d'un bourg adjacent, & d'où l'on découvre presque toute la Marche d'*Ancone* : le tems étoit beau, & nous le mîmes à profit en faisant un très grand nombre d'observations. J'examinai en montant, & ensuite sur le sommet, la structure de cette montagne, qui, bien que fort éloignée de la mer, étant adossée à l'Apennin, est toute composée de cailloux ronds & plats, polis par le frottement, que l'on nomme *galets*, tels qu'on en trouve au bord de la mer, & dans les lits des rivieres. Ces pierres étoient fort inégales pour la grosseur, & elles formoient différentes couches paralleles à la surface de la montagne : de sorte que je n'ai aucun doute que des feux souterreins n'aient fait sortir cette montagne de la mer, ou plutôt du lit de quelque riviere, car je n'y trouvai point de coquillages ; & je crois que telle est l'origine de plusieurs montagnes & de plusieurs isles.

Structure des montagnes.

194. Je remarquerai à cette occasion, qu'en observant les montagnes, partout je les ai trouvées d'une structure admirable : ce qui n'est jamais plus sensible que dans les endroits où elles sont traversées & minées de longue main par le cours des rivieres. J'ai vu au-dessous de *Magliano*, ville considérable de la terre de Sabine, un banc continu, formé d'un amas prodigieux d'écailles d'huitres : mais c'est la seule fois que j'aie trouvé des corps marins, ou autres indices de mer, dans un lieu éminent fort éloigné des côtes. La plupart des montagnes sont composées de couches de pierres, entre lesquelles il y a souvent des couches de terre de différente épaisseur, & à intervalles inégaux. Ces couches suivent en plusieurs endroits la courbure de la montagne ; mais souvent aussi elles s'élevent, & sont plus ou moins inclinées sur sa surface : ce qui indique que le reste de la couche, dont elles faisoient partie, s'est écroulé par quelque accident. Souvent encore on voit deux couches appuyées l'une contre l'autre par une de leurs extrémités, comme les deux faces d'un coin : elles semblent s'être prêté un mutuel secours dans leur chute. On trouve quelquefois des montagnes composées de rochers aussi différens pour la figure que pour la grosseur, & où l'on ne découvre aucune régularité dans la direction des couches. Dans la vallée de *Sublaque*, sur la route de *Tivoli*, on voit à gauche quantité de grosses pointes de montagne, de figure conique, les unes couchées au pied des autres, en telle sorte qu'il est aisé de voir de quel côté elles sont tombées. C'est ce qu'on reconnoît surtout au-dessous de la chapelle de *Mentorella*, & de maniere à ne laisser aucun doute. J'ai remarqué sur le mont *Soriano*, ce que je n'ai vu nulle part ailleurs, qu'il ne s'y trouve aucune couche réguliere, aucun banc de roche : ce n'est qu'un amas confus de grosses pierres saillantes, irrégulierement arrondies, dont la plupart ont dix à douze pieds de diametre : les habitants de *Soriano* en font voir une qui est tellement en équilibre, qu'en montant dessus on l'ébranle par le moindre mouvement du corps, & on lui communique une sorte de tremblement. Tout cela me porteroit à croire que le lac voisin, désigné par ces mots de Virgile, *& cimini cum monte lacus*, étoit autrefois un volcan,

dans le sein duquel ces masses de pierre se sont arrondies par de longs frottemens; qu'elles ont ensuite été lancées au dehors, dans le tems des explosions, & se sont accumulées en cet endroit. Quoi qu'il en soit, plus je considérois la surface de notre globle, plus je découvrois de vestiges d'un bouleversement immense, & comme un amas de ruines, au lieu de sa tissure primordiale. Je reprends la suite de nos opérations.

Voyage à *Montalte* & autres lieux.

195. Nous descendîmes de l'autre côté de la montagne, & nous arrivâmes sur le soir à *Montalte*, patrie de Sixte V, où l'on voit encore plusieurs édifices commencés, par lesquels ce grand Pape s'efforçoit de faire une ville d'un petit bourg: mais une mort prématurée l'ayant enlevé, la ville est aujourd'hui presque déserte, & le Commandant & l'Evêque n'ont à peu près pour toute compagnie que des paysans. Nous y fîmes nos observations le lendemain matin, après lesquelles nous nous rendîmes à travers plusieurs petites villes & bourgs à *Cupra Montana*, aujourd'hui *Ripa Transone*, où nous fûmes accueillis gracieusement par M *Recchi*, Evêque de cette ville, personnage célebre par son érudition en tout genre, ci-devant Préposé à la bibliotheque impériale, ainsi nommée à cause qu'elle a été fondée par le Cardinal *Impériali :* il nous procura une carte de la Marche d'*Ancone*, non encore publiée, & dessinée autrefois par un habitant de cette ville : elle est plus exacte qu'aucune des cartes gravées que nous ayons pu voir, quoique nos observations nous aient fait connoître qu'elle avoit besoin de plusieurs corrections. Le jour suivant nous côtoyâmes de loin le golfe de *Venise :* nous arrivâmes le soir à la petite ville de *Monte Robiano*, & le lendemain à *Fermo*, où il y a beaucoup d'ancienne noblesse, une Académie publique, & un riche archevêché. Nous y fîmes aussi-tôt, ainsi que dans tous les lieux de notre passage, nos observations géographiques ; & le jour suivant nous passâmes par *San Elpidio* & *Civita nuova*, deux villes opulentes & peuplées, dont la derniere est du domaine de la maison *Cesarini*. Nous arrivâmes sur le soir près de *Monte Santo* à la maison de campagne des *Bonacorsi*, où toute la famille se trouvoit alors rassemblée; maison dont la beauté & la magnificence répondent à l'opulence des maîtres: on y voit quantité de

ſtatues de marbre, d'allées & de berceaux de charmilles, de jets d'eau, de fontaines, dont les unes ſont à découvert & coulent continuellement, & d'autres ſemblent être placées en embuſcade pour tendre des pieges aux ſpectateurs curieux. Après avoir ſatisfait pendant quelque tems notre curioſité, nous nous retirâmes à notre college de *Monte Santo*, où nous n'arrivâmes qu'à nuit cloſe.

Voyage à *Lorette*, *Oſimo*, &c.

196. Le lendemain matin nous montâmes ſur une haute tour, d'où nous découvrîmes la montagne de *St Marin* près de *Rimini*. Le tems étoit très beau, & pendant tout notre voyage dans la Marche d'*Ancone* il n'a point ceſſé de nous être favorable. Ces obſervations finies, nous arrivâmes à *Lorette* & de là à la montagne d'*Ancone*, où, après avoir paſſé la nuit dans le monaſtere des Camaldules, nous montâmes à la pointe du jour au ſommet, où nous relevâmes quantité de points, & des plus importans. Nous découvrions la chaîne de l'Apennin, particulierement le *Catria* avec ſon ſignal. Quant à la montagne de *Nocera*, dont le ſignal trop négligemment conſtruit, étoit tombé peu après pour la troiſieme fois, nous ne pûmes le reconnoître: mais au point du jour nous découvrions très diſtinctement, même à la vue ſimple, les montagnes d'au-delà du golfe. Nous deſcendîmes & nous arrivâmes avant midi à *Oſimo*, où, tandis que nous obſervions dans un clocher, nous entendîmes la groſſe artillerie de la citadelle d'*Ancone*, à l'arrivée de M. Jean *Lambertini*, petit neveu de Sa Sainteté, jeune Prince de la plus grande eſpérance, qui ſe rendoit à *Rome* pour la premiere fois. La fumée du canon nous donna lieu de déterminer la poſition de cette citadelle, dont une montagne interpoſée nous déroboit la vue. Nous arrivâmes le même jour, quoique très tard, à *Macerata*, où nous avions déja obſervé deux fois à loiſir: nous en partîmes le lendemain à la premiere pointe du jour, & nous arrivâmes par *Tolentino* à *San Gineſio* ſur une hauteur, ville autrefois très célebre, aujourd'hui preſque déſerte. Après y avoir pris nos relevemens, le ſoir à notre arrivée, & le lendemain matin, nous rebrouſſâmes chemin, & nous revînmes par *Tolentin* à *Montemelone*, village placé ſur une éminence, où, ayant été retenus de force par M. le

Marquis *Ricci*, qui avec sa famille & quelques amis, y étoit venu prendre l'air de la campagne, nous observâmes à loisir ce jour-là & le jour suivant. De-là nous nous rendîmes avant la nuit dans une ville beaucoup plus peuplée, appellée *Montecchio* : le poste étoit des plus avantageux ; nous profitâmes du peu de jour qui nous restoit pour y observer ; & bien nous en prit, car dès le lendemain il recommença à pleuvoir à verse ; & il plut si long-tems, que nous n'eussions pu faire aucune observation en ce lieu.

197. C'est-là le terme des voyages que j'ai faits avec le P. *Maire* : il étoit tems d'aller reprendre ma classe de mathématique, pour laquelle on avoit été obligé de me donner successivement deux Suppléans, les deux années précédentes : le P. *Maire* étoit plus libre. Il fut donc résolu qu'après un petit détour, pour fixer la position de *San Severino*, qui nous étoit absolument inconnue, j'irois prende la grande route pour m'en retourner à *Rome* par le plus court chemin, tandis que le P. Maire parcourroit le reste de la Marche d'*Ancone*, le long des montagnes, & passeroit ensuite l'*Apennin* pour revenir à *Rome* par cette petite contrée, voisine de la Toscane, dont nous n'avions encore pu lever la carte. Nous étions alors au 2 de novembre, & nous espérions que l'ouvrage pourroit être terminé dans le courant du mois.

Projet de séparation.

1752. Novembre.

198. Notre espérance fut encore trompée par une suite constante de mauvais tems, à laquelle il n'y avoit eu aucun lieu de s'attendre. La pluie me reconduisit de *Montecchio* à *San Severino*, où je profitai de quelques momens favorables pour observer de dessus une hauteur : je m'étois à peine remis en route par des chemins de montagnes, qu'il recommença à pleuvoir, & il plut à verse jusqu'à la nuit. Je n'étois pas à un mille de *Camerino*, & je ne pus le découvrir : enveloppé de brouillards épais, je voyois à peine à 20 pas. Comme j'étois déja tout percé, je crus que je ne risquois plus rien de continuer ma route, & j'arrivai enfin par un chemin peu connu, & fort mauvais, surtout dans la saison où nous étions alors, sur la grande route, près de *Seravalle*, bourg connu de tous les voyageurs ; d'où je me rendis promptement à *Rome* pour y reprendre mes fonctions interrompues.

Retour de l'Auteur à *Rome*.

Le P. *Maire* continue les observations géographiques.

199. Le P. *Maire*, souvent contrarié par le mauvais tems, employa tout le mois de novembre & les premiers jours de décembre à exécuter une partie de ce qu'il avoit projetté; & n'espérant plus de pouvoir finir, il renvoya le reste à une saison plus commode. Je joins ici la relation qu'il a donnée lui-même de son travail.

» 200. J'arrivai (c'est le P. *Maire* qui parle) de *Montecchio* » à *Cingoli*, & je logeai chez M. *Raffaeli*, qui étoit pour » lors à sa maison de campagne de *Staffolo*, où il me fit aussi » l'honneur de m'inviter. Après deux jours passés à *Cingoli*, » presqu'en pure perte, je revins à *Staffolo*, où le tems s'étant » remis au beau, j'eus lieu d'être satisfait de mes observations. » De-là je me rendis à *Fabriano*, où je prolongeai mon sé- » jour jusqu'à ce que le tems, qui étoit fort variable, m'eût » permis de déterminer la position de cette ville, & celle de » *Mantelica*. Ensuite je suivis le cours de l'*Esino* jusqu'à *Jesi*, » par un chemin qui ne le cede en rien aux plus belles routes » de *Rome*: un brouillard épais ne me laissa qu'un moment » pour observer. Le lendemain matin j'allai à *Monte Rado*, » métairie du college germanique. L'observation fut encore » très courte à *Corinaldo*, par la même raison, & le tems fut » si obscur pendant six jours, qu'il me fut impossible de rien » faire; enfin le septieme jour j'allai relever quelques points » à *Mondolfo*; & comme la saison étoit avancée, car nous » touchions déja à la fin de novembre, je laissai *Mondavio*, » où j'avois d'abord projetté de faire une station, & j'allai » droit à *Pergola*. Je déterminai un jour la position de *Sasso* » *Ferrato*, un autre jour celle de *Fenigli*, château ruiné sur » une hauteur: de celle-ci dépendoit la position même de » *Pergola*. De-là je me rendis à *Fossombrone*, puis à *Mon-* » *talte* qui n'en est éloignée que de trois milles: j'y relevai un » grand nombre de points, qu'un vent impétueux & un froid » piquant me firent acheter chérement. J'allai ensuite au » commencement de décembre à *Cantiano*, où je fus retenu » deux jours par une neige abondante qui m'avoit déja ac- » compagné pendant tout ce voyage; & ce ne fut pas sans » péril que j'arrivai le troisieme jour à *Gualdo*, d'où je revins » en droiture à *Rome*.

1751. Décembre.

» 201,

» 201. Il restoit à fixer la position de plusieurs villes, entre » autres de *Todi*, *Orviette*, *Citta della Pieve*, & *Camerino*. » Ainsi au mois de mai de l'année suivante 1753, je me rendis » à *Fiano*, & après en avoir déterminé la situation, j'attendis » une occasion pour monter sur le mont *Soracte*, aujourd'hui » *Sant Oreste* : elle se présenta deux jours après, & tandis » que j'y étois à observer, il s'éleva un orage qui m'obligea » à passer la nuit dans une maison de Bernardins, bâtie sur » cette montagne. Le lendemain, après avoir terminé cette » station, je revins à *Fiano*, d'où je passai à *Viterbe* & de- » là à *Orviette*. Après avoir déterminé la position de cette » ville, qui, bien que située sur une roche, est presque ca- » chée dans un fond, je me proposai de faire deux excursions, » l'une à *Bagnarea* & sur les bords du Tibre; l'autre en sui- » vant presque le cours du *Paglia*, à *Acquapendente*, jusqu'à » *Proceno*; d'où je revins par *Bolsena* à *Orviette*. J'avois re- » mis à en faire une troisieme sur le mont *Peglia* en reve- » nant à *Todi* : ce qui n'a point été effectué. D'*Orviette* je » me rendis à *Citta della Pieve*, & de-là sur le mont *Cetona*, » où un brouillard m'enleva presque tout le fruit de mon tra- » vail. Je ne fus pas plus heureux au mont *Pratolenze*, d'où » je ne pus relever que deux ou trois points voisins, par l'i- » gnorance du prétendu Pratique du pays, qui s'étoit fait » fort de me les indiquer tous, & qui ne put m'en nommer » davantage. Ces observations faites, je passai par *Perouse* & » je m'avançai jusqu'à *Citta di Castello*, & à *Apecchio* pour » monter de-là sur le *Nerone*, & en placer les environs sur » la carte. Nous étions alors au mois de juin. Parvenu au » sommet de la montagne par un chemin très rude, je me trou- » vai tout à coup investi d'un brouillard épais : bientôt il fut » suivi d'une forte pluie : je la supportai pendant trois heures, » après lesquelles, voyant qu'elle ne cessoit point, je n'eus » d'autre parti à prendre que de m'en retourner à *Apecchio*. Le » lendemain le tems ne se rétablissant point, je revins à *Citta* » *di Castello*, ensuite à *Perouse*. Ma santé se trouvoit alors un » peu altérée : ce qui fit que je ne montai point sur le *Peglia*, » suivant mon premier projet, & que j'allai en droiture à *Todi*. » Je relevai quelques points aux environs de cette ville, en

1753. Mai.

Nouvelle excursion pour finir les observations.

Juin.

» laissant ceux qui étoient au-delà du *Tibre*, étant pressé de » me rendre à *Camerino*: j'y fus gracieusement accueilli par » M. le Marquis *Bandini*, & j'y restai quelques jours pour » lever avec lui la carte des environs. Enfin comme il restoit » encore quelques points à déterminer dans la terre de *Sabine*, » je passai par *Terni* & *Rieti*, d'où je revins à Rome ». Ici finit la relation du P. *Maire*.

1751. Novembre. Observations astronomiques.

202. Pendant le premier voyage du P. *Maire*, je montai le secteur qu'on avoit rapporté de *Rimini* à *Rome*; & les pluies ayant un peu relâché sur la fin de novembre, je commençai à répéter les observations de nos deux étoiles, pour confirmer de plus en plus celles de l'année précédente; & le P. *Maire* arrivant sur ces entrefaites, les continua avec moi. Un grand nombre d'observations parfaitement d'accord entre elles, & réduites à la même époque, nous donna à peine une seconde de différence pour le lieu de l'une de nos étoiles, comparé à celui de l'année précédente, & deux secondes pour celui de l'autre étoile; ce qui confirme admirablement la théorie de l'aberration annuelle de la lumiere, découverte par M. *Bradley*: car dans l'intervalle du tems écoulé entre les premieres & les dernieres observations, l'une de nos étoiles devoit se rapprocher, l'autre s'éloigner considérablement du pôle; & il fut prouvé par nos observations qu'il en étoit arrivé ainsi. Nous nous en sommes tenus aux observations de l'année précédente, parcequ'ayant été faites à un moindre intervalle de tems, elles sont moins sujettes aux erreurs qu'on peut commettre dans la réduction des variations apparentes des étoiles fixes: mais si nous nous servions des dernieres, ou que nous prissions un milieu, à peine trouveroit-on aucune différence dans la mesure du dégré.

1753. Juin. Observations au dôme de St Pierre. Position du polygone.

203. Pendant l'Eté de 1753, le P. *Maire* étant de retour de son second voyage, comme nous pouvions désormais disposer de notre tems, nous choisîmes un des plus beaux jours pour monter avec le grand quart de cercle sur le dôme de *St Pierre*, & lier ce dôme au mausolée de *Metella* & à la montagne de *Soriano*. Nous prîmes les angles nécessaires, & de plus l'angle formé par deux lignes tirées du dôme aux extrémités de la plate-forme du college romain, qui a près de

500 palmes (1) de longueur, & que nous mesurâmes depuis à la toise, en prenant ensuite à ses deux extrémités les angles que cette base forme avec le dôme; ce qui nous a donné moyen de lier à la suite de nos grands triangles le dôme, la plate-forme, & le lieu de nos observations astronomiques. Il ne restoit plus que l'observation par laquelle nous devions déterminer la position des côtés de nos triangles, par rapport à la méridienne, d'une façon plus sûre & plus commode que nous ne l'avions pu faire à *Rimini* : c'est ce que nous exécutâmes à *Rome* au mois de septembre de cette année 1753, en mesurant l'angle que formoit l'arbre de *Soriano*, que nous découvrions de notre plate-forme entre deux grands palais, avec le Soleil couchant qui se trouvoit alors dans une position favorable : & nous répétâmes cette observation jusqu'à trois fois, toujours avec un parfait accord. Nous avions déja fait quelques tentatives pour mesurer l'angle entre le sommet du *Genarro* qu'on découvre aussi de la plate-forme, & le Soleil levant; mais outre qu'il n'y avoit plus de signal sur le *Genarro*, le sommet de cette montagne ne forme qu'un angle de quelques dégrés avec le Soleil levant, au solstice d'Eté; & pendant tout le reste de l'année le Soleil se leve derriere le mont *Quirinal* : ainsi le plan du quart de cercle étoit tellement incliné, que nous ne pouvions commodément pointer à la fois les deux lunettes au Soleil levant, & au sommet du *Genarro*. Enfin l'angle étant fort aigu, la plus petite différence de réfraction (dans la hauteur du Soleil) en auroit produit une fort considérable dans la réduction de cet angle à l'horizon. Toutes ces raisons nous obligerent à préférer l'angle entre le Soleil couchant & l'arbre de *Soriano*, qui subsiste encore, & qui subsistera, comme je l'espere, bien des années. Septembre.

204. Toutes nos observations terminées, nous employâmes beaucoup de tems à vérifier les divisions du secteur & du quart de cercle, par diverses méthodes que j'expliquerai au quatrieme livre, jusqu'à ce que l'accord de plusieurs tentatives ne nous laissât plus aucun doute sur les corrections que nous devions faire : & après que toutes les observations eurent Grandeur du dégré.

(1) Ou 57 toises 2 pieds.

été corrigées & réduites par de longs calculs, également pénibles & rebutans, nous pûmes enfin déterminer avec certitude la mesure du dégré. L'intervalle compris entre les paralleles qui passent par nos observatoires de *Rome* & de *Rimini*, c'est-à-dire par le milieu de la salle du Musæum du college romain, & l'endroit de la maison de M. *Garampi* où nous nous étions établis à *Rimini*; cet intervalle, dis-je, calculé sur la base de *Rimini*, est de 161253.6 pas, ou de 123221.3 toises. Or par les premieres observations faites à *Rome* de l'étoile α du cigne, nous avons trouvé l'amplitude de l'arc intercepté de 2 d. 9′ 46″ $\frac{1}{10}$; par les premieres de μ de la grande ourse 2 d. 9′ 47″.4; par les dernieres de α du cigne 2 d. 9′ 48″.8; de μ de l'ourse 2 d. 9′ 46″: le milieu entre les premieres, est 2 d. 9′ 46″.7; entre les dernieres 2 d. 9′ 47″.4; entre toutes les observations 2 d. 9′ 47″: l'accord ne pouvoit être plus grand. Prenant donc un milieu entre toutes les observations, le dégré moyen se trouve de 56966.3 toises. Mais parceque la base de *Rome* est plus grande d'environ un pas par la mesure actuelle que par le calcul; parceque le dernier côté de nos triangles, réduit à l'horizon, a été trouvé d'environ trois toises plus long par une méthode différente de celle par laquelle la suite entiere y a été réduite; enfin parceque les premieres observations de *Rome* sont les plus sûres, ayant précédé de très peu celles de *Rimini*, & que celles de α du cigne sont plus sûres que celles de μ de l'ourse; nous avons ajouté au dégré près de 13 toises: ce qui le fait monter à 56979 toises pour une latitude de 42 d. 59 min., ou environ 43 d.

Ce dégré comparé à celui de France.

205. Par-là nous avons rempli le premier objet de notre mission, qui étoit de déterminer exactement la longueur d'un dégré du méridien dans l'Etat de l'église: dégré qu'il faut ensuite comparer avec ceux que les Académiciens de *Paris* ont mesurés en divers lieux de la terre, comme je l'ai fait à la fin du Chapitre I, & comme je le ferai encore dans le cinquieme livre, surtout avec celui de M. *Cassini*, mesuré en France par la latitude de 43 d. $\frac{1}{2}$, qui est de 57048 toises, c'est-à-dire de 69 toises plus grand que le nôtre (1), malgré

(1) Voyez la note du n°. 75.

l'addition que nous y avons faite de 13 toises, qui étoit tout ce que nous pouvions y ajouter, au lieu que n'étant plus éloigné que le nôtre de l'équateur que d'un demi-dégré, il n'auroit dû être que de 8 toises plus long.

206. Ce n'est pas là l'unique fruit que nous ayons retiré de notre travail; car il s'ensuit en premier lieu, que tous les méridiens ne se ressemblent point, c'est-à-dire qu'à égale distance de l'équateur, leur courbure est inégale, & que cette inégalité même, pour une différence de dix dégrés seulement en longitude, qui se trouve entre les méridiens de *Paris* & de *Rome*, est assez considérable: c'est un fait dont on n'avoit point encore de preuve avant notre mesure. De plus, comme il est très probable que cette différence de courbure a été produite par l'action de l'Apennin sur le fil à plomb du secteur, comme aussi par celle de tout le sol de l'Italie qui va en s'élevant depuis la mer jusqu'aux montagnes, & par une action semblable, mais en sens contraire, des monts pyrénées sur le fil à plomb du secteur de M. *Cassini*, action qui change la direction des graves, & la position de la surface de l'équilibre; il s'ensuit en second lieu que notre mesure confirme de nouveau la théorie de *Newton* sur la gravitation mutuelle des corps terrestres. Cause de leur différence.

207. Ajoutons que nous avons déterminé à *Rome* la hauteur du pôle avec plus de précision & de certitude qu'on ne l'avoit encore fait, par la comparaison de nos observations, surtout de celles de β d'*auriga*, avec celles de la même étoile faites à *Paris*. Nous avons trouvé pour la hauteur du pôle dans le musæum du college romain 41 d. 53 min. 55 sec., & aux thermes de Dioclétien, 41 d. 54 min. 10 sec., c'est-à-dire 17 sec. de moins que n'avoit trouvé M. *Bianchini*. Hauteur du pôle à *Rome*.

208. Ajoutons encore que nos observations confirment admirablement la théorie de l'aberration de la lumiere: car elles font connoître, à une ou deux secondes près, la quantité dont une de nos étoiles s'est approchée, l'autre éloignée du pôle, depuis le mois de mars 1751 jusqu'au mois de décembre 1752; & cette quantité étoit assez considérable: de sorte qu'en appliquant aux premieres & aux dernieres observations la correction qui résulte de cette théorie, & en prenant un milieu, Théorie de *Bradley* confirmée.

on ne trouvera pour l'amplitude de l'arc céleste, déterminé par ces observations, qu'une différence d'une fraction de seconde; & les deux étoiles donneront encore les mêmes résultats; au lieu que si on négligeoit cette réduction, une étoile donneroit 20 secondes de plus que l'autre pour l'amplitude de l'arc. Mais cette théorie même étoit déja prouvée par tant d'autres observations, qu'elle n'avoit pas besoin de cette nouvelle confirmation.

Instrumens perfectionnés.

209. Ajoutons enfin qu'à l'occasion de cette mesure, on a imaginé quelque chose de nouveau pour la construction & la rectification des instrumens: c'est ce que j'expliquerai dans le quatrieme livre; & j'espere que ce morceau ne déplaira pas aux Astronomes, & sera de quelque utilité.

Correction de la carte.

210. Je passe sous silence plusieurs autres avantages que nous avons retirés de la mesure du dégré, premier objet de notre voyage. A l'égard du second, on a une nouvelle carte des Etats du Pape, beaucoup plus correcte que toutes celles qui ont paru jusqu'à ce jour. Le P. Maire en parlera plus au long dans le troisieme livre, & donnera en même tems une table des longitudes & latitudes de toutes les villes & autres lieux principaux, dans lesquelles il n'y a pas à craindre qu'il s'y trouve une minute d'erreur. Cette table est le principal fruit que nous ayons retiré de cette partie comme accessoire de notre entreprise: nous étions chargés uniquement de rectifier la carte géographique de l'Etat de l'église, non de faire une carte topographique de chaque Province, où l'on pût reconnoître toutes les sinuosités des chemins & du cours des rivieres, ou des torrens; la position exacte de toutes les montagnes, & des petits bourgs cachés au fond des vallées, & jusqu'aux plans des villes: détails qui sont du ressort des Arpenteurs, & qui exigeroient un travail de plusieurs années. C'est ce qu'ont fait les villes de *Perouse*, de *Boulogne* & de *Camerine*, qui n'ont épargné ni tems, ni soins, ni dépense pour faire la topographie de leur pays. Si leur exemple étoit suivi, on pourroit tirer de ces cartes particulieres des Provinces, ou des territoires de chaque ville, les détails qui manquent encore à notre carte, en remplissant les intervalles de ce grand nombre de points dont nous avons fixé la position avec la plus grande

exactitude par des instrumens d'un plus long rayon, & corriger même ces détails intermédiaires par nos propres observations : car la méthode dont se sert le commun des Arpenteurs, peut bien suffire pour donner une description exacte d'un petit terrein ; leur science pour l'ordinaire ne va pas plus loin ; & dès qu'il est question de tout un pays, les erreurs s'accumulent & deviennent trop sensibles pour qu'on puisse les négliger : mais pourvu que les Arpenteurs nous tracent des plans particuliers, à leur maniere, on pourra toujours s'en servir pour remplir les vuides de la carte générale, & en former une collection assez exacte de cartes topographiques.

211. En attendant, pour donner à la carte que nous publions avec cet ouvrage, toute l'exactitude dont elle étoit susceptible, & suppléer de notre mieux aux observations que nous n'avons pas faites nous-mêmes, nous avons comparé soigneusement tout ce que nous avons pu rassembler de plans & de cartes particulieres, comme le P. *Maire* l'exposera dans le troisieme livre. De plus, pendant ces deux dernieres années que le P. *Maire* a consacrées à d'immenses calculs, ainsi qu'à la construction & au dessein de la carte, nous avons écrit de tous côtés, pour avoir des observations aisées à faire, dans certains endroits que nous avons désignés, propres à fixer, par les points que nous avions déterminés, la position des lieux circonvoisins. Il suffit, pour cela de porter dans un lieu élevé un ais, qu'on nomme *planchette*, sur laquelle on étend une feuille de papier : on pose cette planchette à peu près de niveau : on y applique ensuite une regle, le long de laquelle on vise successivement aux villages d'alentour, comme on viseroit avec un fusil : ces différentes positions de la regle sont marquées par autant de lignes qui partent toutes d'un même point, & sur chacune desquelles on écrit le nom & la distance estimée du village, dont cette ligne désigne la position. S'il y a quelque village qu'on ne puisse découvrir de ce lieu, il suffit, pourvu qu'il soit proche, de diriger la regle par estime à peu près vers cet endroit. En comparant entre elles plusieurs observations de cette espece, on en tire la position des lieux qu'on marque sur la carte générale sans aucune erreur sensible ; car il n'arrivera guere que l'erreur puisse aller à un mille, & l'on

Même sujet.

voit bien qu'un mille n'occupe guere d'espace sur la carte d'une Province, même à grand point.

Ce qui manque encore à la perfection.

212. Nous avons reçu de divers lieux un grand nombre d'observations; mais il y a d'autres endroits, comme la petite ville de *Cascia* entourée de montagnes, & les villages des environs, dont nous n'avons rien pu tirer, quoique j'aie écrit à plusieurs personnes, particuliérement au Maire de cette ville: la chose du monde la plus simple & la plus facile leur paroissoit hérissée de difficultés. Nous n'avons pas été mieux servis en plusieurs endroits de la Romagne & du Bolonois, situés dans les montagnes, & dans le Duché d'*Urbin* qui en est tout couvert. Mais à l'égard de ce Duché, nous en aurons bientôt une topographie exacte, graces aux soins & à la libéralité de M. le Cardinal *Stoppani*, Légat d'*Urbin*, qui appelle actuellement auprès de lui le P. *Maire* pour la lever sur les lieux (1). La position de *Cagli* sera déterminée en même tems avec plus de précision que nous n'avons encore pu le faire, cette ville étant ensevelie dans les montagnes, quoique les observations que nous avons faites aux environs, & la proximité de *Cantiano*, dont la distance à *Cagli* est assez connue, nous donnent lieu de croire que nous n'avons commis à cet égard aucune erreur tant soit peu sensible.

Erreurs des anciennes cartes.

213. Un autre avantage considérable que nous avons retiré de cette seconde partie de notre travail, a été de corriger les erreurs des anciennes cartes: celles même du célebre & savant *Bianchini* n'en sont pas exemptes; ses instrumens n'étoient pas d'un aussi grand rayon que les nôtres, & il n'avoit pas, comme nous, des signaux sur les montagnes. Il a du moins le mérite d'avoir fait une premiere correction au méridien de *Rome*, qui en avoit grand besoin; car sur les anciennes cartes, ce méridien, prolongé seulement jusqu'au golfe de *Venise*, s'écarte déja de la vraie direction de plus de 60 milles à l'orient; & c'est sur les observations de M. *Bianchini* que M. *Eustache Manfredi* rendit cette direction très approchante de la véritable, dans la carte qu'il a publiée

(1) En effet, le P. *Maire* a donné en 1757 une nouvelle carte de la légation d'*Urbin*.

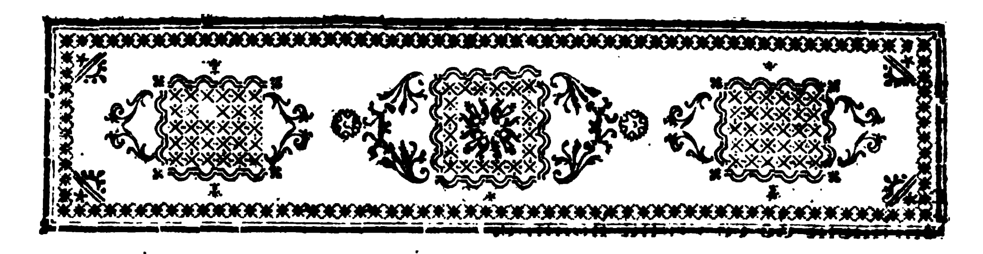
avec

avec une collection posthume de ces mêmes observations. Si on se donne la peine de lire attentivement les notes que M. *Manfredi* a ajoutées sur les observations de M. *Bianchini*, on nous trouvera excusables de nous être quelquefois écartés du sentiment de ce grand homme.

214. Je ne dois pas oublier d'avertir que malgré le soin que nous avons pris de désigner tous les villages par leur vrai nom, nous ne pouvons nous répondre d'y avoir toujours réussi. Dès le commencement de notre expédition, M. le Cardinal *Valenti* fit écrire en italien à tous les Evêques, au nom de Sa Sainteté, d'envoyer à *Rome* une liste exacte de tous les lieux de leur diocese : les uns ont envoyé ces noms en italien, d'autres en latin ; mais par la négligence de ceux à qui ils en avoient confié le soin, nous avons trouvé plusieurs de ces noms défigurés, & tels que les prononce le vulgaire. La même chose nous est arrivée ; car lorsque dans les villes de notre passage nous nous informions des noms des villages voisins, on leur en donnoit de différens, & diversement corrompus. Il ne peut donc se faire qu'il ne se trouve dans notre carte quelques fautes de cette nature ; mais je ne puis croire qu'il y en ait beaucoup ; & je me flatte que pourvu qu'on puisse reconnoître sur la carte les divers lieux, & leur véritable position, on excusera volontiers quelques défauts d'orthographe dans les noms. Erreurs à craindre sur les noms des lieux.

215. A l'égard de l'ancienne géographie, nous n'avons pas cru devoir nous y attacher : car les ruines des anciens édifices sont pour la plupart couvertes de bois, & tellement répandues sur le sol, qu'il n'est pas aisé de les découvrir du haut d'une tour ou d'une montagne, & d'en fixer la position. Une pareille entreprise, au lieu d'un voyage aussi rapide que le nôtre, exigeroit plusieurs années de travail, de longues recherches, & une étude profonde des anciens Auteurs. De la géographie ancienne.

Fin du Livre I.



LIVRE SECOND.

Mesure d'un dégré du Méridien entre Rome & Rimini, depuis le XLII dégré & demi jusqu'au XLIII & demi.

INTRODUCTION.

Sentimens divers sur la mesure du dégré;

1. AVANT l'usage des télescopes & des lunettes d'approche, qui ne furent inventés que dans le dernier siecle, tous les Astronomes, tant anciens que modernes, s'étoient servis à peu près des mêmes instrumens : il est étonnant qu'avec cela ils se soient si peu accordés sur la mesure du dégré. Au tems d'*Aristote* ils lui donnoient 1111 stades; *Eratostènes* le réduisit à 700, *Possidonius* à 666, & *Ptolomée* à 650 (1). Le sentiment de *Ptolomée* fut suivi, quelques siecles après, par les Arabes; ceux-ci assignerent au dégré terrestre la valeur d'environ 57000 de leurs pas: ce qui ne paroît pas s'éloigner beaucoup de 650 stades. Mais comme la valeur des pas & des stades nous est peu connue, & qu'elle a pu être fort différente, suivant les tems & les lieux, il n'est pas hors de vraisemblance qu'on ne pût rapprocher beaucoup des sentimens qui semblent d'abord si différens. Il est même à présumer que si les anciens Géometres ne nous ont rien laissé de précis sur cette matiere, c'est moins pour avoir pensé diversement, que pour n'avoir point assigné de mesure fixe.

(1) Voyez *Mém. de l'Acad.* 1702, pag. 19.

2. Je ne prétends pas donner à entendre par-là que tous les anciens se soient parfaitement rencontrés dans leurs opinions : on ne peut s'empêcher d'y reconnoître quelque différence, quoiqu'elle ne soit pas si grande à beaucoup près, que les nombres ci-dessus semblent d'abord l'indiquer ; & cette diversité d'opinions peut venir non seulement de la différence de leurs instrumens, mais bien plus encore de celle de leurs méthodes. *Riccioli*, cet observateur si exact, commit au siecle passé une erreur considérable dans la détermination du dégré, pour avoir cru faussement que la méthode dont il se servoit n'étoit point sujette aux erreurs de la réfraction. Avec combien plus de fondement pourrons-nous imputer les mêmes erreurs à d'anciens Géometres, qui n'avoient pas même l'idée de réfraction ? C'est en particulier le cas où se trouve *Eratostènes*, comme on en peut juger par ses écrits : il a fait le dégré trop grand, pour avoir négligé la réfraction, qui affectoit sa méthode, & la rendoit peu sûre. Car toute l'exactitude possible ne sert de rien, dès qu'on péche par le défaut de méthode, en omettant un principe capable de la rectifier, & qui en fait un des premiers élémens. Causes de cette diversité ;

3. Quoi qu'il en soit, car on peut dire beaucoup de choses pour & contre sur cet article, ce qu'il y a de certain, c'est que les tentatives qui ont précédé immédiatement l'invention des lunettes, ou du moins leur application aux instrumens de géométrie, tentatives dans lesquelles on a employé des mesures géodésiques parfaitement connues, & nullement viciées par les réfractions, n'ont pas donné à beaucoup près les mêmes différences. Car *Fernel* & *Norvood*, le premier en France, le second en Angleterre, ont fort approché de la juste valeur du dégré ; & *Snellius* hollandois, qui a vécu entre l'un & l'autre, s'en seroit peut-être moins écarté, si, comme l'a remarqué M. *Muschenbroeck*, il n'avoit été trompé par la ressemblance de deux tours vues de loin : erreur bien excusable, même dans un Géometre. Concluons que si avant la mesure de M. *Picart*, il n'y a rien eu de certain touchant la grandeur de notre globe, cela vient en partie de ce qu'on a employé des mesures trop incertaines, en partie de ce qu'on ne connoissoit pas assez les réfractions ; puisqu'il n'est pas douteux Comment on les a détruites en grande partie.



qu'en renonçant même à faire usage des lunettes, pourvu qu'on réduisît à l'horizon les angles d'un polygone, dont le premier angle fût opposé à une base exactement connue par une mesure actuelle, on pourroit à peine se tromper de trois cents pas, jamais de quatre cents, sur la mesure du dégré.

Difficulté de déterminer la figure de la Terre ;

4. Mais on avoit besoin d'une mesure bien plus précise pour éclaircir le doute que quelques expériences du pendule avoient fait naître sur la figure de la terre ; & il est arrivé heureusement que dans le tems même qu'on commençoit à agiter cette question, on s'est trouvé avoir en main des instrumens propres à la résoudre. Ce n'étoit pas tout néanmoins ; les loix de la réfraction n'étoient point encore assez exactement connues, & l'on n'avoit pas d'ailleurs le moindre soupçon sur l'aberration annuelle des étoiles fixes ; deux articles dont l'omission eût exposé à de grandes erreurs. A l'égard du premier, du moment qu'on a trouvé le secret d'appliquer des lunettes au quart de cercle, il est aisé de déterminer les loix de la réfraction. Le second étoit d'une toute autre difficulté : on découvroit bien, au moyen de la lunette, quelques mouvemens apparens dans les étoiles fixes ; mais ces mouvemens mêmes étoient si différens entre eux, & si prodigieusement variés d'une étoile à l'autre, que le problême paroissoit insoluble. Cependant il n'étoit pas possible, avant qu'on l'eût résolu, de trouver la différence de latitude de deux lieux, à moins que deux observateurs, placés dans ces lieux différens, n'observassent en même tems la même étoile (1). Il n'est donc pas surprenant que les premieres tentatives n'aient abouti qu'à déterminer d'une maniere fort approchée la mesure du dégré, & qu'elles n'aient que très peu, ou plutôt qu'elles n'aient point servi à faire connoître l'augmentation ou la diminution des dégrés, d'où dépend la détermination de la figure de la Terre.

Sa solution.

5. Afin donc qu'il ne manquât aucun des préparatifs né-

---

(1) Et c'est aussi ce qu'ont fait au Pérou MM. de la *Condamine* & *Bouguer*, voyez *Fig. de la Terre & Mes. des 3. dég. du Méridien* 1749 & 1750, & ce qui prouve que la solution de ce problême n'étoit point nécessaire à la mesure du dégré, quoiqu'on ne puisse disconvenir qu'elle ne lui soit utile, pour les raisons qu'on verra au Liv. IV, n°. 156.

cessaires, il falloit commencer par résoudre cet important problême, & assigner la cause de ces mouvemens annuels des fixes, si différens les uns des autres, & en apparence si bizarres. L'ingénieux *Bradley* en vint heureusement à bout : ce fameux Astronome avoit fait, avec un excellent instrument, un très grand nombre d'observations, qui furent pour lui la matiere des méditations les plus profondes : à force de réfléchir, il découvrit enfin que ce phénomene, qui depuis si long-tems mettoit à la torture l'esprit de tous les Mathématiciens, étoit une suite naturelle de la propagation de la lumiere. Ce seul mot dissipe toute l'obscurité répandue sur le problême : c'est comme le fil qui dirige nos pas dans les détours de ce labyrinthe. On peut aujourd'hui prédire avec certitude, & pour quelque tems que ce soit, le point du ciel où doit paroître une étoile. On a fait depuis quantité d'observations, qui toutes confirment cette heureuse découverte ; & l'on n'a jamais vû plus de conformité entre les observations & la théorie. Pour revenir à la mesure du dégré, deux compagnies d'Académiciens envoyés par S. M. T. C. au Pérou & en Laponie, ont déterminé avec des fatigues incroyables, mais avec une entiere précision, l'inégalité des dégrés du méridien. Il suit des observations qu'ils ont faites à l'équateur, au cercle polaire, & en France même, que ces dégrés vont toujours en augmentant de l'équateur au pôle. Mais tous les méridiens se ressemblent-ils ? ou, ce qui revient au même, la Terre a-t-elle une égale courbure à égales distances de l'équateur ? C'est ce qu'on n'avoit point encore examiné ; & Sa Sainteté le Pape Benoît XIV a voulu que, puisqu'on avoit enfin toutes les connoissances préalablement requises pour cet examen, on en fît la premiere épreuve dans ses Etats. Ce dessein, digne d'un Pontife amateur des Lettres & des beaux Arts, lui avoit été suggéré par son Ministre M. le Cardinal *Valenti*, dont il seroit inutile de vanter le zele pour les sciences, déja si connu de tous les Savans. Mais de quelle maniere a-t-on procédé à cet examen ? C'est ce qui va faire la matiere des articles suivans.

ARTICLE PREMIER.

Description des Instrumens.

Un secteur & un quart de cercle sont les principaux instrumens qui nous aient servi dans notre mesure. Le quart de cercle avoit trois pieds (romains) de rayon (1); le secteur en avoit neuf, avec un limbe de la longueur d'un pied. Je vais donner une courte description de ces instrumens.

Du quart de cercle.

1. Notre quart de cercle n'a point été construit par un Artiste de profession : (les Artistes sont peu communs à *Rome ;*) mais par M. *Ruffo*, Prêtre de *Verone*, absolument neuf à manier des instrumens d'astronomie, mais d'une dextérité admirable dans tous les ouvrages de méchanique. Le point principal étoit de planer le limbe, & de le poser dans le plan de la platine du centre : il y réussit au mieux : il ne fut pas moins exact dans la division du limbe; car après un examen de plusieurs jours, nous trouvâmes qu'il ne manquoit à notre quart de cercle que 22 sec. pour parfaire les 90 d.; les autres erreurs alloient rarement à 30 sec., jamais à une minute. Ce n'étoit pas mal réussir pour un coup d'essai. Les minutes étoient marquées de dix en dix, sur le bord du limbe; & on avoit achevé la division à l'ordinaire par des transversales, & des cercles concentriques. Ces cercles concentriques, au nombre de onze, n'étoient point placés à égale distance les uns des autres; mais leur distance alloit en diminuant proportionnellement vers le centre, & cette distance étoit assez grande pour que dans l'estimation des angles il nous soit à peine arrivé de différer l'un de l'autre de cinq secondes.

De son pied.

2. A l'égard du pied du quart de cercle, de la facilité que nous avions à le mouvoir en tout sens, de l'alidade, & de la lunette mobile; comme cela se trouve à peu près dans tous les quarts de cercle, il seroit inutile de nous y arrêter. Quant à la lunette fixe, je me contente de remarquer qu'on y avoit

(1) Le pied romain est au pied de Paris ou pied de Roi, comme 2971 à 3240, ou de 11 pouces 0,0444 lignes du pied de Paris.

mis deux objectifs, un à chaque extrémité ; au moyen de quoi il suffisoit de transporter l'oculaire d'une extrémité du tube à l'autre, pour découvrir deux objets diamétralement opposés ; il arrivoit de-là, qu'ayant ajusté le fil mobile du micrometre sur le fil fixe placé à l'autre extrémité du tube, ce qui se faisoit sans peine en retournant l'instrument, nous pouvions vérifier le quart de cercle de la même maniere que s'il y avoit eu de simples pinnules. Car les fils ainsi disposés, on pointe sur le même objet, en visant tantôt par le limbe, tantôt par le centre ; on remarque les points du limbe auxquels répond le fil à plomb, dans ces deux situations de l'instrument ; & le point du milieu est le commencement de la graduation, ou le premier point de la division. Par-là on reconnoît l'erreur du quart de cercle, ou sa différence à 90 dégrés : mais pour cela même on ne s'étoit pas contenté de diviser l'instrument en 90 dégrés ; on en avoit encore marqué quelques uns de part & d'autre, jusqu'aux extrémités du limbe.

3. Je viens au secteur, qui, comme je l'ai dit, avoit neuf pieds (romains) de rayon. Il étoit composé d'un rayon de fer terminé par une lame de même métal, perpendiculaire au rayon, sur laquelle on avoit appliqué une petite lame de laiton bien polie, & dont le plan passoit exactement par le centre. Cette lame de laiton étoit partagée par le milieu, dans toute sa longueur, pour recevoir une autre lame, que nous faisions mouvoir au moyen d'une vis, & dont la longueur, qui auroit du être d'un pied, (nous trouvâmes qu'il s'en manquoit un peu plus d'une deux-millieme partie du tout) étoit divisée en 72 parties égales. Ainsi lorsqu'il étoit question d'estimer un angle, nous tournions la vis jusqu'à ce que le fil à plomb répondît à l'un des points de la division, & nous comptions en même tems le nombre de tours & de parties du micrometre. Le micrometre étoit composé à l'ordinaire d'un cercle & d'un index, & le cercle étoit divisé en 180 parties égales. On voit que ces parties du micrometre répondoient à des parties égales de la tangente du secteur, non de sa circonférence ; or il en falloit $171\frac{1}{2}$ pour faire une minute au point de contact ; ainsi il en falloit presque trois pour une seconde. Une lunette de même longueur que le rayon, étoit adossée au secteur, & nous

Du secteur.

l'avions rendue à peu près parallele au plan de l'inſtrument.

De ſa ſuſpenſion.

4. Le ſecteur étoit ſuſpendu d'une maniere ſi ſolide, qu'il nous eſt arrivé plus d'une fois de le retrouver dans la même poſition où nous l'avions mis quelques heures auparavant, le fil à plomb répondant toujours au même point du limbe : trois vis & deux poids lui avoient acquis cette ſolidité. L'une des vis attachée par un bras à une poutre, & placée dans le plan du méridien, ſoutenoit le ſecteur de côté ; & on la tournoit pour amener l'étoile ſur le fil horizontal. Les deux autres étoient perpendiculaires à ce plan, & on les avançoit ou reculoit plus ou moins pour donner au ſecteur une ſituation verticale, que l'on connoiſſoit en examinant ſi le fil à plomb raſoit le limbe, ſans y appuyer. Les deux poids étoient deſtinés à repouſſer le ſecteur contre ces deux dernieres vis, pour l'aſſujettir & l'empêcher de s'écarter du côté oppoſé. Ces mêmes vis ſervoient à placer le ſecteur dans le plan du méridien ; car pour peu qu'il s'en écartât, on n'avoit qu'à pouſſer ou retirer l'une des deux vis pour lui donner une poſition convenable. Nous avions tracé à cette fin, ſur le pavé de la chambre, une ligne parallele à la méridienne, laquelle repréſentoit la ſection du pavé & du plan du ſecteur, pointé dans le plan du méridien. Il étoit aiſé, en bornoyant le long du limbe, de connoître ſi ſon plan répondoit parfaitement à cette ſection.

ARTICLE II.

Examen des Diviſions.

Comment on auroit pu vérifier le ſecteur ;

5. On ſait qu'un Artiſte, quelqu'habile qu'on le ſuppoſe, ne peut jamais rendre un inſtrument parfait ; quoiqu'avec de l'application & un long uſage, il puiſſe parvenir à n'y commettre que de légeres erreurs. Ce point méritoit d'autant plus d'attention dans le cas préſent, que notre Artiſte, M *Ruffo*, ne s'étoit jamais exercé dans ces ſortes d'ouvrages. Ainſi il falloit corriger toutes les erreurs de la diviſion, tant du ſecteur que du quart de cercle. Par rapport au ſecteur, il eut ſuffit, pour notre meſure, de prendre les parties aliquotes du rayon, qui répondoient le plus près aux diſtances de nos étoiles

étoiles au zénith, & de les transporter sur le limbe, de part & d'autre de son point de milieu. C'est la méthode que MM. *Bouguer* & de la *Condamine* avoient déja employée à l'équateur. Par exemple à *Rome* l'étoile α du cygne, au moment de son passage par le méridien, est éloignée du zénith d'environ deux dégrés & demi : il falloit donc transporter, à droite & à gauche du milieu du limbe, la vingt-troisieme partie du rayon, égale à la tangente de 2 d. 29 min. 23 sec., ou environ : rien n'eût été ensuite plus aisé que de prendre en parties de micrometre la différence de cet intervalle à la vraie distance de l'étoile. Mais la méthode, dont nous nous sommes servis, revient au même, comme on va le voir.

6. Nous avons tracé sur un verre deux paralleles, à la distance d'une partie aliquote du rayon, telle que le cas présent sembloit la requérir. Ces lignes étoient si déliées, qu'on ne les pouvoit bien appercevoir qu'avec une loupe. Le verre ainsi préparé, nous l'avons collé avec de la cire sur le limbe, en prenant bien garde que les lignes ne coupassent pas obliquement la tangente ; ce qui eût un peu augmenté leur distance (1). Cela fait, nous tournions la vis pour avoir, en parties de micrometre, la différence de la distance de ces lignes à la partie aliquote, & à la distance observée. Par ce moyen nous connoissions la distance observée, sans avoir sujet de craindre qu'il s'y fût glissé aucune erreur sensible : car le côté du verre qui étoit marqué de deux lignes, touchoit immédiatement la lame mobile ; ce qui prévenoit tout danger de parallaxe : d'ailleurs nous pouvions estimer à peu de chose près les points du limbe auxquels répondoient ces lignes, & il n'étoit pas à présumer que nous pussions nous y tromper de deux parties de micrometre, dont il en faut presque trois pour faire une seconde.

Comment on l'a vérifié ;

7. A l'égard de la partie aliquote, il n'est point nécessaire de la déterminer avec tant de précision, pourvu qu'on tienne compte de la différence, laquelle étant répartie sur 23, ou plus, qui exprime le nombre de fois que cette partie est

Avec quelle exactitude ;

(1) L'Auteur entend ici, par la distance des paralleles, l'intervalle de la tangente, intercepté par les paralleles.

contenue dans le rayon, ne peut jamais produire une erreur sensible. Supposons par exemple que la partie aliquote, étant portée 23 fois sur le rayon, y laisse un reste égal à $\frac{1}{100}$ du tout, & qu'il en résulte une erreur d'une seconde sur toute la longueur; il est évident qu'après la répartition faite, l'erreur de la partie aliquote ne sera que de $\frac{1}{23}$ de seconde.

Avec quel succès.

8. Nous avons dit que la tangente étoit divisée en 72 parties, qui faisoient autant d'intervalles de deux lignes, ou environ; les différences que nous y avons trouvées, par la méthode précédente, étoient de quatre ou cinq secondes, quelquefois de six; il s'en est même trouvé une de onze secondes. Les divisions de la droite étoient plus justes que celles de la gauche: celles-ci étoient trop courtes, à compter du premier point de la division, si l'on en excepte un ou deux intervalles de deux lignes; mais lorsqu'on joignoit les divisions de la gauche à celles de la droite, elles péchoient tantôt par excès, tantôt par défaut. Nous avons encore examiné séparément chaque intervalle, & nous avons dressé une nouvelle table d'erreurs, laquelle s'est trouvée à très peu près semblable à la premiere. Mais nous nous en fions plus à celle-ci, parceque des erreurs imperceptibles par elles-mêmes, deviennent sensibles dans leur totalité. Car supposons qu'à chaque intervalle il y ait une erreur de $\frac{1}{200}$ d'un tour de vis; &, ce qui n'est pas probable, que toutes les erreurs soient du même côté, il suit que sur 36 intervalles, c'est-à-dire sur la moitié de toute la longueur, on aura une erreur de 11 sec. La conformité de nos tables est une preuve, qu'il ne nous est rien arrivé de semblable, à beaucoup près.

Vérification du quart de cercle.

9. La vérification du quart de cercle n'étoit pas fort différente. On avoit attaché au bord du limbe un petit instrument avec une vis, qui faisoit mouvoir l'alidade: à l'alidade on avoit ajouté un verre marqué d'une ligne qui parcouroit la division, & en faisoit connoître jusqu'aux plus légeres différences, de la même maniere que dans la ligne des tangentes du secteur. Nous commençâmes par vérifier les dégrés de 30 en 30, puis de 10 en 10, de 5 en 5, & 1 à 1. D'abord on avoit fait cet instrument de bois; mais il ne réussit pas: car en répétant les opérations, on ne trouvoit point les mêmes

erreurs. Cet inconvénient cessa du moment qu'on lui en eut substitué un de fer; & il ne nous resta plus de doute sur les erreurs de la division. On voit, sans que je le dise, que nous avions encore besoin ici d'appliquer la loupe, pour appercevoir jusqu'aux plus petites différences. Nous l'avons de plus employée dans nos observations, & avec tant de succès, que nous distinguions parfaitement jusqu'à un tiers de seconde.

10. Quant à l'erreur du quart de cercle, ou de l'arc de 90 dégrés, nous l'avons examiné d'abord par le tour de l'horizon, qui nous y a fait découvrir une erreur par excès de près de deux minutes sur 360 dégrés; puis par la somme des trois angles de chaque triangle réduit, en prenant un milieu, d'où nous avons conclu que l'erreur étoit de 50" sur 180 d., & de 25" sur 90. De-là on peut corriger le quart de cercle de deux façons: la premiere est de répartir d'abord cette erreur sur chaques divisions, & d'y appliquer ensuite les corrections particulieres des autres erreurs: la seconde, qui est celle que nous avons suivie, est de corriger les erreurs particulieres de chaque dégré, comme si le quart de cercle étoit parfait, & de diminuer l'arc qui en résulte, en raison de cet arc à 90 dégrés; ce qui se fait en retranchant 5" sur 18 d., & sur le reste à proportion. Par exemple, ayant un angle de 40 dégrés, on retranche 10" pour 36 d., & pour les quatre autres une seconde; ce qui fait 11" de diminution sur l'angle observé. Suite.

ARTICLE III.

Choix des Stations.

11. Le pays qui est entre les deux mers, est presque tout occupé par l'Apennin & les montagnes adjacentes, qui en sont comme l'accessoire ou le diminutif. Ces montagnes sont séparées quelquefois par des plaines d'une raisonnable grandeur, mais où nous ne pouvions néanmoins établir aucun poste, pour continuer la chaîne de nos triangles d'une extrémité de la méridienne à l'autre, parceque le pays est presque tout traversé de chaînes de montagnes, qui nous eussent dérobé la vue de nos signaux. Ainsi toutes nos stations, à Choix des stations.

l'exception de celles de *Rome* & de *Rimini*, furent établies au ſommet des montagnes, entre ces deux villes, pour former la ſuite de nos triangles. Les montagnes que nous avons choiſies pour cela, après avoir reconnu le terrein, ſont le *Genarro*, le *Soriano*, le *Fionchi*, le *Pennino*, le *Teſio*, le *Catria*, le *Carpegna* & le *Luro*.

De chaque ſtation en particulier. Conſtruction des ſignaux.

12. La premiere eſt ſituée dans la terre de Sabine, près de *Palombara*, dont elle eſt éloignée d'environ deux milles: la ſeconde proche *Soriano* qui lui a donné ſon nom. Tout ce rideau de montagnes, dont le *Soriano* eſt la pointe la plus élevée, portoit anciennement le nom de *Cimini*. La troiſieme eſt à cinq milles de *Spolète*, en-deçà du *Nar* qui baigne le pied de la montagne. La quatrieme eſt à peu près auſſi éloignée de *Nocera* à l'orient. Le *Teſio* eſt dans le territoire de *Perouſe*, & environ à même diſtance de cette ville, du côté du nord. Le *Catria* eſt la cime la plus élevée d'une montagne à deux ſommets, ſituée près de *Cantiano*; la ſeconde cime, preſque auſſi haute, & plus occidentale, s'appelle *Montaigu*. Le *Carpegna* tire ſon nom d'un château, dont il dépend pour la plus grande partie. Il a au couchant *Penna di Billi*, petite ville, telle que ſont ordinairement les villes ſituées dans les montagnes; elle eſt aujourd'hui le ſiege de l'Evêché de *Monfeltro*. Enfin le mont *Luro* eſt à ſept milles aux plus de *Peſaro*: ſon ſommet eſt à peine élevé de 200 pas au-deſſus du niveau de la mer, & par conſéquent beaucoup plus bas que celui des autres montagnes. Une tour antique, placée ſur la cime de celle-ci, nous diſpenſoit d'y mettre un nouveau ſignal; mais il en fallut poſer dans les autres ſtations. Ces ſignaux étoient des cabanes de forme pyramidale, ſoutenues par quatre longues branches plantées à la diſtance de 20 palmes, ou plus, les unes des autres, & inclinées par le haut vers le centre de la baſe. On les lioit enſemble par d'autres branches qu'on attachoit avec des clous, & on revêtoit le tout de feuillage; de ſorte qu'on les eût pris de loin pour des cônes tronqués. Il faut néanmoins en excepter le *Soriano*; comme cette montagne étoit toute couverte de bois juſqu'au ſommet, nous ne pûmes nous diſpenſer de faire abattre les arbres qui en couvroient la cime; & nous y en laiſſâmes un pour ſervir de ſignal.

13. Tels ſont les poſtes qui nous ont paru les plus favorables; il nous eût même été difficile de nous en paſſer. Toute autre montagne nous eût donné des angles trop petits. On eût bien pu etablir une ſtation entre le *Soriano* & le *Teſio*: mais de toutes les montagnes qui bordent le Tibre, aux environs de *Tenaglia* ou de *Montecchio*, nous n'en avions apperçu qu'une ſeule, laquelle, outre qu'elle étoit trop près de *Soriano*, nous eût donné des angles peu proportionnés. Le mont *Pelia*, dans le territoire d'*Orviete*, étoit mieux ſitué; & il nous eût pu ſervir au beſoin, ſinon à lier nos triangles, du moins à faire des obſervations géographiques: mais divers obſtacles nous empêchoient alors de nous y arrêter, ou même de ſentir tous les avantages de ce poſte. Les autres montagnes, ſur leſquelles nous euſſions pu jetter les yeux, étoient ou trop éloignées de la méridienne, ou couvertes par des montagnes voiſines. Nous eûmes quelque peine à découvrir du *Soriano* le ſignal du *Fionchi*; comme de *Catria* & de *Carpegna*, celui du mont *Luro*. Car le *Luro* étant vu de poſtes plus élevés, ſe *projectoit* ſur une plaine; & le *Fionchi*, quoique plus élevé que le *Soriano*, ſe *projectoit* ſur une montagne un peu plus haute, appellée *Cuſcerno*. Or dès qu'un ſignal ſe *projecte* ſur la terre, il eſt difficile à appercevoir, à moins qu'il ne ſoit actuellement éclairé du Soleil. De même le dôme de *St Pierre*, vu de *Soriano*, ſe *projectoit* ſur la terre, & le plus ſouvent nous n'en appercevions pas le moindre veſtige; tandis que d'autres objets, diverſement ſitués, ſe voyoient très diſtinctement.

Avantage de ces poſtes;

14. Ces montagnes étoient liées d'un côté au dôme de *St. Pierre* de *Rome*, de l'autre à une ſtation établie ſur le bord de la mer, près de *Rimini*, à l'endroit où commençoit la meſure de la baſe; & elles formoient huit triangles principaux, d'où nous devions tirer la meſure d'un dégré du méridien. Il reſte à parler des deux baſes, fondement de toutes nos opérations. Celle de *Rimini* pouvoit ſe comparer immédiatement avec l'un des côtés du triangle adjacent: à l'égard de celle de *Rome*, comme elle étoit diſtante d'environ cinq milles du dôme de *St Pierre*, nous avons eu beſoin d'un triangle auxiliaire, pour connoître la diſtance de ce dôme au ſignal du *Genarro*. Ainſi tout le polygone étoit compoſé de onze trian-

Leur liaiſon avec les deux baſes.

gles, dont huit se rapportoient spécialement à la mesure de la méridienne, & les trois autres à la mesure du premier & du dernier côté, qui servent à mesurer tous les autres. Nous allons donner le détail de ces mesures.

ARTICLE IV.

Mesure des Bases.

Situation des bases;

15. Nous choisîmes, pour notre base de *Rome*, la vieille voie Appienne, qui, à raison de son alignement, nous parut mériter la préférence; mais qui ne laissoit pas d'avoir ses difficultés. Nous nous en fussions tirés, il y a quelques années, à moins de frais. Car depuis quelque tems on lui a substitué un autre chemin sur la gauche, entre la porte *Saint Jean* & celle de *Saint Sébastien*, afin que ceux qui voudroient aller de *Rome* à *Albe*, pussent sortir indifféremment par l'une de ces deux portes: de sorte que la voie Appienne est non seulement abandonnée, mais labourée en quelques endroits, & par conséquent difficile à mesurer à la perche. L'embarras eût été plus grand, s'il nous eût fallu répéter la mesure aux approches de la moisson. Cette base étoit de huit milles. Nous nous contentâmes de la mesurer uue fois; & plutôt que de nous engager dans de nouvelles difficultés, nous résolûmes de chercher ailleurs un terrein plus commode, dont nous pussions répéter la mesure autant de fois que nous jugerions à propos. Nous ne le trouvâmes qu'à l'autre extrémité de la méridienne; & c'étoit précisément la position la plus favorable. Le bord de la mer adriatique étoit le terrein le plus uni; & quoiqu'il y eût un petit coude à faire, nous y pouvions mesurer une autre base de huit milles, avec autant de précision que si nous eussions toujours avancé sur la même ligne. Nous la mesurâmes deux fois en treize jours, au mois de décembre, malgré les brouillards qui ne nous quittoient point; & il n'y eut entre ces deux mesures que deux pouces de différence. La température de l'air, qui, pendant ces treize jours, fut toujours la même, jointe à toutes les précautions que nous avons prises, dispense de recourir au hasard, pour justifier cette conformité. Car le thermometre de M. de *Réaumur* se trouva toujours à peu près au même point: d'ailleurs nous avions soin de véri-

fier, plusieurs fois le jour, la longueur de nos perches; jusqu'à tenir compte de la petite courbure qui y étoit produite par leur propre poids, & du raccourcissement qui en est une suite. Je suis persuadé qu'une troisieme mesure ne se fût pas moins accordée avec les précédentes.

16. Voici de quelle maniere nous nous y prenions pour mesurer : nous avions trois perches ou regles de 27 palmes, marqués des chiffres 1, 2, 3 : nous les placions, au moyen d'un niveau d'eau, dans une situation horizontale, & nous les mettions en même tems dans l'alignement de la base, marqué par des jallons plantés de distance en distance. On ne faisoit point toucher les têtes des perches, & on prenoit avec un compas le petit intervalle qui les séparoit, ou plutôt l'intervalle des points gravés sur de petites lames de laiton, placées aux extrémités des perches, d'où nous retranchions ensuite la distance de chaque point à chaque extrémité (1). Par-là nous ne risquions pas de causer du dérangement dans les perches, ni de nous tromper sur le nombre des mesures : car, comme nous prenions trois perches pour une mesure, & que chaque mesure remplissoit une ligne dans notre régistre, & qu'enfin nous marquions dans cette ligne même les intervalles des perches chacun en son rang, il n'étoit pas possible qu'il se glissât aucune erreur dans le nombre des mesures (2). Méthode observée dans leur mesure.

17. Lorsque l'inégalité du terrein nous obligeoit d'élever ou d'abaisser les perches, nous suspendions un fil à plomb à l'extrémité de la plus haute, & nous prenions avec un compas la distance de ce fil à l'extrémité de la perche la plus basse. Les perches n'en étoient pas moins dans une position horizontale, parcequ'au moyen de quelques vis, nous élevions ou nous abaissions plus ou moins les gradins ou tables sur lesquelles elles posoient. Ainsi nous n'éprouvions presque pas plus de difficulté que si le terrein eût été parfaitement uni; surtout dans la base de *Rimini*, où l'on se trouvoit rarement dans le cas d'élever ou d'abaisser les perches. Remede contre l'inégalité du terrein.

18. Cette base, à cause du coude dont nous avons parlé,

(1) Voyez liv. IV, n°. 339 & 340.
(2) Voyez liv. I, n°. 116.

étoit composée de deux lignes, formant un angle de 170 d. 52′ 15″, comme on peut le voir dans la figure 1 de la premiere planche, où le point A marque le commencement de la base près l'embouchure de l'*Ausa*, AB la premiere ligne, BC la seconde. Nous avons mesuré les angles CAB & ACB, le premier de 4 d., 10′, 45″, le second de 4 d., 57′, 0″; & ayant abaissé la perpendiculaire BD, nous avons diminué AB & BC, en raison du sinus du complément de angles A & C, comparé au rayon (1), pour avoir les segmens AD, DC, qui forment ensemble la base rectiligne AC. Comme la ligne AB est traversée par l'*Amarano*, nous avons déterminé la largeur de cette riviere, qui est de 431 palmes $\frac{2}{3}$, par un triangle presque équilatéral, dont l'un des côtés a été mesuré, ainsi que les angles, avec une exactitude qui ne permet pas d'y soupçonner aucune erreur sensible.

Longueur des bases.

19. Ainsi comme les deux mesures de cette base étoient parfaitement conformes, & que nous ne pouvions former aucun doute sur sa réduction à la base rectiligne AC, nous n'hésitâmes pas de lui donner la préférence sur celle de *Rome*, & de n'employer celle-ci qu'à vérifier la premiere, ou à la corriger au besoin. La premiere ligne AB s'est trouvée de 28645.8 palmes, la seconde BC de 24194.8, d'où l'on tire AD=28569.6; DC=24104.7, & leur somme AC=52674.3, qui, multiplié par $\frac{1}{20}$, donne 7901.14 pas. L'autre base étoit de 8034.37 pas, ou plutôt de 8034.67, en tenant compte d'un demi dégré d'inclinaison de la ligne sur l'horizon (2); c'est-à-dire qu'elle étoit un peu plus longue que celle de *Rimini*.

Réduction des pas romains à la toise.

20. Il reste à réduire les pas en toises, pour pouvoir comparer notre mesure aux autres. Nous avons pris la mesure du palme sur l'étalon du Capitole; mais comme les lignes étoient fort larges, nous n'osons répondre de sa justesse. Le point étoit d'avoir une toise d'une juste longueur; & nous en avons reçu une de *Paris*, de la façon du sieur *Langlois*, & exactement vérifiée par M. de *Mairan*; de sorte qu'il n'y a aucun doute qu'elle ne soit parfaitement conforme à celles qui ont

(1) Voyez liv. IV, n°. 363.
(2) Voyez liv. IV, n°. 366.

servi

servi à l'équateur en France, & au cercle polaire (1). Après un mûr examen, nous avons trouvé que notre mesure de neuf palmes étoit à la toise, comme 29710 à 28800; d'où il suit que le logarithme de ce rapport est 0135102, & que le logarithme du rapport de la toise au pas romain, ou à 6 palmes $\frac{2}{3}$, est 1168236, qui, soustrait du logarithme d'un nombre de pas quelconque, fera connoître le nombre de toises qui y répond.

Article V.

Suite des triangles du polygone.

21. La suite de nos triangles est représentée dans la figure 2. *L a* est la base de *Rimini*, laquelle se rapproche un peu plus de la mer que la ligne *L I*, qui aboutit au mont *Luro*, quoique ces deux lignes paroissent retomber l'une sur l'autre. Le reste se voit dans la figure. Nos angles observés avoient besoin pour la plupart d'une petite correction, n'ayant pu être pris dans la cabane qui servoit de signal, mais seulement à côté. Cette correction est suffisamment expliquée dans d'autres mesures, & ne renferme aucune difficulté particuliere; & comme d'ailleurs elle n'étoit ordinairement que de quelques secondes, j'ai crû pouvoir l'omettre dans la table suivante, où je me contente de marquer les angles qui résultent de cette correction. Nous avons encore fait aux angles la correction nécessaire, pour que les trois angles du même triangle fussent égaux à deux droits, afin d'en tirer ensuite la valeur d'un côté. Correction des triangles. Pl. I. F. 1.

(1) M. de *Mairan*, dans son Mémoire sur la mesure du pendule à secondes à Paris, *Mém. de l'Acad. des Sciences pour* 1735, page 157, dit qu'il a fait faire une regle *toute pareille à celle qui a été emportée au Pérou*, (par MM. Godin, Bouguer & de la Condamine, partis la même année au mois d'avril,) *& dont on a laissé le modele à l'Académie*, c'est-à-dire toute pareille à la toise qui a servi à la mesure des dégrés du méridien, voisins de l'équateur, & des dégrés qui coupent le cercle polaire boréal, car celui-ci fut mesuré par les Académiciens envoyés au Nord avec ce même modele laissé à l'Académie, de la toise emportée au Pérou. Mais en 1756, lorsque l'Académie fit mesurer de nouveau la distance de Villejuifve à Juvisi pour vérifier la mesure de la base de M. Picart, la toise de M. de Mairan fut trouvée plus courte d'un dixieme de ligne que la toise de l'équateur. Voyez la note sur le n°. 75, liv. I.

Triangles.		Angles observés, réduits au centre.	Les mêmes Angles corrigés.	De-là le côté en pas romains (1).
L'Ausa.	L	78° 48′ 22″	78° 48′ 18″	
Autre extrem. de la base.	a	82 3 10	82 3 6	LH 23862.3
Carpegna.	H	19 8 36	19 8 36	
		180 0 8	180 0 0	
L'Ausa.	L	77 19 44	77 19 56	
Luro.	I	66 35 52	66 36 2	IH 25367.7
Carpegna.	H	36 3 56	36 4 2	
		179 59 32	180 0 0	
Luro.	I	64 58 37	64 58 31	
Carpegna.	H	69 57 6	69 56 59	HG 32465.2
Catria.	G	45 4 34	45 4 30	
		180 0 17	180 0 0	
Carpegna.	H	37 32 15	37 32 11	
Catria.	G	97 6 12	97 6 1	GF 27429.8
Tesio.	F	45 41 53	45 41 48	
		180 0 20	180 0 0	
Catria.	G	64 51 52	64 51 54	
Tesio.	F	59 33 25	59 33 30	FE 30104.3
Pennino.	E	55 34 34	55 34 36	
		179 54 54	180 0 0	
Tesio.	F	45 46 33	45 46 33	
Pennino.	E	92 38 54	92 38 56	FD 45316.4
Fionchi.	D	41 34 31	41 34 31	
		179 59 58	180 0 0	
Tesio.	F	30 36 2	38 35 57	
Fionchi.	D	91 56 32	91 56 21	DC 37200.7
Soriano.	C	49 27 48	49 27 42	
		180 0 22	180 0 0	
Fionchi.	D	60 5 30	60 5 30	
Soriano.	C	70 10 21	70 10 19	CB 42258.3
Genarro.	B	44 41 12	41 44 11	
		180 0 3	180 0 0	

(1) Voyez au commencement de ce volume la table de réduction des pas romains en toise & pieds de Paris.

TRIANGLES.		Angles observés, réduits au centre.	Les mêmes Angles corrigés.	De-là le côté en pas romains.
SORIANO.	C	32° 13′ 6″	32° 13′ 10″	BA 22954.3
GENARRO.	B	68 48 20	68 48 30	
Dôme de St Pierre.	A	78 58 18	78 58 20	
		179 59 44	180 0 0	
GENARRO.	B	32 38 10	32 38 7	Bc 24244.8
Dôme de St Pierre.	A	79 1 10	79 1 3	
Extr. or. de la base.	C	68 20 56	68 20 50	
		180 0 16	180 0 0	
GENARRO.	B	19 17 27	19 17 27	bc 8033.4
Extr. occ. de la base.	b	94 24 33	94 24 30	
Extr. or. de la base.	c	66 18 6	66 18 3	
		180 0 6	180 0 0	

22. La base de *Rome* calculée, se trouve d'environ un pas plus courte que par la mesure actuelle; & comme elle est la vingtieme partie de la méridienne, il suit que si on la prenoit pour fondement du calcul, la méridienne se trouveroit au moins de 20 pas plus longue; & que prenant un milieu, on peut ajouter 10 pas à la méridienne; ce qui augmentera le dégré de 5 pas. Comparaison des bases.

23. Pour trouver une base par l'autre, on n'a besoin que des nombres marqués dans la table. Car il suffit de connoître un côté d'un triangle, pour trouver tel côté qu'on voudra du triangle suivant. Nous avons suivi la méthode la plus aisée, qui est de résoudre les triangles avant que de réduire les angles à l'horizon. Cette premiere opération finie, la réduction a lieu, tant pour avoir les distances, qui répondent à celles des signaux sur une surface réguliere de la terre, que pour connoître le vrai angle d'inclinaison des côtés sur la méridienne. La réduction des angles à l'horizon se fait de la maniere qui suit. Que la table précédente suffit.

24. On imagine deux grands cercles de la sphere, passant par le zénith de l'observateur, & par les signaux observés. Ces cercles coupent l'horizon au-dessous ou au-dessus du Moyen de réduire les angles à l'horizon.

ſignal, ſuivant que le ſignal paroît élevé ou abaiſſé au-deſſous de l'horizon. Il eſt évident que l'arc compris de l'horizon eſt la meſure de l'angle réduit que l'on cherche, comme auſſi de l'angle formé par ces deux cercles au zénith. Or connoiſſant la diſtance apparente des ſignaux au zénith, on connoîtra par-là même deux côtés d'un triangle ſphérique, dont le troiſieme côté eſt la meſure de l'angle obſervé. Toute la difficulté ſe réduit donc à trouver l'angle au zénith, dans ce triangle ſphérique, dont on a tous les côtés. C'eſt-là, je penſe, la ſolution la plus ſimple & la plus naturelle qu'on puiſſe donner de ce problême; & comme il y a près de trente ans qu'elle m'eſt venue dans l'eſprit, & que je n'avois pas le moindre doute qu'elle n'eût été connue de tous les anciens, je n'ai pas été peu ſurpris de trouver quelque part (1) qu'on la donnât pour une méthode d'une nouvelle invention. Cependant comme il eſt rare qu'on ait occaſion d'en faire uſage, il ne ſeroit pas étonnant qu'aucun d'eux n'en eût fait mention.

Cas plus ſimple.

25. Si l'un des ſignaux eſt à l'horizon, on n'aura à réſoudre qu'un triangle rectangle ſphérique, dont l'hypothénuſe ſera la meſure de l'angle obſervé, & l'un des côtés la diſtance de l'autre ſignal à l'horizon. Une ſeule analogie fera connoître l'autre côté, ou l'arc de l'horizon qu'on cherche. Ceci conduit à une ſeconde ſolution générale du problême, laquelle paroît d'abord plus embarraſſée, mais qui dans le vrai peut être d'un grand uſage dans preſque tous les cas particuliers, à cauſe des moyens, qui s'y préſentent pour ainſi dire d'eux-mêmes, d'abréger les calculs.

Autre moyen.

26. Cette ſolution conſiſte à trouver le point C (fig. 3 & 4) qui eſt le point d'interſection de l'horizon avec le grand cercle qui paſſe par les ſignaux A & B. Si les ſignaux ſont l'un au-deſſus, l'autre au-deſſous de l'horizon, comme dans la fig. 3,

---

(1) Dans le livre de la figure de la terre de M. Bouguer, pag 131, où il ſuppoſe que cette méthode n'avoit point été employée, quoique les Académiciens, qui avoient été envoyés au cercle polaire, n'euſſent fait uſage que de la trigonométrie ſphérique pour la réduction à l'horizon des angles obſervés dans un plan incliné.

le point d'interſection doit ſe trouver ſur l'arc obſervé AB; s'ils ſont du même côté, comme dans la figure 4, ce point ſe trouvera ſur l'arc prolongé, du côté où il ſe rapproche de l'horizon. Soient les arcs AD, BE perpendiculaires à l'horizon DCE, ou DEC, les ſegmens de l'arc obſervé ſeront, dans l'un & l'autre cas, AC, CB; & l'arc obſervé ſera, dans le premier cas, la ſomme de ces ſegmens, & leur différence dans le ſecond. Ainſi en ſe ſervant du ſigne ∽, pour marquer la différence de deux termes, (il n'importe quel eſt le plus grand) je dis qu'on aura, dans le premier cas, l'analogie ſuivante:

$$\text{Tang.}\,\frac{AD+BE}{2} : \text{Tang.}\,\frac{AD \backsim BE}{2} :: \text{Tang.}\,\frac{AB}{2} : \text{Tang.}\,\frac{AC \backsim BC}{2}.$$

Et dans le ſecond cas,

$$\text{Tang.}\,\frac{AD \backsim BE}{2} : \text{Tang.}\,\frac{AD+BE}{2} :: \text{Tang.}\,\frac{AB}{2} : \text{Tang.}\,\frac{AC+BC}{2}.$$

Or connoiſſant la moitié de la ſomme, & la moitié de la différence de AC & BC, on aura ces ſegmens.

27. La démonſtration de cette analogie ſe tire de ce théorême de trigonométrie: les tangentes de la moitié de la ſomme & de la moitié de la différence de deux arcs, ſont en raiſon de la ſomme & de la différence de leurs ſinus: ce qui donne lieu à ce raiſonnement. Démonſtration.

$$\text{Sin. } AD : \text{Sin. } BE :: \text{Sin. } AC : \text{Sin. } BC.$$

Donc en ajoutant & en ſouſtrayant

$$\text{Sin. } AD + \text{Sin. } BE : \text{Sin. } AD \backsim \text{Sin. } BE :: \text{Sin. } AC + \text{Sin. } BC : \text{Sin. } AC \backsim \text{Sin. } BC.$$

Et ſubſtituant enfin des rapports égaux.

$$\text{Tang.}\,\frac{AD+BE}{2} : \text{Tang.}\,\frac{AD \backsim BE}{2} :: \text{Tang.}\,\frac{AC+BC}{2} : \text{Tang.}\,\frac{AC \backsim BC}{2}.$$

C. Q. F. D. Or connoiſſant les ſegmens de l'arc oblique, on en déduit les ſegmens de l'horizon qui leur répondent, par ces analogies:

Sin. du compl. de AD : rayon :: Sin. compl. AC : Sin. compl. DC.

Et Sin. compl. BE : rayon :: Sin. compl. BC : Sin. compl. EC.

dans leſquelles le logarithme du ſinus du complément de AD & celui du complément de BE étant d'ordinaire peu inférieurs à celui du rayon, on verra du premier coup d'œil ce qu'il conviendra d'ajouter au ſinus du complément de AC

& BC, pour avoir le ſinus du complément de DC & EC. Ainſi cette méthode n'eſt pas beaucoup plus longue que la précédente, & elle a ſur elle l'avantage de la clarté.

Réduction des angles à l'horizon.

28. Je viens à la réduction des angles à l'horizon, dont nous avons montré plus haut la néceſſité. Je ne dois point diſſimuler ici que les hauteurs & abaiſſemens reſpectifs des objets, d'où dépend cette réduction, n'ont quelquefois pu être obſervés immédiatement. Tantôt des obſervations plus importantes ne nous en laiſſoient pas le tems; tantôt nous étions contrariés par le vent: enfin nous manquions d'un inſtrument, beaucoup plus propre que le quart de cercle, à prendre en fort peu de tems de petites hauteurs ou dépreſſions au-deſſous de l'horizon. Mais comme les erreurs qu'on peut y commettre, fuſſent-elles d'une minute, n'influent que peu, ou point, dans cette réduction, nous avons cru qu'il ſuffiroit de déduire de nos obſervations les hauteurs approchées des montagnes au-deſſus du niveau de la mer; j'entends celles que nous n'avions pu avoir par une obſervation immédiate. Ces obſervations ſont rapportées en détail à la fin de ce livre ſecond. C'eſt ainſi que nous avons réduit les angles à l'horizon, tels qu'on les voit dans la table ſuivante, avec la valeur des côtés oppoſés.

TRIANGLES.	Angles réduits à l'horizon.				Côtés oppoſés en pas romains.	
Embouchure de l'AUSA	L	78°	47′	22″	aH	23614.0
Autre extrémité de la baſe	a	82	2	40	LH	23841.3
CARPEGNA M.	H	19	9	38	La	7901.14
Embouchure de l'AUSA	L	77	20	48	IH	25352.2
Mont LURO	I	66	34	20	LH	23841.3
CARPEGNA M.	H	36	4	52	LI	15302.4
Mont LURO	I	64	59	51	HG	32454.7
CARPEGNA M.	N	69	56	1	IG	33656.7
CATRIA M.	G	45	4	8	IH	25352.2
CARPEGNA M.	H	37	11	41	GF	27417.4
CATRIA M.	G	97	6	47	HF	45004.5
TESIO M.	F	45	41	32	HG	33454.7

Triangles.	Angles réduits à l'horizon.				Côtés opposés en pas romains.	
Catria M.	G	64°	51′	47″	FE	30090.9
Tesio M.	F	59	33	47	GE	28658.0
Pennino M.	E	55	34	26	GF	27417.4
Tesio M.	F	45	46	22	ED	32495.2
Pennino M.	E	92	39	19	FD	45299.0
Fionchi M.	D	41	34	19	FE	30090.9
Tesio M.	F	38	35	49	DC	37186.1
Fionchi M.	D	91	56	38	FC	59574.2
Soriano M.	C	49	27	33	FD	45299 0
Fionchi M.	D	60	5	37	CB	42243.2
Soriano M.	C	70	10	19	DB	45843.9
Genarro M.	B	49	44	4	DC	37186.1
Soriano M.	C	32	12	14	BA	22935.6
Genarro M.	B	68	48	35	CA	40124.3
Dôme de St Pierre	A	78	59	11	CB	42243.2

29. Il est à remarquer que la distance du *Genarro* au dôme de *St Pierre*, réduite à une surface réguliere de la terre, est ici de près de quatre pas trop petite. Car cette réduction ne doit diminuer que de quinze pas la distance de ces stations; d'où il suit que cette distance étant, selon la premiere table, de 22954 pas; elle devroit se réduire à 22939, non à 22935.6. Mais cette erreur vient moins d'un défaut de réduction, que de l'inégalité de la réfraction, qui de tems en tems éleve les objets beaucoup plus que de coutume. Ainsi quoique dans les cas ordinaires on puisse connoître assez sûrement, par la distance du lieu observé, la quantité de la réfraction, on ne peut jamais s'en assurer pleinement que par une observation immédiate. Or l'élevation de l'objet augmente la distance non réduite. Ainsi il n'est pas étonnant qu'en allant d'un triangle à l'autre, on tombe à la fin dans quelque petit mécompte. Cependant pour ne pas donner lieu de croire que par trop de confiance nous ayons raccourci notre dégré, qui est déja si court, nous supposerons que cette différence vient en partie d'une erreur de réduction, & nous y aurons égard dans la suite.

Correction d'une petite erreur.

ARTICLE VI.

Direction des côtés des triangles par rapport à la méridienne de St Pierre de Rome.

On préfere les obſervations faites à Rome ; & pourquoi.

30. Pour trouver la poſition de notre méridienne, nous avons fait ſix obſervations, trois à *Rimini*, & autant à *Rome*. Celles de *Rimini*, pour être les premieres en date, n'en ſont pas plus sûres: non que nous y ayons négligé aucune précaution; mais à cauſe de l'incommodité du lieu où elles ſe faiſoient; & que nous ne pouvions changer en un autre, à moins d'y tranſporter la pendule, & d'y prendre de nouvelles hauteurs correſpondantes: ce qui n'étoit guere praticable dans la circonſtance. Nous n'héſitons pas de donner la préférence aux obſervations de *Rome*, & c'eſt par celles-ci que je commence à entrer dans le détail.

Obſervations de Rome.

31. Le 14 ſeptembre 1753 nous obſervâmes, à l'extrémité ſeptentionale de la plate-forme du college romain, le moment où les deux bords du limbe du ſoleil couchant atteignoient le fil vertical; & nous en conclûmes ce qui ſuit, pour la diſtance du centre à l'arbre de *Soriano*.

	Diſt. du centre du Soleil à *Soriano*.	Même diſtance réduite à l'horiſon.
$5^h\ 56'\ 4''$	$66^\circ\ 18'\ 44''$	$66^\circ\ 18'\ 54''$
6 0 20	65 36 15	65 36 45
6 4 20	64 55 18	64 55 54

Ce qu'on en conclut.

32. La déclinaiſon du ſoleil étant ſuppoſée à ſix heures de $3^\circ\ 11'\ 36''$, il ſuit qu'il décline de la méridienne des quantités ſuivantes:

$5^h\ 56'\ 4''$	$91^\circ\ 43'\ 23''$
6 0 20	92 26 1
6 4 20	93 6 48

Donc

Donc la déclinaison de l'arbre est,

Par la premiere observation .	158°	2′	17″
Par la seconde	158	2	46
Par la troisieme	158	2	42
Et prenant un milieu	158	2	35 (1)

33. Cette déclinaison, lorsqu'elle est orientale, doit être retranchée de 180°; & on l'y ajoutera, si elle est occidentale, comme dans le cas présent La différence dans le premier cas, & la somme dans le second, est ce que nous appellerons dans la suite *angle de position ;* de sorte que angle de position ne signifie autre chose que la distance horizontale du vrai point du nord à un vertical quelconque, en tournant sur la droite. Cette expression m'a paru également propre à abréger le discours, & à y répandre de la clarté. Par exemple au tems de l'équinoxe, l'angle de position du soleil est à son lever de 90°, à midi de 180°, à son coucher de 270, & en Eté de 290, lorsque sa déclinaison septentrionale est de 20°. Ce que c'est qu'angle de position.

34. Le lieu où se sont faites ces observations, est éloigné de 1535 pas du dôme de *Saint Pierre*, plus septentrional de 224 pas, & plus occidental de 1518. Ainsi en tenant compte de cette distance, la parallaxe de *Soriano* sera de 1° 53′ 28″, & la convergence des méridiens de 1′ 7″: leur différence est 1° 52′ 21″, qui, ajoutés à l'angle de position de *Soriano*, vu de la plate-forme, savoir 338° 2′ 35″, donne pour l'angle de position de cette montagne vue du dôme de *Saint Pierre*, Angles de position des stations.

(1) Il n'est point fait mention, dans cet ouvrage, d'un angle qui a été observé en même tems, & qui est nécessaire pour orienter une nouvelle carte topographique de *Rome*, publiée par M. *J. B. Nolli*, dans laquelle on s'est contenté de marquer une boussole, sans avoir égard à la déclinaison de l'aiguille aimantée. Cet angle est celui que forme le dôme de *St Pierre*, avec l'arbre de *Soriano*, vu de l'extrémité septentrionale de la plate forme du college romain. Il s'est trouvé, suivant une lettre de la main du P. Maire, qui a été communiquée au traducteur, de 59° 40′ 4″, qui retranché de la déclinaison de l'arbre 158° 2′ 35″, laisse, pour la déclinaison du dôme vu de la plate-forme, 98° 22′ 31″.

339° 54′ 56″. De-là on tire sans peine les autres angles de position, dont voici la liste.

Du dôme de St Pierre,	le mont Genarro .	58°	54′	7″
Du mont Soriano, . .	le Tésio	8	4	50
	le Fionchi	57	32	23
	le Genarro	127	42	42
Du Fionchi, ...	le Pennino	11	3	20
	le Genarro	177	26	46
	le Tesio	329	29	1
Du Tesio, ...	le Catria	44	8	52
	le Pennino	103	42	39
	le Carpegna . . .	358	27	30
Du Catria, ...	le Luro	6	19	47
	le Pennino	159	17	5
	le Carpegna . . .	321	15	39
Du Carpegna, ...	embouc. de l'Ausa.	35	14	46
	le Luro	71	19	38
De l'embouc. de l'Ausa,	le Luro	137	53	58

On a égard à la convergence des méridiens.

35. Tels seroient, dis-je, les angles de position, si l'on n'avoit égard à la convergence des méridiens. Mais il arriveroit de-là, comme nous le verrons bientôt, que l'embouchure de l'*Ausa* seroit encore de 7 pas $\frac{1}{8}$ plus orientale que le dôme de *Saint Pierre*. Ajoutant donc 5′ 34″ pour la convergence des méridiens dans cette latitude, l'angle de position du mont *Luro*, vu de cette embouchure, sera de 137° 59′ 32″. Voyons maintenant quel doit être cet angle, suivant les observations de *Rimini*.

Observations de Rimini.

36. Le 23 de juillet nous observâmes à *Rimini*, le soleil levant, dans la maison de M. le Comte *Garampi*; & nous trouvâmes les distances suivantes du centre du soleil au signal du mont *Luro*:

Tems vrai.			Dist. observées			réd. à l'horizon.		
4ʰ	34′	43″	74°	19′	0″	74°	19′	3″
4	39	24	73	29	12	73	29	40
4	46	43	72	14	6	72	14	39

La déclinaison du soleil à 4ʰ 39′ étant de 20° 4′ 0″, on a pour les angles de position du centre,

Dans la premiere observation, .	61°	2′	52″
Dans la seconde, ...	61	51	46
Dans la troisieme, ...	63	7	32

Ainsi l'angle de position du mont *Luro* est,

Par la premiere observation, . .	135°	21′	55″
Par la seconde, ...	135	21	26
Par la troisieme, ...	135	22	11
Et prenant un milieu, ...	135	21	51

Cette maison est éloignée de l'embouchure de l'*Ausa* de 846.8 pas, savoir de 835.3 à l'occident, & de 139.1 au midi. De plus, la parallaxe du mont *Luro*, observée de cette montagne même, est de 2° 35′ 34″, & la convergence des méridiens de 39″. Ainsi ajoutant la somme de la parallaxe & de la convergence, on aura pour l'angle de position du mont *Luro*, vu de l'embouchure de l'*Ausa*, 137° 58′ 4″; au lieu que suivant les observations de Rome, il est de 137° 59′ 32″, de près d'une minute & demie plus grand. Je crois que la différence eût été moindre, si nous avions pu observer immédiatement les deux angles de position.

37. Soit tracée maintenant la méridienne du dôme de *St Pierre*, sur laquelle on abaisse une perpendiculaire de l'embouchure de l'*Ausa*. La distance du dôme à la perpendiculaire, sera de 161127.9, ou de 161130.9 pas, suivant qu'on déduira la direction de la méridienne des observations de *Rome*, ou de celles de *Rimini*; & prenant un milieu, elle est de 161129.4: d'où il faut ôter 5.7 pas, à cause que cette perpendiculaire coupe la méridienne en un point, qui est un peu plus septentrional que celui où elle est coupée par le parallele de l'*Ausa*; & il reste pour la distance des paralleles de l'embouchure de l'*Ausa* & du dôme de *Saint Pierre* 161123.7 pas. De plus, selon les observations de *Rome*, l'embouchure de l'*Ausa* est au moins de 7139.8 pas plus orientale que le dôme de *Saint-Pierre*, & selon celles de *Rimini*, de 7070. Le milieu est 7105. Comparaison des observations;

38. En effet, par le n°. 28, le *Soriano* est éloigné du dôme de *Saint Pierre* de 40124.3 pas; & son angle de position, Preuve de son résultat.

par rapport à ce dôme, est de 339° 54′ 56″. Donc il est plus septentrional que le dôme de 37686.5, & plus occidental de 13779.7. On trouvera de même que le *Tésio* est plus septentrional que le *Soriano* de 58983.3 pas, & plus oriental de 8304.0. Donc il est plus septentrional que le dôme de 96669.2, & plus occidental de 5405.7. Pareillement le *Carpegna* se trouve plus septentrional que le *Tesio* de 44988.0, & plus occidental de 1213. Donc il est plus septentrional que le dôme de 141657.2, & plus occidental de 6618.7. Enfin l'embouchure de l'*Ausa* se trouvera plus septentrionale que le *Carpegna* de 19470.7, & de 13758.5 plus orientale. Elle sera donc plus septentrionale que le dôme de 161127.9, & plus orientale de 7139.8. Au lieu de ces nombres, on auroit eu, suivant la remarque du n°. précédent, 161130.9 & 7070.1, si on s'en fût tenu aux observations de *Rimini*, & qu'on se fût contenté de rapprocher la méridienne du côté de *Rimini* de 1′ 28″ (1), sans avoir égard à la convergence des méridiens des montagnes.

Situation des montagnes, Pl. I. F. 2.

39. La table suivante renferme les distances de chaque station au parallele, & au méridien du dôme de *Saint Pierre*, calculées par la méthode du n°. précédent. Voyez la fig. II, pl. I.

	Dist. au parall.		Dist. au mérid.	
Genarro . . . . Ad	11846.3.	dB	19939.4	or.
Soriano . . . . Ae	37686.5.	eC	13779.7	oc.
Fionchi . . . . Af	57644.8.	fD	17596.5	or.
Pennino . . . . Ag	89536.9.	gE	23827.8	or.
Tesio . . . . Ah	96669.2.	hF	5405.7	oc.
Catria . . . . Ai	116342.3.	iG	13690.8	or.
Carpegna . . . . . . Al	141657.2.	lH	6618.7	oc.
Luro . . . . Am.	149774.1.	mI	17399.1	or.
Embouc. de l'Ausa . . An	161127.9.	nL.	7139.8	or.

(1) Il y a dans le texte 29″; c'est une faute d'impression.

ARTICLE VII.

Détermination de la hauteur du pôle à Rome *&* *à* Rimini *par des observations faites dans ces deux villes.*

40. Nous avions choisi trois étoiles pour déterminer la différence de latitude de ces deux villes, savoir β du cocher, α du cygne, & μ de la grande ourse. La premiere se perdit dans les rayons du soleil, tandis que nous observions à *Rimini*: du moins elle avoit si peu de lumiere, qu'elle étoit totalement couverte par le fil, sans qu'on pût s'assurer du point précis auquel elle répondoit. Elle nous servit du moins à déterminer la latitude de *Rome*. Car comme elle étoit fort près du colure des solstices, son changement de déclinaison se faisoit avec tant de lenteur, qu'on le pouvoit tirer sans risque des observations faites par M. *Cassini*, vers l'an 1740, douze ans auparavant. Ajoutons que c'étoit la seule de nos étoiles qui eût été observée pour lors avec exactitude. Car il n'est pas question de μ de la grande ourse, dans ces observations: & pour α du cygne, on y trouve des différences, qui, quoique petites, ne sont pourtant pas à négliger; outre que si nous voulions réduire ces observations à la même époque, il seroit à craindre que l'inégalité de la précession des équinoxes n'y ajoutât de nouvelles erreurs. Choix des étoiles.

41. Pour tirer, des observations de β du cocher, la hauteur du pôle à *Rome*, il faut prendre la déclinaison de cette étoile au commencement de 1740, & en conclure ce qui suit. Hauteur du pôle à *Rome*.

Déclinaison observée le premier Janv. 1740 . .	44°	52′	58″
De-là la déclinaison le 4 Mars 1752	44	53	18
Aberration vers le nord			7
Déclinaison apparente	44	53	25
Dist. au zénith corrigée par diverses observ. .	2	59	30
Hauteur du pôle au college romain.	41	53	55

Il faut retrancher de cette hauteur une seconde, pour la mutation de l'axe, à laquelle M. *Cassini* n'a pu avoir égard, & qui fait que l'étoile étoit plus près du pôle au commencement de 1740, que dans les premiers jours de mars 1752.

De-là la hauteur du pôle au dôme de *Saint Pierre* eſt de 41° 54′ 7″, & aux thermes de Dioclétien, de 41° 54′ 10″, de 17″ plus petite que ne l'avoit trouvé M. *Bianchini* ; ce qui ne doit point paroître étrange, puiſque outre la difficulté de diſtinguer l'ombre de la pénombre, il ſeroit aiſé, au beſoin, de prouver par de fortes raiſons, qu'avec le gnomon de Clément, on ne peut s'aſſurer, qu'à 15 ou 20 ſecondes près, de la latitude d'un lieu.

Différence de la hauteur du pôle à *Rimini*.

42. Je viens au détail des obſervations par leſquelles nous avons déterminé la différence des latitudes de *Rome* & de *Rimini*, de laquelle dépend ſurtout la meſure du dégré.

Par α du cygne.

Diſtances au zénith de α du cygne, obſervées à Rome.

					corrigées;			réd. au 4 mars.			
1752 Mars	4.	2°	34′	31.″5	2°	30′	17.″5	2°	30′	17.″5
	5.	2	34	31. 5	2	30	17. 5	2	30	17. 6
	6.	2	34	32. 2	2	30	18. 2	2	30	18. 5
	7.	2	34	30. 9	2	30	17. 5	2	30	17. 0
	14.	2	26	3. 0	2	30	17. 0	2	30	16. 7
	15.	2	26	2. 3	2	30	16. 3	2	30	18. 1

Dans les quatre premieres obſervations, le limbe du ſecteur étoit tourné à l'orient, & dans les ſuivantes à l'occident: ce qu'il faudra ſous-entendre dans la ſuite, toutes les fois que les obſervations différeront de quelques minutes: & afin de pouvoir placer de ſuite celles qui ont été faites dans une même ſituation de l'inſtrument, nous n'avons point ſuivi dans les tables l'ordre des jours ni des mois. La correction eſt à peu près par tout la même, ſavoir d'environ 4′ 14″; ce qui eſt une ſuite de l'accord qui ſe trouve entre les obſervations. Quant à la réduction au 4 mars, nous n'avons eu égard dans ces obſervations, non plus que dans celles de *Rimini*, qu'à l'aberration de la lumiere (1), parceque dans tout cet intervalle

(1) L'Auteur ne parle ici que des mouvemens découverts par M. *Bradley*. Car il eſt évident, par la ſeule inſpection des tables, qu'il a eu auſſi égard à la préceſſion des équinoxes. Voyez L. 4, n°. 163.

de tems, les distances de nos étoiles au pôle étoient presque stationnaires, pour parler en termes d'astronomie, par rapport à la nutation de l'axe.

43. Distances au zénith de μ de la grande ourse, observées à *Rome.* Par μ de la grande ourse.

					corrigées;			réd. au 4 mars.		
1752 Mars	4.	0°	54′	13.″3	0°	49′	59.″3	0°	49′	59″3
	16.	0	54	16.5	0	50	2.5	0	50	07
	7.	0	45	46.1	0	50	0.1	0	49	597
	9.	0	45	46.1	0	50	0.1	0	49	594
	18.	0	45	48.5	0	50	2.5	0	50	04

On voit que la moyenne distance de α du cygne au zénith, le 4 de mars, est de 2° 30′ 17″.9; & ajoutant la réfraction, de 2° 30′ 20″.7: de même que la moyenne distance de μ de la grande ourse est de 49′ 59″.9; & ajoutant la réfraction, 50′ 0″.8. Venons maintenant à celles de *Rimini.*

Distances de α du cygne au zénith, observées à *Rimini.*

					corrigées;			réd. au 4 de mars.		
1752 Mai	6	0°	26′	52.″5	0°	20′	31.″5	0°	20′	33.″7
	7	0	26	53.2	0	20	32.2	0	20	34.3
	13	0	26	53.3	0	20	32.2	0	20	33.5
	14	0	26	52.9	0	20	31.9	0	20	33.1
Avril	30	0	14	11.9	0	20	32.9	0	20	35.7
Mai	5	0	14	11.9	0	20	32.9	0	20	35.2
	12	0	14	11.2	0	20	32.2	0	20	33.6

Distances de μ de la grande ourse au zénith, observées à *Rimini.*

1752 Avril	29	1°	13′	16.″5	1°	19′	37.″5	1°	19′	45.″6
	30	1	13	15.5	1	19	36.5	1	19	44.7
Mai	2	1	13	16.5	1	19	37.5	1	19	45.9
	6	1	13	16.9	1	19	37.9	1	19	46.8
Avril	25	1	25	57.8	1	19	36.8	1	19	44.4
Mai	1	1	25	56.3	1	19	35.3	1	19	43.7
Mai	3	1	25	57.8	1	19	36.8	1	19	45.3

Ainsi l'erreur de l'instrument s'est trouvée ici de 6′ 21″, de

plus de deux minutes plus grande qu'à *Rome*, à cause de quelque petit dérangement arrivé dans l'objectif: & comme α du cygne étoit du côté du nord par rapport au zénith, & μ de l'ourse du côté du sud, les mouvemens apparens, qui y étoient produits par la précession des équinoxes & l'aberration de la lumiere, se faisoient en sens contraire: ce qui sert beaucoup à faire connoître au juste l'amplitude de l'arc céleste, par la comparaison des observations de chaque étoile. Car s'il y avoit eu quelques erreurs dans les observations, la comparaison les eût dû faire paroître doubles.

Latitude de *Rimini*.

44. Le moyen résultat de toutes les observations de *Rimini*, réduites à la même époque, donne pour la distance de α du cygne au zénith 20′ 34″.2; à quoi ajoutant la réfraction, il vient 20′ 34″.6; qui, retranché de la distance de *Rome*, également augmentée de la réfraction, savoir de 2° 30′ 20″.7, laisse pour la différence de la latitude des observatoires de *Rome* & de *Rimini* 2° 9′ 46″.1. On doit retrancher la distance observée à *Rimini* de celle de *Rome*, parceque l'étoile étoit du côté du nord par rapport à l'une & à l'autre station. Au contraire, μ de la grande ourse s'étant trouvé entre les zéniths de *Rome* & de *Rimini*, on doit ajouter ensemble les distances corrigées par la réfraction, savoir 50′ 0″.8 & 1° 19′ 46″.6, (car la distance moyenne à *Rimini* est 1° 19′ 45″.2, à quoi on ajoute pour la réfraction 1″.4), pour avoir 2° 9′ 47″.4, différence de la latitude trouvée par les observations de cette étoile. Mais la premiere mérite la préférence à bien des égards, parcequ'il étoit besoin le plus souvent d'éclairer les fils, pour observer le passage de μ de la grande ourse au méridien, au lieu que α du cygne n'a jamais eu besoin de ce secours; outre qu'il y a plus d'accord entre les observations de α du cygne, qu'entre celles de μ de l'ourse. Au reste, la différence ne va guere au-delà d'une seconde, & elle seroit beaucoup moindre si nous rejettions l'observation du 6 de mai. Ainsi des observations de α du cygne, & de la hauteur du pôle au college romain, qui s'est trouvée de 41° 53′ 54″, on déduit pour la hauteur du pôle au milieu de la place *Saint Antoine* de *Rimini*, 44° 3′ 40″.

45. Nous savions que, vers la fin de cette année 1752, ces

ces deux étoiles feroient dans des points du ciel fort différens de ceux où nous venions de les trouver ; car l'aberration de la lumiere & la précession des équinoxes concouroient à rapprocher du pôle α du cygne, & à en écarter μ de la grande ourse. Ainsi nous nous proposâmes d'observer, en ce tems-là même, la distance de ces étoiles au zénith, pour avoir une nouvelle preuve de la théorie de M. *Bradley*. C'est dans cette vue qu'au mois de décembre de la même année, nous fîmes à *Rome* les observations suivantes; car je ne m'arrête pas au détail de celles de novembre, qui sont en petit nombre, & qui s'accordent parfaitement avec celles-ci. Autres observations.

Pour α du cygne.

							corrigées ;			réd. au 4 de mars.	
Déc.	1	2°	37′	41.″7	2°	30′	55.″7	2°	30′	20.″0
	7	2	37	41.4	2	30	55.4	2	30	20.9
	10	2	37	40.7	2	30	54.7	2	30	20.8
	12	2	37	40.0	2	30	54.0	2	30	20.5
	18	2	37	37.8	2	30	51.8	2	30	19.7
	24	2	37	37.5	2	30	51.5	2	30	20.9
	8	2	24	9.5	2	30	55.5	2	30	21.2
	11	2	24	8.1	2	30	54.1	2	30	20.4
	19	2	24	6.4	2	30	52.4	2	30	20.5
	22	2	24	5.4	2	30	51.4	2	30	20.3
	26	2	24	4.8	2	30	50.8	2	30	20.7

Pour μ de la grande ourse.

							corrigées ;			réd. au 4 de mars.
Déc.	1	0	56	23.5	0	49	37.5	0	49	58.7
	5	0	56	23.2	0	49	37.2	0	49	58.9
	9	0	56	22.2	0	49	36.1	0	49	58.3
	13	0	56	22.2	0	49	36.2	0	49	58.6
	4	0	42	50.7	0	49	36.7	0	49	58.3
	8	0	42	50.7	0	49	36.7	0	49	59.1
	10	0	42	49.7	0	49	35.7	0	49	57.9

46. Toute la différence qui se trouve entre ces distances réduites au 4 de mars, & les précédentes, vient de l'inégalité de la précession de l'équinoxe, & autres causes aussi peu Elles confirment l'hypothese de *Bradley*.

considérables. Mais puisqu'elles s'accordent au point, que cette différence même n'est qu'une légere partie de l'espace dont l'une des étoiles s'est éloignée, l'autre rapprochée du pôle; elles confirment d'une maniere non équivoque l'hypothese de M. *Bradley*. Du reste, il est plus sûr de s'en tenir aux premieres observations, pour fixer la différence des latitudes, parcequ'elles se suivent de plus près, & que les étoiles varioient fort peu dans leur mouvement. En effet, la plus grande aberration de la queue du cygne, par rapport à la déclinaison, qui étoit septentrionale, n'étoit alors que de 18″ 0‴, le soleil étant avancé de 28° 46′ dans le signe de la balance, au point diamétralement opposé vers le sud; & le mouvement annuel qui rapprochoit cette constellation du pôle, en supposant la précession annuelle des équinoxes de 50″, & sans aucune inégalité, étoit de 12″ 19‴. De même la plus grande aberration de μ de la grande ourse étoit de 11″ 58‴, & l'étoile étoit presqu'au solstice, où elle ne devançoit le soleil que d'une heure, de sorte que la plus grande aberration septentrionale tomboit au solstice d'Eté. Cette étoile ne s'écartoit chaque année, dans la même hypothese que ci-dessus, que de 17″ 34‴ du pôle boréal.

ARTICLE VIII.

Valeur du dégré du méridien, déduite de nos mesures geométriques & de nos observations astronomiques.

Distance des paralleles des observatoires.

47. La distance des paralleles du dôme de *Saint Pierre* & de l'extrémité occidentale de la base de *Rimini* à l'embouchure de l'*Ausa*, est, suivant le n°. 37, de 161123.7 pas. La salle du college romain, où nous avions établi notre observatoire, étoit sous le méridien de l'extrémité septentrionale de la plate-forme, d'où elle étoit éloignée de 45 pas au sud. Donc, par ce qui a été dit n°. 34, cet observatoire étoit de 269 pas plus méridional que le parallele du dôme de *Saint Pierre*. D'un autre côté, l'observatoire de *Rimini* (n°. 36) étoit pareillement de 139.1 pas plus méridional que l'embouchure de l'*Ausa*. Ajoutons la différence de ces nombres,

ſavoir 129.9 à 161123.7, & nous aurons pour la diſtance des paralleles des obſervatoires 161253.6.

48. Cette diſtance, ſuivant les obſervations de α du cygne, répond à un arc de 2 d. 9′ 46″.1 ; ſuivant celles de μ de la grande ourſe, à un arc de 2 d. 9′ 47″.4. Donc, par la premiere détermination, le dégré eſt de 74557.6 pas ; par la ſeconde de 74545.2 : & réduiſant (n°. 20) les pas romains en toiſes, on aura 56972.9 toiſes, & 56963.4 toiſes. Nous avons déja fait voir qu'on doit compter davantage ſur la premiere détermination : cependant pour donner quelque choſe à la ſeconde, nous ſuppoſerons le dégré, calculé ſur la baſe de *Rimini*, de 56970. Il reſte à voir quelle correction on y doit faire.

Amplitude de l'arc.

49. La meſure actuelle de la baſe de *Rome*, a été trouvée (n°. 19) de 8034.67 pas ; & par une ſuite de triangles, dont le premier côté eſt la baſe de *Rimini*, ſa valeur a été conclue de 8033.4. Ainſi ſi l'on commençoit le calcul par la baſe de *Rome*, on trouveroit l'arc du méridien, & par conſéquent le dégré plus long, qu'au n°. précédent, dans la raiſon de ces nombres. Or 8033.4 eſt à 8034.67, comme 56970 à 56979, & prenant un milieu, on aura pour la valeur du dégré, calculé ſur les deux baſes, 56974.5 toiſes : à quoi, par la raiſon expoſée n°. 30, on doit vraiſemblablement ajouter une quantité égale à celle que nous venons de retrancher de la ſeconde détermination ; & par une concluſion finale, le dégré du méridien de *Rome*, depuis le 42me d. $\frac{1}{2}$ juſqu'au 43me $\frac{1}{2}$, ſera de 56979 toiſes.

Valeur du dégré.

50. Ce dégré differe beaucoup de celui que M. *Caſſini* le fils a meſuré dans la partie méridionale de France, & à un demi dégré près, ſous le même parallele. Mais M. *Caſſini* fait lui-même peu de fond ſur ſa meſure ; & il n'y a aucune apparence que le dégré méridional de France differe ſi peu de celui de *Paris*. Rien certainement ne prouve mieux l'exactitude de cet Aſtronome, & de ceux qui ont obſervé avec lui, que d'avoir pu, avec le quart de cercle qu'ils ont employé, approcher de ſi près de la vraie diſtance de leurs paralleles : mais il ne paroît pas poſſible, en obſervant la hauteur des étoiles avec un inſtrument d'un ſi petit rayon, d'éviter des erreurs de trois à quatre ſecondes. Je ne m'arrête point ici à relever les avantages

Beaucoup plus petit que celui de M. *Caſſini*.

d'un secteur qui étoit d'un rayon de moitié plus long; ce qui fait déja un objet considérable, & méritoit d'ailleurs, à tous égards, la préférence sur les meilleurs quarts de cercles.

Dont la mesure paroît douteuse,

51. Pour revenir à ce que nous disions, je crois qu'il passe pour constant que le dégré du méridien en France, pays également éloigné de l'équateur & du pôle, est sujet à de grandes variations suivant la distance. Car quoique les observations faites jusqu'à ce jour ne s'accordent avec aucune hypothese déterminée ; néanmoins jusqu'à ce qu'on démontre le contraire, cette hypothese doit être censée vraie exactement, où à très peu près; &, pour le cas dont il s'agit, suffisamment prouvée par analogie, puisque la même chose arrive dans presque tous les changemens, où la variation n'est jamais plus sensible qu'au point du milieu. Ainsi j'ai peine à croire que le dégré méridional de France soit aussi approchant des dégrés contigus vers le nord, & aussi différent du nôtre, que la mesure de M. *Cassini* semble le représenter.

A moins qu'elle ne soit augmentée par l'action des pyrénées.

52. Mais l'on pourroit peut-être supposer avec autant de vraisemblance, que les pyrénées, situées à l'extrémité méridionale de la méridienne de M. *Cassini*, ont un peu attiré le fil à plomb, & par-là même rapproché son zénith du pôle, diminué l'amplitude de l'arc, & augmenté la mesure du dégré; & que l'interposition de l'Apennin a dû produire, dans nos dégrés d'Italie, un effet tout contraire. Car si l'Apennin a attiré le fil à plomb, tant à *Rome* qu'à *Rimini*, il suit qu'il a augmenté la latitude de *Rimini* & diminué celle de *Rome*, & que le nombre de toises, qui se comptent d'une ville à l'autre, étant réparti sur un arc d'une plus grande amplitude, le dégré en doit paroître plus petit. On peut du moins le supposer pour *Rimini*, qui est presqu'au pied des montagnes, quoiqu'elles ne s'élevent pas d'abord à une assez grande hauteur, pour pouvoir produire un effet sensible : à l'égard de *Rome*, elle est trop éloignée de l'Apennin pour qu'on y puisse rien soupçonner de semblable. Quoi qu'il en soit, je me contente de proposer là-dessus mes conjectures, sans entrer dans une dissertation en forme, n'ayant d'autre but pour le présent que de donner le détail de nos observations, & d'en tirer la mesure du dégré.

53. Nous nous sommes servis, pour la réfraction, de la table insérée dans la mesure de M. *Cassini*. Car, eût-il fallu en retrancher un huitieme du tout, le dégré eût à peine augmenté de plus de deux toises. Dès qu'il n'est question que d'étoiles peu éloignées du zénith, on peut, en fait de réfraction, se servir indifféremment de toute sorte de tables. Car quoique la réfraction varie à mêmes hauteurs, selon la différente constitution de l'atmosphere, cette variation n'est point sensible dans les étoiles voisines du zénith. De la réfraction.

ARTICLE IX.

Hauteurs des montagnes comprises dans la suite des triangles.

54. La montagne de la Sibille est la plus haute de toutes celles de l'*Etat* de l'Eglise. Je me suis servi de méthodes sûres pour en connoître la hauteur: elle s'est trouvée de quinze cents pas romains, peut-être un peu plus, au-dessus du niveau de la mer: mais nous n'avons jamais eu occasion de nous assurer de sa hauteur précise; cette montagne étant fort éloignée des triangles du polygone, & ne nous étant pas même encore connue, dans le tems que nous prenions nos angles. De plus, la mesure des angles horizontaux emportoit presque tout notre tems, & nous n'avions pas toujours le loisir de mesurer les hauteurs & dépressions respectives de nos signaux, bien loin de pouvoir examiner les hauteurs des montagnes étrangeres à notre polygone. Montagne de la *Sibille*, la plus haute de l'Etat de l'Eglise.

55. Le signal placé au sommet de *Carpegna*, vu de l'extrémité occidentale de la base de *Rimini*, étoit à 87 d. 53′ du zénith; & cette extrémité vue de ce signal à 92 d. 24′ 10″. La somme de ces arcs contient 17′ 10″, par-dessus 180 d., au lieu de 19′ 11″ qu'elle auroit eu à cette distance, sans la réfraction. La réfraction est donc au moins de deux minutes; de maniere qu'on peut dire que chacun de ces deux objets est élevé d'une minute par la réfraction. Supposant donc que leur vraie distance au zénith soit de 87 d. 54′ 0″, & 92 d. 25′ 11″; il suit que la montagne est d'environ 940 pas au-dessus du niveau de la mer. Hauteur du mont *Carpegna*.

Moyen d'évaluer la réfraction.

56. C'est une remarque que nous avons souvent faite, & qui ne nous est point particuliere, savoir qu'à moins que la distance ne soit fort grande, la réfraction des deux objets est à peu près égale à la neuvieme partie de l'arc intercepté. Ainsi on peut sans risque, après avoir réduit en arc de grand cercle la distance de la station aux objets, en retrancher la dix-huitieme partie de chaque hauteur observée, & l'ajouter à chaque dépression. L'observation ainsi corrigée donne à très peu près la hauteur ou dépression d'un objet, par rapport au lieu d'où il est observé. On doit prendre garde néanmoins de ne pas faire ces sortes d'observations de grand matin, ou sur le soir, parceque la réfraction étant alors plus considérable, il y auroit une plus grande correction à faire à l'angle observé. Je dis plus : eût on trouvé le total de la réfraction des deux objets, comme dans le n°. précédent, on ne pourroit en donner la moitié à chacun, s'il étoit vrai qu'on n'eût observé que l'un des deux aux heures que nous venons de dire; puisqu'on en devroit conclure, par la même raison, que celui-ci auroit souffert une réfraction plus forte.

Autres hauteurs.

57. A l'égard des autres montagnes, nous avons déja remarqué (n°. 29) que nous n'avions pas toujours eu le loisir d'observer réciproquement leurs hauteurs ou dépressions. C'est le cas de se servir de la méthode que nous venons de proposer, laquelle n'expose à aucune erreur de conséquence, & nous l'avons employée dans l'occasion. La table suivante donne en pas romains & en toises les hauteurs, tant observées que conclues, de toutes nos montagnes au-dessus du niveau de la mer.

		Pas.	Toises.
Hauteur perpend.	du mont Luro	194	148
	de Carpegna	940	718
	de Cattria	1134	868
	de Tesio	626	478
	de Pennino	1057	808
	de Fionchi	907	693
	de Soriano	719	549
	de Genarro	857	654 ½

58. De plus, le dôme de *Saint Pierre*, qui est une de nos principales stations, est de 80 pas au-dessus du niveau de la mer; l'extrémité occidentale de la base de *Rome*, proche le tombeau de *Metella*, appellé aujourd'hui *Tête de bœuf*, de 26 pas; l'extrémité orientale, près de *Frattocchie*, de 93; & autant que nous l'avons pu connoître, par des observations faites à la hâte, le mont *S. Vicino* éloigné du *Catria* de 21 milles ½ à l'orient d'*Hiver*, & le mont *Neron*, qui en est à près de 12 milles, du côté opposé, ont environ un mille de hauteur perpendiculaire. Le mont *Cucco*, proche *Castacciarro*, paroît un peu plus élevé; car, autant qu'il peut m'en souvenir, nous le vîmes du *Catria* au-dessous de l'horizon, & sur la même ligne que le *Pennino*; ainsi on peut lui donner une hauteur moyenne entre celle de *Pennino* & de *Catria*, plus approchante néanmoins de celle de *Catria*, dont il est éloigné de 7 milles. Suite.

59. La seconde pointe du *Catria*, appellée *Montaigu*, (n°. 12) m'a paru d'environ 10 ou 12 pas plus basse que la premiere: car je la voyois à quinze cents pas ou environ de cette premiere pointe, & à peu près à un demi dégré de dépression. Ces montagnes sont sans comparaison les plus hautes de toute cette contrée d'Italie, quoiqu'elles n'approchent pas de la hauteur du mont de la *Sibille*, & de quelques montagnes de Toscane & du royaume de *Naples*. Au sujet de cette chaine de montagnes qui séparent la Campanie de la Province maritime, comme elle étoit fort éloignée de nos triangles, je n'en puis rien dire d'assez sûr: on y voit entre autres une montagne à triple sommet, appellée pour cela *De' tre Porroni*, mais plus proprement *Sempreviva*. Je la croirois volontiers presque égale au *Catria*, parceque cette montagne, vue du mont *Albano*, paroît beaucoup plus haute que le *Gennaro*, quoiqu'elle soit à même distance. Le mont *Albano* n'a pas plus de 600 pas de hauteur. Hauteurs estimées.

60. Mais nous n'étions pas chargés de mesurer la hauteur de toutes les montagnes de l'Etat de l'Eglise, mais seulement les hauteurs ou dépressions respectives de nos signaux, & leur hauteur absolue au-dessus du niveau de la mer: par cette raison nous n'avons rien dit d'une autre chaîne de montagnes, Hauteurs omises.

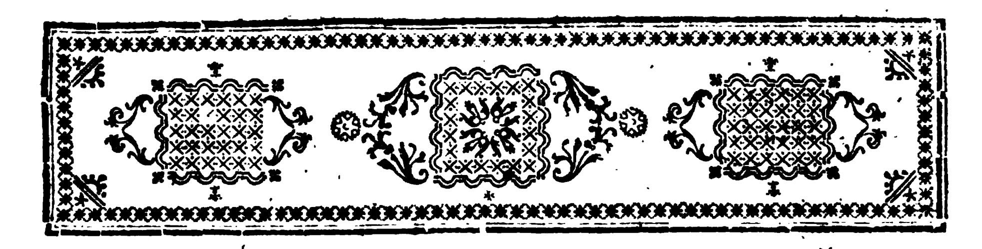
qui s'étend au nord de *Genarro*, en tirant vers *Rieti*, dans laquelle on trouve plusieurs pointes, sans contredit plus hautes que le *Genarro*; ni de quantité d'autres montagnes, dont, entre autres inconvéniens, le sommet n'étoit marqué par aucun point fixe; ce qui empêchoit également d'en mesurer la distance & la hauteur.

Hauteur & abaissemens respectifs des signaux.

Du dôme de *St Pierre*,	le Genarro	+1°	45′	15″
	le Soriano	+0	40	20
Du Genarro,	Dôme de St Pierre	−2	1	40
	Soriano	−0	24	45
	Fionchi	−0	11	15
Du Soriano,	le Genarro	−0	5	35
	le Fionchi	+0	4	0
Du Fionchi,	Soriano	−0	32	25
	Genarro	−0	21	45
	Pennino	+0	4	0
Du Pennino,	Fionchi	−0	27	25
	Catria	+0	0	45
	Tesio	−1	0	0
Du Tesio,	Pennino	+0	38	30
	Catria	+0	54	5
Du Catria,	Tesio	−1	13	50
	Pennino	−0	19	45
	Carpegna	−0	32	40
Du Carpegna,	Catria	+0	9	0
	Tesio	−0	40	10
	Luro	−1	50	10
	Embouc. de l'Ausa	−2	24	10
Du mont Luro,	Embouc. de l'Ausa	−0	45	25
	Carpegna	+1	32	5
	Catria	+1	24	15
De l'embouc. de l'Ausa,	Luro	+0	38	5
	Carpegna	+2	7	0

Fin du Livre II.

LIVRE



LIVRE TROISIEME.

Détail des opérations concernant la réformation de la Géographie de l'Etat de l'Eglise.

1. Les observations tant astronomiques que géographiques, qui nous ont servi à déterminer la distance de *Rome* à *Rimini*, nous donnant non seulement la différence de la latitude de ces deux villes, mais encore la longitude & la latitude des montagnes intermédiaires, nous avons cru devoir profiter de l'occasion pour fixer de plus la position des autres villes & principaux lieux de l'Etat de l'Eglise. Car on ne pouvoit imaginer de méridien plus propre à cette fin que celui de *Rome*, qui traverse cet Etat à peu près par le milieu, & d'où la vue s'étend de part & d'autre jusqu'aux frontieres. En effet, du sommet de *Catria*, comme de celui de *Carpegna*, nous découvrions la montagne de l'*Ascension*, communément appellée *Polesio* du nom du village voisin, & située près d'*Ascoli*. Du haut des montagnes de l'Apennin la vue s'étend sur une plaine immense, où l'on découvre *Comacchio*, *Ferrare*, & jusqu'aux lieux les plus reculés de cette contrée. Ainsi quoique notre dessein ne fût aucunement de nous servir pour cela du grand quart de cercle, tant à cause de la difficulté du transport, que parcequ'il faut beaucoup de tems pour observer avec un instrument d'un long rayon; néanmoins, comme moyennant une ou au plus deux observations exactes faites avec cet instrument, on pouvoit embrasser toute la largeur de l'Etat ecclésiastique, & dès-lors fixer avec plus de précision la position des villes comprises dans cet intervalle;

Méthode pour la réformation de la carte.

il n'y avoit pas lieu de craindre qu'avec un petit quart de cercle, nous fussions exposés à aucune erreur considérable dans le détail. Car si nous nous fussions contentés de déterminer la longitude & la latitude des lieux de proche en proche, les erreurs auroient pu s'accumuler, & devenir enfin très sensibles. C'est pourquoi il fallut s'y prendre d'une autre façon, & commencer par fixer la position réciproque des lieux les plus éloignés, pour y rapporter ensuite celle des autres lieux.

Situation du mont de l'Ascension.

2. Suivant cette méthode, nous avons déterminé par deux triangles la position de la montagne de l'*Ascension*, d'où dépendoit celle d'*Ascoli*. Car quoiqu'un seul triangle eût absolument pu y suffire, ses angles eussent été trop peu proportionnés, & eussent exposé à quelques erreurs. Les monts *Luro* & *Catria* nous servirent d'abord à trouver la distance, & l'angle de position du mont *Comero*, qui, formant ensuite avec le *Catria* & le mont de l'*Ascension*, un second triangle, nous fit connoître la vraie situation de cette montagne. Nous en avons usé de même par rapport aux autres montagnes qui bordent la carte, dont quelques-unes se voient d'assez loin: par exemple, cette montagne de Toscane, près de *Cetona*, dont le sommet, terminé en pointe, se voit, par un tems serein, fort distinctement de *Frascati*. Au reste, de ce grand nombre de montagnes, il en est très peu qui finissent en pointe, de maniere qu'elles présentent de tout côté à la vue le même point.

Erreurs des cartes anciennes.

3. Il ne nous étoit pas possible, en si peu de tems, de voir tout par nos yeux, ni de corriger absolument toutes les fautes des cartes géographiques qui ont paru jusqu'ici; & à moins d'associer un grand nombre de personnes à notre travail, nous ne pouvions décrire exactement le cours des torrens & des rivieres, en marquer tous les détours, toutes les sinuosités, & jusqu'aux plus petites inflexions. Nous nous proposâmes donc simplement de faire une carte générale, c'est-à-dire de fixer la longitude & la latitude des villes & des lieux que nous pourrions découvrir de ces mêmes points. Nous nous flattions que ce qui manqueroit de perfection à notre travail pourroit être suppléé par les cartes particulieres de chaque Province, n'étant pas à présumer qu'il se trouvât de grandes

erreurs dans de petites diſtances. Mais il y eut bien à décompter. Le défaut de ces cartes n'étoit pas ſeulement, comme nous nous l'étions figuré d'abord, d'être mal orientées; il y en avoit bien d'autres: par exemple, dans la carte de l'Ombrie, *Foligno* & *Nurcie* ſont à 11 milles ou environ, de *Spolete*, la premiere à gauche, la ſeconde ſur la droite; *Nocera*, qui eſt entre ces deux villes, ſe trouve à peu près dans la vraie direction qui lui convient, mais de dix milles trop proche de *Spolete*: il en eſt ainſi des autres cartes. On voit que les lieux intermédiaires ne doivent pas être mieux diſpoſés, & ne ſont même ſuſceptibles d'aucun arrangement. Mais ce n'eſt pas là à beaucoup près le ſeul obſtacle que nous euſſions à ſurmonter. Car dans ces cartes il n'eſt pas rare de trouver des lieux qui devroient être placés entre deux villes, & qui les ont toutes deux du même côté. Je ne finirois point ſi je voulois rapporter en détail toutes les fautes de cette eſpece. On ne ſera plus ſurpris de voir trois lieux former ſur les cartes un triangle preſque équilatéral, au lieu d'être, comme ils devroient, ſur la même ligne: c'eſt ce que nous avons remarqué plus d'une fois. Or il ne pouvoit ſe faire que ces différentes ſources d'erreurs ne répandiſſent de la confuſion ſur les diſtances des lieux adjacens. Ainſi les anciennes cartes ne pouvoient nous être d'aucune reſſource pour déterminer la poſition d'un lieu que nous n'euſſions pas vu nous-mêmes.

4. Ce cas n'étoit pourtant pas rare, & pluſieurs raiſons contribuoient à le rendre fréquent. En premier lieu, le tems que nous avions à paſſer ſur les montagnes, où ſont appuyés nos triangles, ſuffiſoit à peine à meſurer les angles relatifs à la méridienne; nous étions même ſouvent en arriere de ce côté-là: & nous avions encore moins le loiſir de faire des obſervations géographiques, quelque favorables d'ailleurs que fuſſent ces poſtes. De plus, pour retirer quelque fruit de ces obſervations, il nous eût fallu auparavant reconnoître par nous-mêmes tous les lieux des environs (ce que nous avons rarement eu occaſion d'exécuter); car l'expérience nous a fait voir qu'on ne peut s'en rapporter là-deſſus aux habitans voiſins: ſouvent ils étoient ſi peu d'accord, qu'il étoit impoſſible de démêler la vérité, ſi tant eſt que quelqu'un l'eût

Difficultés de les corriger.

pour lui ; ce qui n'est pas même certain : & lorsqu'ils étoient tous du même avis, nous ne pouvions encore nous assurer de rien. En effet, je pourrois rapporter un grand nombre d'erreurs en ce genre, & des plus palpables, appuyées sur le rapport unanime de tous ces gens-là, & qui n'ont été reconnues que lorsqu'après avoir supputé de plusieurs façons les mêmes distances, les différences sensibles des résultats ne nous permettoient plus de douter qu'ils ne se fussent tous mépris.

Autres difficultés.

5. Eussions-nous eu tout le loisir d'observer à notre aise, & des gens assez intelligens, ou d'assez bonne foi, pour ne pas nous tromper ; plusieurs autres obstacles venoient à la traverse : tantôt un petit nuage interposé nous déroboit la vue d'une ville ou d'une montagne ; tantôt l'ombre des montagnes, de celles mêmes qui n'étoient qu'à une médiocre distance, ne laissoit pas appercevoir le moindre vestige des lieux qu'elles couvroient : de-là, pour terminer une station, il eût presque toujours fallu un jour entier ; le matin étant plus propre à découvrir les lieux situés à l'occident, & le soir ceux qui sont à l'orient : mais pour l'ordinaire nous n'avions pas le tems de faire de si longues stations, qui d'ailleurs n'eussent abouti à rien, si, comme il arrive souvent, les rayons directs, qui devoient éclairer ces mêmes lieux, eussent été interceptés par quelque nuage : nouvel obstacle qui nous a souvent obligés d'abandonner une station favorable sans avoir pu relever tous les objets visibles.

Moyen insuffisant pour les surmonter ;

6. Le moyen qui nous parut le plus propre à remédier au mal, fut de choisir, entre les lieux dont nous n'avions pu déterminer la position, un nombre de stations, où l'on feroit à notre priere une sorte d'observation si simple, que nous ne comptions pas devoir être arrêtés nulle part, par la difficulté de trouver des gens qui en fussent capables. Cette méthode consiste à étendre une feuille de papier sur un plan horizontal ; & à y choisir vers le milieu un point, d'où l'on tire des lignes vers les différens lieux, qu'on découvre de cette station, en marquant sur chaque ligne le nom du lieu. On devoit, suivant nos instructions, se servir d'une regle pour viser, & prendre garde que la feuille ne changeât de position pendant l'opération. Cette maniere de prendre des angles n'approche pas de la précision du quart de cercle ; mais elle suffit

ordinairement à de légeres distances, & ne produit dans la carte aucune erreur sensible. Nous écrivîmes à ce sujet de côté & d'autre une lettre circulaire ; mais nous ne nous fussions jamais imaginé qu'on pût répondre à une même lettre de tant de différentes façons : les uns se figurant du mystere, dans la chose du monde la plus simple, disoient ne connoître, dans tout le canton, aucun homme en état de se charger de la commission : d'autres s'étoient contentés de tirer d'une main tremblante, d'une tache d'encre qui occupoit beaucoup d'espace, des lignes telles quelles, avec les noms de chaque lieu, d'où l'on ne pouvoit conclure autre chose, sinon que tel endroit étoit à droite, & tel autre à gauche : il s'en est trouvé dont les lignes, d'ailleurs assez droites, n'aboutissoient point à un centre commun : nous eussions encore pu en tirer parti, si elles eussent été tirées dans une juste direction ; mais les unes, comme les autres, étoient si mal combinées, que des lieux diamétralement opposés sur le terrein, occupoient à peine, dans la figure, la quatrieme partie de l'horizon. Nous ne pouvions donc absolument rien tirer de ces observations, pour la valeur des angles. Il en est de même de quelques autres figures, où l'on avoit pris la précaution de marquer les quatre points cardinaux : je veux même croire que les lieux intermédiaires étoient à peu près dans la position qui leur convenoit ; mais on avoit donné à ces lieux une telle grandeur, qu'on ne savoit à quel point s'arrêter : car on avoit rapproché du centre, & sans doute pour plus grand éclaircissement, les lieux les plus voisins ; mais il en arrivoit que tel lieu occupoit dans la figure un angle de soixante dégrés, ou plus. Quoi que l'on entreprenne, dès que l'on n'en a pas une idée juste, on court risque de prendre les obstacles pour des moyens.

7. Il y en eut cependant qui nous comprirent, & exécuterent au mieux ce que nous desirions. Nous sommes ravis d'avoir une occasion de leur en témoigner publiquement notre reconnoissance : mais nous devons nous abstenir de les nommer, de crainte de faire tort aux autres, qui n'ont pas eu un moindre desir de nous obliger, quoique leur travail n'ait pas eu le même succès. Il ne pouvoit se faire néanmoins que ces observations nous fussent aussi utiles, que si nous les eussions

Et qui a réussi pourtant de tems à autre.

faites nous-mêmes; non ſeulement à cauſe de la différence qu'il y a entre une ſimple regle & la lunette d'un quart de cercle; mais encore parceque nous ne pouvions pas toujours choiſir les meilleurs poſtes; & que ceux à qui nous avions écrit, ne pouvant ſavoir aſſez au juſte les relevemens que nous avions plus à cœur, en faiſoient beaucoup d'inutiles, & manquoient les plus néceſſaires. De-là nous nous trouvions obligés de redemander de nouvelles obſervations, & répétitions ſur répétitions; ce qui nous jettoit dans des longueurs ſans fin. Telles opérations ont duré deux mois, qui, dans un jour ſerein, euſſent été pour nous l'ouvrage de quelques heures. Il fallut cependant attendre les réponſes, & ſurſeoir le deſſein de la carte, à moins d'y laiſſer de grandes lacunes en des endroits qui ne ſont rien moins que déſerts. Par ce moyen nous avons eu la poſition de preſque tous les lieux du dioceſe de *S. Severino*, d'un grand nombre de ceux des diocèſes d'*Ancone*, de *Jeſi*, & de *Sinigaglia*, & de quelques autres; non compris quelques endroits, de la poſition deſquels nous voulions nous aſſurer, dans la crainte où nous étions qu'il ne ſe fût gliſſé quelque erreur dans nos obſervations.

Mais qui d'ordinaire a trompé notre attente.

8. Nous n'avons pu avoir aucun éclairciſſement ſur ce qui concerne la partie ſeptentrionale du territoire d'*Orviete*, où il ſe trouve cependant des poſtes fort avantageux, entre autres le mont *Pelia*. Nous n'avons pas mieux réuſſi au ſujet des châteaux ſitués dans le territoire de *Caſcia*, que nous n'avions pu obſerver par nous-mêmes, la ſaiſon étant déja trop avancée, & le tems qui reſtoit ſuffiſant à peine à parcourir la Marche d'*Ancone*, dont nous avions encore à lever la carte. Nous n'avons pas été beaucoup mieux ſervis, dans d'autres pays de montagnes, où nous n'euſſions pas eu beſoin de ſecours, ſi le mauvais tems ne nous eût empêché d'obſerver. Je montai un jour pendant l'Eté ſur le mont dit de *Neron*, avec grande eſpérance d'y prendre quantité de relevemens. Arrivé au ſommet, je fus aſſailli d'une pluie affreuſe, accompagnée d'une grande obſcurité. La pluie dura pluſieurs heures de ſuite; & peu s'en fallut qu'après m'avoir enlevé l'avantage du poſte, elle ne m'ôtât encore la liberté du retour. Les jours ſuivans, le tems ne ſe rétablit point; & m'étant ſurvenu une fievre con-

tractée par la fatigue du voyage du mont *Neron*, je fus contraint de renoncer à la partie. Je n'eus pas même le tems de monter sur le *Pelia*, comme je l'avois projetté, parcequ'il me restoit encore à voir quelques villes, dont je devois déterminer la position avant que de retourner à *Rome*, où je ne pouvois me dispenser de revenir avant les chaleurs. Il y a beaucoup d'autres montagnes, où nous sommes montés sans aucun fruit : la pluie, & plus souvent encore un brouillard épais, rendoient toutes nos tentatives inutiles. Je ne puis trop regretter en particulier la perte que nous fîmes sur le *Montrond*, près de *Visso*, d'où nous eussions pu, par un tems plus favorable, lever quantité de points, principalement cette partie de la Marche d'*Ancone*, qui est à la racine des montagnes. Nous pouvons en dire autant de plusieurs autres postes avantageux, surtout des villes de *Ferrare* & de *Comacchio*, où nous passâmes plusieurs jours à lutter contre les brouillards & la brume, & avec si peu de succès, que nous ne pûmes voir un seul instant *Bertinoro*, ni aucune montagne de l'*Apennin*. Heureusement la position de *Comacchio* nous étoit connue d'ailleurs, sans quoi nous serions encore à la chercher.

9. A propos de *Bertinoro*, on me permettra une remarque qui peut s'appliquer également à tout le pays de *Ferrare* : de vastes plaines, telles que celles de la Romagne, aux environs de *Bertinoro*, ne sont pas toujours les lieux les plus propres aux observations géographiques, à cause des arbres dont elles sont couvertes, & qui cachent les clochers moins élevés des villages, ensorte que tout ce que l'on peut faire, est de fixer la longitude & la latitude des principales villes & bourgs : encore faut-il bien se donner de garde de confondre leurs clochers ; ce qui n'est que trop ordinaire, lorsqu'on n'en découvre que la moindre partie par-dessus les arbres. Quoique nous soyons persuadés d'avoir entrevu *Pomposé* à travers les arbres, en observant du haut d'une tour de *Ferrare*, nous n'en sommes pas néanmoins aussi assurés, que si toute la campagne eût été découverte, & qu'il nous eût été permis d'y promener librement la vue.

Difficultés dans les pays de plaines.

10. Les cartes les plus récentes étoient une autre ressource,

Secours tiré des nouvelles cartes,

pour remplir les vuides de la nôtre, dans les endroits, où nous n'avions que le tems de relever les principaux points. Ces cartes sont de différente espece, suivant qu'elles ont été faites par estime, ou par les regles d'arpentage, & avec la planchette des Arpenteurs, ou par les regles de trigonométrie. A l'égard des premieres, si elles sont copiées sur les anciennes, telle que la carte de la terre de *Sabine*, publiée depuis peu, on ne doit pas plus se fier aux copies qu'aux originaux: on doit même s'y fier moins, puisque les changemens qu'on y a voulu faire de tems en tems, augmentent plutôt les erreurs qu'ils ne les diminuent: ainsi ces cartes ne pouvoient nous être d'aucun secours. Quant à celles qui ont été faites par une estime fondée en raison, & où l'on a eu égard au rapport de gens experts; rien n'empêche d'en tirer parti, pourvu qu'on n'y fasse pas autant de fond que sur des observations géographiques: nous en avons vu une de cette sorte, faite à la main, comprenant une grande partie de la Marche d'*Ançone* orientale; & une carte particuliere du diocese d'*Ascoli*, publiée au siecle passé, & que nous croyons avoir été faite de la même façon: nous avons pris dans celle-là la position des lieux de la Marche d'*Ancone*, qui sont au pied des montagnes; ce sont les seuls de cette Province que nous n'ayons pu observer; & de celle-ci la situation de plusieurs châteaux du diocese d'*Ascoli*: nous avons mis aux uns & aux autres un petit croissant, pour les distinguer des lieux dont la position est plus certaine, quoique ceux-ci ne paroissent pas non plus fort éloignés de la véritable.

Dont quelques-unes sont moins sûres;

11. Je ne sais si l'on pourroit mettre sur la même ligne cette partie du Bolonois, qui est située dans les vallées de l'Apennin. Nous ne pûmes la parcourir, étant pressés d'aller prendre les angles de notre polygone; & nous n'avions personne à qui l'on en pût confier le soin. Nous ne crûmes pas avoir rien de mieux à faire que de copier en cet endroit une nouvelle carte du Duché de *Modene*, dans laquelle j'ai corrigé sur les observations faites en divers voyages par ordre de l'Académie royale des Sciences, la latitude de *Loyan*. Cette carte n'est pas sans défaut: nous y en avons nous-mêmes reconnu plusieurs qui ne sont point à négliger; mais par rapport à l'article en question,

question, nous avions lieu de croire que les erreurs étoient moins considérables. Quoi qu'il en soit, nous ne pouvions nous résoudre à omettre cette contrée dans la carte de l'Etat de l'Eglise ; non plus que la partie la plus montueuse de la légation de *Ravenne*, depuis la riviere de *Savio* jusqu'au Bolonois, de crainte de laisser de trop grandes lacunes. Nous avons été obligés en ceci de passer par-dessus la regle que nous nous étions prescrite, & d'ajouter divers lieux dont la position nous étoit trop peu connue pour pouvoir assurer qu'elle approchât de la véritable. La ville de *Bertinoro*, & les montagnes de *Poggiolo* & *Oriolo*, sont les seuls points que des observations faites à la hâte aient pu nous donner ; & si l'on en excepte trois ou quatre autres, que nous n'avons pu découvrir que d'une seule station, tout le reste ne s'est pas présenté une seule fois à notre vue. Au reste il seroit inutile de leur donner une marque particuliere pour les distinguer : il suffit d'avertir une fois pour toutes, que ces endroits ont besoin de réforme (1).

12. Outre la carte de la grande plaine du Bolonois, qui a paru depuis peu, nous en avons vu deux autres qui ont été faites, à ce que je crois, avec la planchette, & dont aucune n'a encore été publiée : l'une comprend le pays de *Perouse*, l'autre celui de *Camerine* : la premiere est du même Auteur, que la carte de la plaine du Bolonois ; & quoiqu'elle semble faite avec beaucoup de soin, elle a, si je ne me trompe, le défaut qui se glisse d'ordinaire dans ces sortes de cartes, lorsqu'à raison de la grandeur du pays, on met beaucoup de tems à les lever : car on ne les oriente qu'avec la boussole, sans avoir égard à la déclinaison de l'aiguille aimantée, qui varie souvent, & quelquefois assez considérablement, dans l'espace d'un petit nombre d'années : d'où il arrive souvent que deux lignes qui devroient être paralleles, sont inclinées l'une sur l'autre ; ce qui ne se peut faire sans causer du dérangement dans la carte. Et qu'on ne croie pas pouvoir parer à cet inconvénient, au moyen de la planchette ; puisque, sans parler du reste, le changement fréquent du plan de l'horizon met dans la nécessité de recourir à la boussole. Je crois que c'est la vraie

D'autres un peu défectueuses par la variation de la boussole.

(1) Dans la carte réduite, ces cantons sont désignés par une gravure plus foible.

cause des petites différences qui se trouvent entre cette carte & celle du cours du *Tibre*, surtout par rapport à la situation des villes de *Todi* & de *Perouse* : cependant nous eussions pu éclaircir davantage ce point, sans les obstacles dont j'ai parlé nº. 8. Nous avons donc pris dans cette carte la plus grande partie du pays de *Perouse* : seulement nous avons un peu rapproché de *Todi* sa partie méridionale, en conservant d'ailleurs, autant qu'il se pouvoit, la même proportion dans les distances réciproques des lieux. Nous ne sommes pas aussi assurés de leur position, que s'il nous avoit été permis de l'observer par nous-mêmes ; mais comme il n'est pas à présumer qu'il se trouve de grandes erreurs dans des lieux situés entre des villes connues, nous avons cru pouvoir nous dispenser d'y mettre un croissant, pour marquer l'incertitude de leur position.

Défaut particulier de la carte du pays de *Camerine*.

13. A l'égard du pays de *Camerine*, la carte que nous en avions représentoit de la même maniere les torrens qui arrosent cette contrée, & les limites des territoires de chaque lieu ; ce qui devoit nécessairement y jetter de la confusion. Nous en avons tiré, du mieux que nous avons pu, le cours de ces torrens : les cartes anciennes ne pouvant, à cet égard, nous être d'aucune ressource ; non plus que pour mettre les châteaux dans la position qui leur convient ; car c'est précisément l'endroit où elles sont plus défectueuses. S'il se trouve ici, ou ailleurs, quelques fautes dans la description des torrens, la nécessité où nous avons été réduits de nous passer de tout autre secours, pourra nous servir d'excuse ; d'autant plus, que nous n'étions pas chargés de les décrire.

Du Ferrarois.

14. Il nous est tombé entre les mains deux cartes du Ferrarois, que nous croirions volontiers avoir été faites avec un soin égal, si elles étoient plus conformes. Elles ne different cependant pas au point de nous laisser dans une incertitude absolue sur la situation des lieux. Nous savions à quoi nous en tenir là-dessus, ayant observé du haut d'une tour de *Ferrare* la plupart des lieux de cette contrée. Il est vrai que pour en déterminer au juste la position, il eût fallu les observer chacun d'une seconde station ; ce que le peu de tems qui nous restoit ne nous a permis de faire, que par rapport à un ou deux points ; encore les arbres, dont la plaine est toute

couverte, rendent-ils l'observation un peu douteuse: mais cette observation même, quoiqu'imparfaite, ajoutée aux cartes que nous avions, suffisoit pour nous rassurer contre le danger d'adopter de grandes erreurs. Le signe qui distingue les lieux dont la position est douteuse, doit ici être plutôt sous-entendu qu'exprimé; parceque le petit nombre de points, que nous avons pu relever dans cette plage, ne sont pas assez sûrs, & que les autres ne nous paroissent pas extrêmement défectueux.

15. Quant aux cartes construites par les regles de trigonométrie, nous n'en avons pas beaucoup trouvé. Il y en a une du diocese de *Tivoli*, publiée depuis peu par l'Abbé de *Revillas*; mais nos propres observations nous mettoient à peu près en état de nous en passer. Cette carte est très bonne vers le milieu: les bords nous ont paru moins exacts, en particulier par rapport à la position des villes de *Sublaque*, de *Monticello* & de *San Angelo*. Le P. *Magnalli* Jésuite en a fait une des environs de *Fabriano*, qu'il n'a point rendue publique: nous en avons comparé les bords avec la position de *Fabriano*; & leur justesse nous porte à croire que le reste n'est pas moins exact: nous n'y avons pris que la position de quelques châteaux, & de quelques principaux bourgs, que je n'avois pû découvrir à mon passage, ayant pour objet principal de fixer la longitude & la latitude de *Fabriano*. Nous y avons ajouté le Fort de *Belveder*, tiré des anciennes cartes, qui en cet endroit fourmillent de fautes; je crois que nous eussions mieux fait de mettre ce lieu au rang de ceux dont nous n'avons point parlé.

Cartes construites par la trigonométrie.

16. Pour revenir à nos observations géographiques, on souhaiteroit peut-être que nous eussions donné la suite des triangles qui nous ont servis à determiner la position des villes. La chose seroit faite, si ces triangles avoient formé une suite non interrompue. Mais pour la rendre telle, il eût fallu beaucoup d'autres préparatifs, qui eussent emporté bien du tems, sans contribuer en rien à la perfection de l'ouvrage. Je ne parle point de la difficulté que nous avons éprouvée plus d'une fois, en arrivant dans les villes, à reconnoître le point précis que nous avions observé de loin. Souvent deux tours vues de loin

On ne donne pas la suite des triangles, & pourquoi.

se ressembloient si fort, qu'à notre premiere arrivée dans ces lieux, nous ne pouvions reconnoître, qu'après un long examen, à laquelle des deux nous avions pointé. Nous devons épargner à nos lecteurs le détail des tentatives que nous avons faites pour éclaircir nos doutes. De plus (à moins de faire un long circuit,) nous ne pouvions fixer la longitude & la latitude de plusieurs villes considérables, entre autres de *Perouse* & d'*Orviete*, qu'en observant de-là trois objets donnés de position, pour en tirer la position du lieu même de l'observation. A l'égard de *Perouse*, c'est un pur accident qui nous a obligés de recourir à cette méthode: il n'en est pas de même d'*Orviete* & de quelques autres villes, où ce fut pour nous une nécessité, & où par conséquent nous fûmes obligés d'interrompre la suite de nos triangles.

Exemple d'un problême dont les cas sont fréquens.

17. On trouve dans les transactions philosophiques, n. 69, une solution fort simple du problême, où, connoissant la position de trois lieux vus d'un quatrieme, on demande celle du quatrieme. *Collins*, qui en est l'auteur, en a fait l'application à six cas particuliers. Les plus ordinaires sont le quatrieme & le cinquieme. Nous avons un exemple de celui-ci dans la détermination de la position de *Perouse*. Soit (fig. 5. pl. 1.) T le mont *Tesio*, N le *Pennino* près de *Nocera*, C la montagne qui est proche *Cetona*. Soit encore TN de 30091 pas romains, CN de 57913; & dans le triangle TCN, l'angle en T=136 d. 27′, en N=22 d. 34′, en C=20 d. 59′: tout ceci est supposé connu. Outre cela, du point P, qui est la station de *Perouse*, on a trouvé l'angle CPN=160 d. 45′, & TPN=107 d. 48′. Il s'agit de trouver la position de *Perouse*. On imagine un cercle qui passe par les points C, P, N, & qui est rencontré en A par une ligne tirée par les points TP; & on mene les lignes CA, NA, CP, NP. L'angle CPN ayant été trouvé=160 d. 45′, il s'ensuit, par la vingt-deuxieme du troisieme livre d'Euclide, que l'angle CAN=19 d. 15′, & NCA=APN=72 d. 12′. De plus, dans le triangle ACN, on connoît, outre les angles, le côté CN=57913. Donc AN=167250. Ainsi dans le triangle TNA nous avons les côtés TN, NA, avec l'angle compris TNA, qui est la somme des angles TNC=22 d. 34′, &

ANC, ou APC = 88 d. 33', savoir 111 d. 7'. De-là on trouve l'angle ATN, ou PTN = 59 d. 55'. Enfin dans le triangle TNP, dont on connoît déja tous les angles, & le côté TN, on trouvera TP = 6723 ½ pas; & puisqu'on a l'angle de position de TN = 103 d. 45', il ne reste plus qu'à y ajouter l'angle ATN ou PTN = 59 d. 55', pour avoir l'angle de position TP = 163 d. 38'. D'où il est aisé de conclure que la perpendiculaire, tirée de la maison de ville de *Perouse*, où étoit notre station, sur la méridienne du dôme de *St Pierre*, coupe la méridienne à 99217 pas du dôme, & à 3511 de la maison de ville à l'orient.

18. Nous avons trouvé de la même façon la position d'*Orviete*, dont la distance à la méridienne est de 18355 pas, & du même côté; & cette perpendiculaire est à 61070 du dôme. On doit prendre garde néanmoins que les lieux connus ne soient tellement disposés, qu'un petit changement dans la station ne produise point une différence suffisante & assez sensible dans les angles interceptés par les lieux connus: car en ce cas il est évident qu'une légere erreur dans l'observation, en produiroit une grande dans la position de l'observateur. Or cela peut arriver de deux façons; premierement lorsque les lieux connus sont trop éloignés de la station; en second lieu lorsque deux cercles passant par la station & deux lieux connus, se coupent trop obliquement. C'étoit une nécessité pour nous de nous précautionner contre ces inconvéniens, chaque fois que nous avons été dans l'occasion d'user de la méthode.

Précaution à prendre dans ce problême.

19. Cependant il y a eu des villes auxquelles nous n'avons pas même pu appliquer cette méthode, loin d'en pouvoir fixer la position par un simple triangle. De ce nombre est *Nurcie*, qui n'est pas à la vérité siege d'un épiscopat, mais d'une préfecture, & qui, à ce titre, mérite bien le nom de ville. Elle est située dans une plaine étroite, entourée de tous côtés de montagnes assez hautes. Peut-être eût-on pû, au moyen de trois de ces montagnes, déterminer la position de la ville; mais il eût fallu auparavant connoître celle de ces montagnes, & y placer des signaux qui pussent être apperçus de la ville même. De plus, comme le talus est fort

Autre moyen de déterminer la position d'un lieu.

roide, les triangles eussent eu besoin d'une correction considérable. Nous nous sommes bornés à une seule montagne, dont nous avons déterminé la position par la méthode ci-dessus. Ensuite, par une base actuellement mesurée, nous avons calculé la distance de la montagne à la ville. A l'égard de la position, nous l'avons connue en mesurant de cette montagne même les angles que formoit la ville avec les objets connus.

Villes dont la position est moins sûre.

20. Il reste à dire un mot de deux ou trois villes, dont la position est moins sûre, afin qu'on sache ce qui nous a empêchés de la déterminer avec plus d'exactitude. La premiere est *Ponte-corvo*, située hors des frontieres de l'Etat de l'Eglise, quoiqu'elle soit une ville de sa dépendance : nous n'eûmes pas le tems de nous y transporter, étant obligés de nous trouver à *Rome* à jour préfix ; ce qui étoit peu compatible avec un si grand détour : cependant comme nous avons découvert ce lieu à la distance de dix milles, & que nous l'avons observé par une méthode qui, bien qu'imparfaite, n'est pas sujette à de grandes erreurs, nous ne croyons pas l'avoir beaucoup écartée de sa vraie position. La seconde est la ville de *Cagli*, au sujet de laquelle il nous est arrivé quelque chose de semblable; car on découvre du sommet de *Catria* les environs de cette ville, & j'en ai cru voir une extrémité depuis *Feniglio*, Fort ruiné, près de *Pergola* ou *Pertia*. Cependant on doit moins s'en rapporter là-dessus à la carte, qu'à la liste qui est à la fin de ce livre; & j'en dis autant de *Fossombrone*, qu'une observation incertaine rapprocheroit trop du nord de la valeur de 20″. Le contraire est arrivé à *Citta di Castello*, que nous n'avons pu découvrir que du sommet de *Tesio*, sans pouvoir juger du point auquel elle répondoit dans cette direction, que par sa distance à *Montalte*. Or il nous a fallu tirer la position de *Montalte* de la carte du pays de *Perouse*, que nous avons déja vu n'être pas exempte de fautes. Quoiqu'à mon passage par cette ville, je n'aie point apperçu de-là trois objets connus, je me suis rappellé depuis qu'il y avoit au voisinage un poste avantageux; & on y a fait l'observation que j'avois proposée ; ce qui nous a donné une détermination un peu plus correcte que celle qui est marquée dans la carte : on

la trouvera encore à la fin de ce livre. S'il étoit vrai cependant que, par le défaut d'observation, il y eût encore de l'erreur dans la position de ces trois villes, on sera bientôt à même d'y suppléer par une nouvelle carte de la légation d'*Urbin*, que j'espere, Dieu aidant, de lever au premier jour par des observations exactes, faites dans des postes plus favorables, & qui me sont aujourd'hui parfaitement connus : cette carte pourra encore servir à rectifier en partie la carte générale, & à y remplir quelques vuides (1).

21. M. *Bianchini* a trouvé à *Urbin* la hauteur du pôle de 43 d. 48′ 32″, avec le gnomon de l'église *Saint François*, d'un tiers plus grand que le gnomon *Clémentin*. Cette observation est conforme à celle qui avoit été faite peu auparavant avec un secteur de bois, mais parfaitement bien divisé, dit M. *Bianchini*, & dont les pinnules étoient remplacées par une lunette, & par laquelle la latitude de ce lieu n'est augmentée que de 24″. Un si grand accord entre ces observations ne permet pas d'abord de douter de leur justesse, surtout si l'on fait attention qu'elles ont été faites par des méthodes fort différentes ; aussi n'avois-je pas là-dessus le moindre doute avant mon arrivée dans cette ville : car qui se seroit imaginé qu'une lunette mal ajustée d'une part, & de l'autre un pavé incliné, eussent produit dans ces observations des erreurs égales & du même côté ? C'est pourtant ce qu'on ne peut s'empêcher de reconnoître, à moins de vouloir renoncer à toutes les observations : car des observations sûres m'ont donné, pour la longitude & la latitude d'*Urbin*, les quantités suivantes.

Latitude d'Urbin selon *Bianchini*.

22. Le point A (fig. 6. pl. 1.) représente le signal qui est à l'embouchure de l'*Ausa*, L le mont *Luro*, M. la Citadelle de *St. Marin*, C le signal de *Carpegna*, V la ville d'*Urbin*. Des points A & M, menez deux lignes indéfinies ABEDF, MHG, paralleles à la méridienne du dôme de *Saint Pierre*, sur lesquelles vous abaisserez les perpendiculaires MB, LE,

Sa vraie latitude démontrée.

---

(1) Nous avons déja dit qu'on s'est servi de cette nouvelle carte pour corriger celle qui se trouve à la tête de cette traduction.

CD, VF, VG. Joignez encore AM, AL, MV, MC, CV. Cela supposé, nous avons observé les angles suivans dans le triangle AML

L'angle	MAL	79°	47'
	AML	58	43
	ALM	41	30

Donc, puisque AL = 15304 pas, & ML = 17622, on aura AM = 11864; & puisque AM est donnée de position, on aura aussi AB = 9390, & MB = 7253. Ensuite nous avons observé dans le triangle MLV

L'angle	LMV	50°	57'
	MLV	67	55
	MVL	61	8

Donc MV = 18646, MG = 15699, GV = 10060, AF = AB + MG = 25089, FV = GV − MB = 2807. Cette position d'*Urbin* est confirmée par le triangle MCV, dans lequel, connoissant MH, HC, on a MC = 11997. Les angles observés sont

L'angle	VMC	65°	29'
	MCV	75	54
	MVC	38	37

Donc MV = 18643; d'où l'on tire pour FV & AF les mêmes valeurs que ci-dessus.

Sa différence à celle de *Bianchini*.

23. Comme on n'est pas obligé ici de tenir compte de la convergence des méridiens, & que la ligne FV ne décline pas sensiblement du parallele, il suit de ce qui a été dit au livre précédent, que AF répond à un arc de 20′ 11″, qui, soustrait de la latitude du lieu A, savoir 44 d. 3′ 47″, laisse pour la latitude d'*Urbin* 43 d. 43′ 36″, de près de 5 minutes moindre que celle de M. *Bianchini*. Je ne prétends en aucune façon diminuer la réputation d'un Savant, qui a travaillé avec tant de succès à l'avancement de l'Astronomie & de la Géographie; ce que j'en dis n'est que pour prévenir le soupçon que son autorité pourroit répandre sur des observations qui ont l'avantage d'avoir été faites avec de meilleurs instru-

mens,

mens, & par une méthode beaucoup plus parfaite. Or il paroît que son erreur a été occasionnée par l'inclinaison du pavé; car quoiqu'il pût s'y trouver une erreur de cinq, six ou sept minutes, nous ne voyons pas qu'il ait eu la pensée d'y appliquer le niveau.

24. Les latitudes qu'il a assignées aux autres lieux, sont différentes de celles que nous leur avons trouvées: mais il n'a employé, pour déterminer la position des lieux, que de petites bases, qui paroissoient sous des angles d'autant plus petits, qu'elles étoient vuës de plus loin; ce qui ne pouvoit manquer de produire de grandes erreurs dans les distances. Cette méthode n'est bonne que pour mesurer des distances médiocres: hors de-là, on ne doit y recourir qu'au défaut de tout autre moyen; & alors même on doit bien prendre garde de compter trop sur les distances conclues.

Latitudes peu sûres de *Bianchini*.

25. Je dois avertir en finissant, qu'il se peut bien que nous ayons quelquefois pris un lieu pour un autre; & qu'en conséquence sa position ne soit fausse dans la carte, s'il est vrai qu'elle ait été déterminée d'après une telle méprise. Mais je ne crains pas d'affirmer que ce doute ne peut au plus avoir lieu que par rapport à un très petit nombre d'endroits, & des moins considérables: car nous avons toujours été extrêmement en garde contre cette sorte de danger; & je ne vois qu'une seule occasion, où nous ne puissions nous flatter de nous en être totalement affranchis. Du mont *Pennecchia*, dans la terre de *Sabine*, nous découvrîmes sûrement *Collalto*, que nous vîmes encore de *Guadagnolo*, à ce que nous assuroient des personnes qui croyoient s'y connoître. C'est sur leur avis que nous avons fixé la position que nous lui avons donnée dans la carte: mais nous ne pouvons assurer qu'ils ne se soient point trompés; & nous n'avons aucune observation par laquelle nous puissions vérifier leur témoignage.

Avertissement sur un cas particulier.

Il reste à donner une table de la longitude & de la latitude de toutes les villes de l'Etat de l'Eglise, déterminées par nos observations.

TABLE

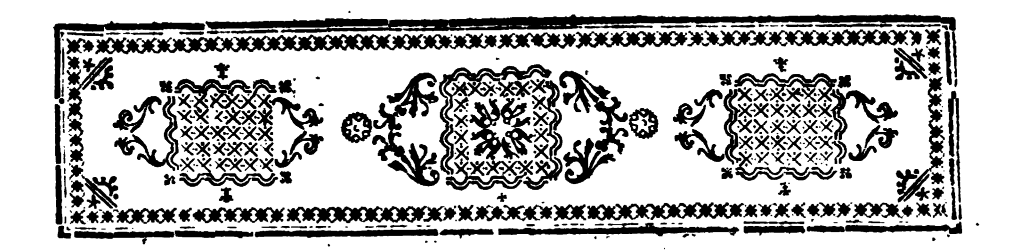
Des Longitudes & Latitudes de toutes les Villes de l'État de l'Église.

NOMS DES VILLES.	Longitude.			Latitude.		
ACQUA-PENDENTE	29°	21′	19″.	42°	45′	23″
ALATRI	30	51	50	41	43	43
ALBE	30	10	31	41	43	50
AMELIE	29	56	1	42	33	32
ANAGNIE	30	40	11	41	44	41
ANCONE	31	1	22	43	37	54
ST ANGELO IN VADO	29	55	40	43	40	0
ASCOLI	31	5	0	42	51	24
ASSISE	30	7	43	43	4	22
BAGNARBA	29	38	22	42	38	9
BERTINORO	29	39	13	44	8	54
BOULOGNE	28	52	33	44	29	39
CAGLI	30	10	4	43	32	55
CAMERINE	30	56	33	43	6	25
CERVIA	29	51	58	44	15	31
CESENE	29	45	35	44	8	25
CINGOLI	30	44	5	43	22	57
CITTA DI CASTELLO	29	44	26	43	28	16
CITTA DELLA PIEVE	29	31	27	43	0	6
CIVITA CASTELLANA	29	55	29	42	17	7
CIVTA VECCHIA	29	17	0	42	5	24
COMACCHIO	29	42	17	44	40	27
CORNETO	29	15	30	42	15	23
FABRIANO	30	25	38	43	20	0
FAENZA	29	24	4	44	17	19
FANO	30	32	8	43	51	0
FERENTINO	30	46	48	41	41	36
FERMO	31	13	56	43	10	18
FERRARE	29	8	40	44	49	56
FOLIGNO	30	13	17	42	57	49
FORLI	29	33	44	44	13	25
FOSSOMBRONE	30	19	22	43	41	15
FRASCATI	30	12	4	41	48	22
FROSINONE	30	52	25	41	38	31
GUBBIO	30	5	27	43	20	35

NOMS des Villes.	Longitude.			Latitude.		
Jesi	30°	45′	55″	43°	31′	5″
Imola	29	13	49	44	21	32
St Leons	29	51	58	43	54	0
Lorette	31	17	20	43	27	0
Macerata	30	58	18	43	18	36
Magliano	30	0	14	42	21	45
Matelica	30	31	8	43	15	8
Montalte	31	7	44	42	59	44
Montefiascone	29	32	59	42	32	15
Narni	30	1	50	42	31	17
Nepi	29	51	25	42	14	39
Nocera	30	18	32	43	6	40
Nursie	30	37	18	42	47	55
Orte	29	54	55	42	27	30
Orviete	29	38	19	42	43	24
Osimo	30	59	38	43	29	36
Ostie	29	48	50	41	45	35
Preneste	30	24	55	41	50	3
Penna di Billi	29	47	10	43	29	23
Pergola	30	20	24	43	33	54
Perouse	29	54	28	43	6	46
Pesaro	30	25	51	43	55	1
Piperno	30	41	57	41	28	38
Ponte Corvo	31	11	48	41	28	5
Porto	29	46	40	41	46	44
Ravenne	29	23	6	44	25	5
Recanati	31	3	38	43	25	44
Rieti	30	22	40	42	24	25
Rimini	30	5	6	44	3	43
Ripa-transone	31	17	0	43	0	24
ROME	30	0	0	41	53	54
Sarcina	29	42	20	43	55	21
Segni	30	32	45	41	41	53
San Severino	30	42	5	43	14	17
Sezze	30	34	29	41	30	5
Sinigaglia	30	44	0	43	43	16
Spolette	30	15	31	42	44	50
Sutri	29	44	26	41	13	34
Terni	30	10	26	42	34	25
Terracine	30	45	37	41	18	14

NOMS DES VILLES.	Longitude.			Latitude.		
Tivoli	30°	19′	3″	41°	57′	49″
Todi	29.	55	26.	42	46	45.
Tolentin	30.	48	28.	43	12	30
Toscanella	29	23	27.	42	24.	50
Velletri	30	17	45.	41	41.	16
Veroli	30.	56	16.	41	41.	41.
Viterbe	29.	37	49.	42	24.	54
Urbanie	30.	3	27.	43	39	56
Urbin	30.	9	20.	43.	43	36

Fin du Livre III.



LIVRE QUATRIEME.

Description & usage des Instrumens.

1. JE me propose de donner ici une description exacte des instrumens qui nous ont servi dans notre mesure. J'ajoute des figures qui pourront éclaircir ce que j'aurai à en dire. On trouvera dans ce livre plusieurs points que je n'ai pas cru inutiles à la pratique de l'Astronomie. Je tâcherai de les exposer avec le plus de netteté qu'il me sera possible, quoique je sente la difficulté qu'il y a de s'exprimer en latin sur ces sortes d'instrumens absolument inconnus aux Anciens. Sujet du Livre.

2. Nous nous sommes servis de trois especes d'instrumens qui feront la matiere d'autant de chapitres. Le premier comprend ceux qui sont d'usage dans les observations astronomiques, opérations les plus délicates de toutes, puisqu'on doit s'y efforcer d'éviter, s'il se peut, jusqu'à l'erreur d'une seconde : le second, les instrumens qui servent à prendre les angles des triangles du polygone, & des autres triangles terrestres : le troisieme, ceux qui ont rapport à la mesure de la base. Et parcequ'on emploie le secteur dans les observations astronomiques, & le quart de cercle à mesurer les angles des triangles terrestres ; je traiterai dans le premier chapitre du secteur, dans le second du quart de cercle, & je ne négligerai rien de ce qui me paroîtra mériter quelque attention dans la construction, la rectification & l'usage de ces instrumens. Sa division.

CHAPITRE PREMIER.

Du Secteur.

Du secteur & de ses différentes parties.

3. LE secteur en Géométrie est une portion de cercle terminée par deux rayons, & l'arc intercepté. Les Astronomes donnent aussi ce nom à un instrument composé d'un limbe circulaire de quelques dégrés ; & d'une regle aboutissant d'une part au milieu du limbe qu'elle soutient, & de l'autre au centre de l'arc. J'ai préféré un limbe rectiligne, qui, posé à angles droits à l'extrémité d'une longue régle, représente plutôt une croix qu'un secteur. Je lui conserve néanmoins son premier nom, parcequ'il ne sert pas moins qu'un secteur proprement dit, à mesurer l'arc intercepté entre une étoile fixe & le zénith.

Sa position. Pl. 2. fig. 1. 2.

4. On le voit tout monté dans la planche 2. fig. 1., & dans une disposition convenable aux observations. Ses différentes parties sont représentées par les autres figures de la même planche.

Son support. Pl. 2. fig 1.

5. Dans la figure premiere a A a' A' B est le support auquel est suspendu le secteur. On le voit encore plus distinctement dans la figure 2, que j'expliquerai à part ; ce qu'on doit entendre aussi de toutes les autres pieces qui sont représentées séparément dans la planche.

Sa regle posée en travers avec son limbe. Pl. 2. fig. 1. 3. 4. 5. 6. 7.

6. Au point B est suspendue une forte regle de fer BDQ, représentée dans la figure 3, avec les petites lames qu'on y a ajoutées. Cette regle se termine en croix dans sa partie inférieure EQE', à laquelle est attaché un limbe de cuivre, avec une lame mobile où sont marquées les divisions, & qui, par le moyen d'une vis placée en E avec un micrometre, peut être poussée à quelque distance du côté de E'. Le limbe est représenté dans la figure 3 en EE', & plus distinctement avec ses divisions dans la figure 4 en EE'. La figure 5 montre en E'E le côté postérieur de la petite régle de fer posée en travers à l'extrémité de la premiere, avec la vis du micrometre. Cette partie de la vis, qui emporte avec soi la lame mobile, est représentée dans la figure 6 ; le cercle & l'aiguille ou l'index, dans la figure 7.

7. Sur la regle de fer est attachée en C une espece de boëte de laiton, portant une aiguille à laquelle est suspendu le fil à plomb CM. On peut en ouvrant la boëte, écarter l'aiguille & découvrir le centre du secteur. Cette boëte est représentée dans la figure 8, fermée & vue obliquement; dans la figure 9, fermée & vue de côté; dans la figure 10, à demi ouverte, & vue de côté; dans la figure 3, entierement ouverte, & vue de face. Centre du secteur. Pl. 2. F. 8. 9. 10. 3.

8. Dans la figure 1, D', D, d', d sont de petites lames de cuivre, assez épaisses, placées à certaines distances, & soudées avec la regle de fer, du côté du limbe & du centre. Nous en ferons voir l'usage dans la suite. On en a représenté une en D dans la figure 4. Lames de la regle. Pl. 2. F. 1. 4.

9. De l'autre côté de la regle est la lunette HH', dont l'objectif est placé en H d'une façon particuliere, que nous expliquerons dans les figures 11 & 12. Le tuyau HH' est de fer blanc; il est attaché à la regle de fer par plusieurs petits bras de cuivre, assez épais, & bien soudés de part & d'autre. Quoique ces bras soient très courts, il a été nécessaire de les représenter un peu plus longs dans la figure, pour faire paroître tout le corps de la lunette. Vers le point H' est une piece de cuivre, fortement serrée avec trois vis contre la regle de fer, portant des fils d'argent qui se coupent à angles droits, & qu'on doit placer au foyer de l'objectif. Cette piece est représentée dans la figure 13. Ce qui a rapport à la maniere de placer l'oculaire & d'éclairer les fils, se voit dans les figures 14 & 15. Lunette. Pl. 2. F. 1. 11. 12.

10. Un peu au-dessus de EE' (fig. 1.) est une autre regle de fer FF' posée en travers sur la regle BDQ, & par derriere, ensorte qu'elle passe entre cette regle & le tube: elle est serrée contre BDQ par deux vis qui l'attachent à une petite barre de fer recourbée, qui enveloppe des trois côtés la longue regle. Elle est représentée en FF' (fig. 4.), & la figure 16 exprime une section de toutes ces pieces, perpendiculaire au plan du secteur. Autre regle posée en travers. Pl. 2. F. 1.

11. Derriere la regle BDQ est le tube HH'; & à la hauteur de FF' est une autre barre de fer GG', beaucoup plus grosse & plus longue, placée à peu près dans la direction de Les poids & les vis. Pl. 1. F. 1. 16.

la méridienne, & enfoncée dans le mur, ou dans la charpente; de telle ſorte qu'elle ne puiſſe être ébranlée. Il y a dans cette barre pluſieurs trous propres à recevoir les vis IF, I'F', qui aboutiſſent à la regle FF'. Outre cela deux fils FK, F'K', attachés par une extrémité à cette regle, paſſent pardeſſus la barre GG', & ſoutiennent deux poids de plomb L L' d'une médiocre groſſeur. La projection de la barre, des vis & des fils, ſe voit encore dans la figure 16.

Le petit bras. Pl. 2. F. 1. 18.

12. Enfin par le moyen de deux vis on ſerre fortement en R contre la barre l'extrémité du bras NOV, dont la partie NO eſt verticale, l'autre horizontale, & un peu élevée au-deſſus de la regle EE', afin que l'autre petit bras ST qu'on y attache puiſſe avoir dans ſa partie inférieure, en P, une ouverture qui réponde à la partie ſupérieure de la regle EE', & par laquelle on puiſſe faire paſſer une vis qui pouſſe le limbe de côté, & donner à l'inſtrument telle inclinaiſon qu'on voudra. Voyez la figure 18.

Suſpenſion du ſecteur. Pl. 2. F. 1.

13. Je n'ai fait juſqu'ici qu'indiquer ſommairement chaque piece; nous allons les expliquer en détail. En attendant il ne ſera pas hors de propos de remarquer que cette maniere de ſuſpendre le ſecteur eſt évidemment la plus avantageuſe; car il pend librement du point B, ſans courir aucun riſque de ſe courber: de plus, en pouſſant l'une des vis IF, I'F', on peut faire tourner l'inſtrument & le mettre dans une poſition parallele à la méridienne, enſuite pouſſant ou retirant les deux vis également, on le mettra dans une ſituation verticale que l'on connoîtra par le fil à plomb CM, qui doit effleurer le limbe EE' ſans y appuyer. Par ce moyen le plan du ſecteur ſe trouvera dans le plan du méridien. Or les poids L, L' l'appliqueront tellement contre les vis IF, I'F', que tandis que ces vis l'empêcheront d'approcher de la barre GG', les poids ne lui permettront pas de s'en écarter; d'où il arrivera que le ſecteur une fois placé dans le plan du méridien, il n'y aura plus d'accident capable de le déranger.

Inclinaiſon du ſecteur.

14. Le ſecteur ainſi diſpoſé, on lui donnera l'inclinaiſon qu'il doit avoir pour obſerver, laquelle répond à la diſtance de l'étoile au zénith; on choiſira parmi les trous de la barre GG', pour les vis IF, I'F', ceux qui conviennent à cette poſition,

position ; on attachera à cette barre le bras NOV du côté où est porté le secteur par son propre poids, & en OV le petit bras ST, de telle sorte que la vis PE' aboutisse à la partie supérieure de la face E' de la regle EE' On voit que cette vis détermine si bien la position du secteur, qu'il ne peut avoir par lui-même aucun mouvement, & qu'il n'y a que le mouvement de la vis qui le puisse incliner plus ou moins à volonté, afin qu'au moment où l'étoile entrera dans le champ de la lunette, on puisse l'amener à celui des fils placés au foyer de l'objectif, qui est perpendiculaire au plan du méridien. Par ce moyen on fera passer l'étoile dans le centre des fils; & l'intervalle qui se trouvera entre le fil à plomb CM & le milieu du limbe EE' (intervalle qu'on pourra connoître exactement, en avançant, par le moyen de la vis E, la lame mobile, jusqu'à ce que l'une de ses divisions rencontre le fil à plomb CM), déterminera la distance de l'étoile au zénith. Mais nous aurons encore occasion de parler de ceci dans la suite.

15. Pour décrire chaque piece en particulier dans le même ordre que nous venons de les parcourir, il faut commencer par le support aAa'A'B qui est représenté un peu plus distinctement dans la figure 2. AA' est une piece de fer ou de bois, placée horizontalement, & dont on voit le côté vertical AA'. Elle est soutenue par le bras aa'; l'un & l'autre sont fortement attachés au mur ou à la charpente. Les faces horizontales EE', ee' sont percées d'un trou vertical, surmonté d'un anneau de fer EE', convexe & poli dans sa partie supérieure, pour retourner plus aisément le secteur. On fait passer à travers cette ouverture & cet anneau jusqu'en F, une forte tige ou pivot eBè, qui étant percé d'un trou au-delà de l'anneau, reçoit une cheville de fer qui appuie sur cet anneau, & porte tout le poids de la tige BF, & du secteur BD suspendu à cette tige. Si la cheville est bien ronde, & aussi polie que l'anneau, elle ne le touchera qu'en deux points, & & l'on aura beaucoup de facilité à faire tourner la tige & le secteur autour de son axe. Support du secteur. Pl. 2. F. 1. 2.

16. La tige eBè a une ouverture en B pour recevoir la regle BD du secteur. A l'extrémité B de cette regle est un Sa suspension. Pl. 2. F. 2.

trou rond, qui se voit en la figure 3, auquel répondent de part & d'autre deux autres ouvertures dans la piece eBè, par lesquelles, & par le trou de la regle on fait passer une cheville de fer Ii, arrêtée d'un côté par une portée i, & serrée de l'autre par une vis. Du reste on pourra donner à toutes les différentes parties de cet ajustement telles dimensions qu'on voudra, pourvu que la machine soit solide.

Sa position. Pl. 2. F. 1. 2.

17. On doit avoir attention en attachant le support, de le placer horizontalement, & à peu près dans la direction de la méridienne. On tournera ensuite la tige de fer sur son axe jusqu'à ce que son ouverture B soit sensiblement parallele à A'A, à peu près comme il est exprimé dans la figure 1, & non pas perpendiculaire comme dans la figure 2, afin qu'ayant fait entrer dans cette fente la regle BQ, le limbe & le plan du secteur soient à peu près dans le plan du méridien. Par ce moyen la lunette n'ira pas donner dans le support AA, soit qu'elle soit placée du côté de l'orient ou de l'occident; le limbe étant au contraire tourné à l'occident ou à l'orient; mais elle recevra librement tous les rayons, quoiqu'elle soit d'ailleurs assez près de la regle BDQ. Il est encore visible qu'on pourra aisément mouvoir le secteur autour de l'axe Ii, (fig. 2.), qu'on voit en B (fig. 1.), en le poussant de côté avec la vis PE'.

Retournement du secteur.

18. Or pour la vérification de l'instrument, dont nous parlerons plus bas, il faut le tourner alternativement sur les deux faces opposées, à l'orient & à l'occident, & faire ensorte qu'il représente dans les deux situations la même étoile au centre des fils. C'est ce qu'on pourra faire aisément, par la facilité qu'on a de mouvoir la tige eBè sur son axe BF: mais il faut dans cette opération commencer par décharger la regle FF' des poids LKF, L'K'F'. Pour n'être pas obligé de porter les poids L, L' sur la barre GG', & de les placer aux points K, K', j'avois attaché à l'extrémité L du fil KL un crochet, & au poids L un anneau. De cette sorte on ôtoit & remettoit facilement les poids, & ayant retiré vers F les fils LK avec leurs crochets, le retournement du secteur étoit l'affaire d'un moment.

Inconvénient à éviter.

19. L'inconvénient unique étoit que les regles FF', & BDQ, au lieu d'être dans le même plan, étoient appliquées

l'une contre l'autre, si le secteur, avant le retournement, avoit été mis dans le plan du méridien, il devoit, après le retournement, être un peu incliné. Mais on y remédioit promptement, en avançant ou reculant les vis IF; le nombre de tours qu'il falloit leur donner pour cela, ne nous étoit pas inconnu, & il étoit toujours le même; il répondoit à la moitié de l'épaisseur des deux regles prises ensemble. Cela fait, nous observions derechef le fil à plomb, & l'instrument étoit bientôt rétabli dans son premier état. Il seroit aisé d'obvier à ce léger inconvénient, en mettant les regles dans le même plan; ce qui donneroit la facilité d'observer dans le même jour, la même étoile dans l'une & l'autre position. Mais nous aurons encore occasion d'en parler dans la suite.

Du rayon. Pl. 2. F. 1.

20. Parlons maintenant de la regle BQ (fig. 1.); elle a un peu plus de 9 pieds de long, (j'entends des pieds de Roi, mesure de *Paris*, & je me servirai ordinairement de cette mesure, qui est divisée, comme l'on sait, en pouces & en lignes, & qui fait environ un palme & demi). Le rayon du secteur, ou l'intervalle de son centre C au milieu de la lame mobile EE', est exactement de neuf pieds. La largeur de la regle est de deux pouces sur cinq lignes d'épaisseur. La regle EE' a 14 pouces en longueur, près de 3 pouces en largeur, & la même épaisseur que BQ.

De l'inclinaison. Pl. 2. F. 2.

21. Le trou qui est à l'extrémité B doit être bien rond, bien poli, & un peu plus grand que celui du cilyndre Ii (fig. 2.) qu'on doit y faire entrer; ces précautions sont nécessaires pour donner plus de jeu à la machine, & pour pouvoir plus aisément, au moyen de la vis PE, incliner le secteur sur le côté.

Du limbe. Pl 2. F. 1. 4.

22. A l'autre extrémité (fig. 1.) est le limbe EE', qu'il faut considérer en détail. Il est représenté dans la figure 4. Sur la regle de fer AA'C'C, dont la largeur AC est de près de 3 pouces, on a soudé une lame de cuivre GG'C'C de 21 lignes de largeur, & de l'épaisseur de deux lignes, sur laquelle on a appliqué trois autres lames de même métal, GG'I'I, II'O'O, OO'C'C, qui ont ensemble la même largeur, c'est-à-dire 7 lignes chacune, & 3 lignes d'épaisseur. De ces trois lames, la premiere & la derniere sont soudées à la lame intérieure,

& aussi immobiles qu'elle : celle du milieu, savoir I I'O'O, quoique retenue entre les deux autres comme dans une coulisse, a néanmoins assez de jeu pour pouvoir être poussée de E en E' de près de 1 pouce, par la vis E. Nous expliquerons bientôt tout ce méchanisme. Remarquons d'abord que cette lame contient les divisions. Sa largeur est partagée en quatre par 3 lignes paralleles aux lignes I I', O O' qui la terminent. La ligne du milieu tient la place de l'arc du secteur; elle en est la tangente. Nous l'appellerons *la ligne du milieu de la lame mobile*. Elle est divisée en pouces & demi-pouces; chaque demi-pouce est encore divisé en trois parties de 2 lignes chacune. Ces intervalles sont distingués par des lignes perpendiculaires à la ligne du milieu de la lame mobile : celles qui marquent les pouces occupent toute la largeur de la lame; celles qui marquent les demi-pouces n'occupent que la largeur des trois paralleles; enfin celles qui désignent les intervalles de deux lignes, ne font précisément que couper la ligne du milieu.

De la lame mobile. Pl. 2. F. 5.

23. Pour voir maintenant comment on fait mouvoir avec la vis E la lame du milieu, voyez la figure 5. La petite lame de laiton AB est attachée par deux vis à la regle de fer, & repliée en équerre en D, avec un trou pour recevoir la vis EF. Cette vis passe dans un écrou P, qui est au revers de la lame mobile. La regle de fer a une large ouverture en forme de coulisse, représentée dans la figure 5. La lame intérieure, sur laquelle glisse la lame mobile, a aussi une ouverture pareille, mais plus étroite; elle est ici couverte par la vis. L'écrou P est fixé sur une lame attachée elle-même à la lame mobile par deux vis qui traversent la petite fente à droite & à gauche de l'écrou P, du côté de E & du côté de F. Lorsqu'on tourne la vis E, on fait avancer vers F l'écrou P qui entraîne avec soi la lame mobile; mais pour que cette lame ne fasse que glisser sur la lame intérieure, sans s'en écarter, elle est retenue par des curseurs M, M', attachés par des vis à la lame mobile, & à travers des ouvertures semblables aux précédentes; c'est-à-dire qu'après avoir fait dans la regle de fer des ouvertures HIKL, H'I'K'L' assez larges pour ne pas gêner le curseur, on en fait dans la lame intérieure de

plus étroites *no*, *n'o'*, par où passent les vis qui attachent aux curseurs la lame mobile. Car les curseurs M, M' glissent sur la lame intérieure, dans la longueur des ouverture HIKL, H'I'K'L', & empêchent la lame mobile de s'en écarter.

24. La figure 6 représente beaucoup plus distinctement l'écrou P avec ses fentes & ses vis. QQ'R'R est l'ouverture faite dans la regle de fer, & à travers laquelle on voit en partie le revers de la lame intérieure. SS'T'T est la fente beaucoup plus petite, faite dans la lame intérieure. VXX'V' est la petite lame qui porte l'écrou P, & qui, au moyen de deux vis VX, V'X' est attachée à la lame mobile, qu'on apperçoit à travers la coulisse SS'T'T. Du curseur. Pl. 2. F. 6.

25. Il est donc clair qu'en tournant & retournant la vis E (fig. 4), on fait avancer & reculer les trois curseurs P, M, M' sur la lame intérieure & fixe GG'C'C, & entre les lames GG'I'I, CC'O'O également immobiles, & que ces curseurs emportent avec eux la lame mobile. Or la vis E a un index EI (fig. 7.), dont la pointe parcourt, à chaque tour de la vis, la circonférence du cercle ICAG. Le diametre du cercle est exprimé (fig. 4.) par la ligne CG. La circonférence est divisée (fig. 7.) en 180 parties, qui font chacune la valeur de deux dégrés, & qui sont numérotées de dix en dix. On connoît à quel tour de la vis on en est, ou de combien de pas le curseur est avancé, par l'index Bb (fig. 4.) qui est attaché par une vis à la lame fixe GG'I'I; les intervalles de chaque révolution entiere étant marqués sur le bord de la lame mobile de b en D. Car c'est à ce nombre de révolutions entieres que répond tout l'espace qu'on peut faire parcourir à la lame mobile, lequel est égal à la longueur de tous les pas de la vis qui peuvent mouvoir le curseur P (fig. 5. & 6.) dans chaque révolution. Cinq de ces intervalles égaloient presque dans notre secteur un intervalle de deux lignes, & chaque tour de la vis faisoit presque parcourir aux curseurs & à la lame mobile la cinquieme partie de cet intervalle, de sorte qu'il falloit presque quinze tours de vis pour avancer la lame d'un demi-pouce. Du micrometre. Pl. 2. F. 4. 5. 6. 7.

26. Pour avoir exactement les divisions qui répondent aux révolutions entieres, il faut commencer par amener la lame

De la maniere de s'en servir. Pl. 2. F. 4.

mobile contre le cercle CG (fig. 4) jusqu'à ce qu'elle le touche par son extrémité IO, & marquer sur cette lame le point b qui répond à la pointe de l'index Bb; ensuite on tournera la vis pour repousser la lame aussi loin qu'elle pourra aller du côté de E', & on marquera à la fin de chaque tour le point désigné par l'index. De cette sorte il suffira dans les opérations d'examiner la position de l'index, pour connoître le nombre des révolutions entieres.

Son exacte précision. Pl. 2. F. 1. 2. 3. 4. 5. 7.

27. Ainsi la vis E (fig. 4.), avec l'index Bb, & la division de la circonférence AGIC (fig. 7.), fait la fonction d'un micrometre. Car, comme nous le verrons plus bas, lorsque l'index EI (fig. 7.) avance de trois parties de cette division, l'espace parcouru par la lame mobile est à peu près la tangente d'une seconde sur le cercle dont le centre est en C (fig. 1.). Notre Artiste s'étoit signalé dans la construction de toutes ces pieces. En effet la lame mobile ne s'écartoit jamais de la lame intérieure, & les filets de la vis EF (fig. 5.) & de son écrou P étoient si égaux dans toutes leurs parties, qu'à chaque mouvement égal de la vis sur son axe répondoit toujours un mouvement égal de la lame mobile, en quoi consiste surtout la perfection de cet instrument.

Des deux fenêtres. Pl. 2. F. 4.

28. Il reste à voir ce que signifient les fenêtres *io*, *i'o'* (fig. 4.) Ce sont en effet de petites fenêtres que j'ai ajoutées, non que je prétendisse en faire aucun usage pour moi, mais pour lever à d'autres un scrupule astronomique ou méchanique. Ce sont deux verres enchassés dans des cadres de laiton, qui débordent de part & d'autre la lame mobile, & qui sont attachés par des vis aux lames fixes en *i*, *o*, & *i'*, *o'*. Chaque verre est marqué par derriere d'une petite ligne droite très déliée, perpendiculaire à la ligne du milieu EE', & qui touche la lame mobile; de sorte que sans aucun danger de parallaxe, on peut connoître la situation de la vis E, & de l'index EI (fig. 7.) dans laquelle cette petite ligne répond à l'une des divisions de la lame mobile, qui glisse sous le verre à mesure qu'on tourne la vis E.

Distance des lignes gravées sur les verres;

29. J'avois fait ensorte que ces lignes répondissent aux divisions qui sont éloignées du milieu de la lame, ou de l'extrémité du rayon, d'environ 6 pouces. Il eût été difficile de les

placer précisément à la distance d'un pied l'une de l'autre; mais il étoit aisé de connoître, tant à *Rome* qu'à *Rimini*, ce qui pouvoit s'en manquer. Il suffisoit pour cela d'avancer ou reculer avec la vis la lame mobile, jusqu'à ce que l'extrémité du pied atteignît la ligne tracée sur le premier verre, en remarquant au moment de cet attouchement la position de l'index; & après avoir répété plusieurs fois cette opération pour plus grande sûreté, de faire la même chose à l'égard du second verre. Car si l'on observoit, dans l'un & l'autre cas, la même position de l'index, c'étoit une preuve que les intervalles étoient égaux; & s'il en arrivoit autrement, la différence des nombres marqués par l'index faisoit voir la différence des intervalles.

30. J'avois pris cette précaution pour constater, par une observation immédiate, une chose dont j'étois convaincu d'ailleurs, savoir qu'on n'a rien à craindre ici de l'excès de la dilatation du laiton sur celle du fer, causée par la chaleur. Car les regles du secteur sont de fer, & la lame mobile de laiton. Or il est évidemment prouvé par les observations, que la chaleur dilate plus le laiton que le fer; d'où il suit que ces parties de la lame mobile seront plus dilatées que celles du rayon du secteur, ou de la distance du centre, d'où pend le fil à plomb, & qu'elles doivent donner par conséquent, à proportion de la chaleur, de plus longues tangentes. Mais il est constant que dans un espace si petit, par rapport au rayon, l'excès de dilatation est si peu de chose, qu'il ne peut occasionner aucune erreur sensible dans les observations. Malgré cela j'ai cru qu'il valoit encore mieux éclaircir ce point, s'il se pouvoit, par une observation immédiate, que par les raisons dont on a coutume de l'appuyer. Or nous avons éprouvé, comme je le dirai en son lieu, en transportant notre secteur de *Rome* à *Rimini*, & de *Rimini* à *Rome*, que malgré la différence de la chaleur, l'intervalle des verres étoit toujours le même par rapport à la lame mobile; d'où il suit que cette lame de laiton n'étoit pas sensiblement plus dilatée que la regle de fer, & les lames de laiton soudées avec elle; que par conséquent chaque partie de la lame mobile donnoit toujours les mêmes angles. Leur usage.

31. J'ai expliqué ce qui regarde le limbe, les lames qui y

De la boëte placée au centre du secteur. Pl. 2. F. 1.

ſont ſoudées, la lame mobile avec ſes diviſions, & ſon mouvement, le micrometre, l'index & les verres; il faut parler maintenant de la petite boëte fixée en C contre la regle de fer, & où ſe trouve le centre du ſecteur, avec une aiguille d'où pend le fil à plomb: c'eſt ce que je ferai le plus brievement qu'il ſera poſſible.

Suite. Pl. 2. F. 1. 8.

32. Sur une petite lame de cuivre bien polie, eſt marqué un point qui indique le centre, & dans lequel on fait repoſer la pointe d'une aiguille extrêmement déliée. On peut cependant l'en retirer, en ouvrant la boëte dont nous allons donner la deſcription; nous parlerons enſuite de la maniere dont elle doit être placée pour être dans une poſition convenable. Cette boëte eſt repréſentée en grand dans la figure 8, & dans la même ſituation que dans la figure 1. a'A'Bba eſt une lame de cuivre quarrée, étroitement ſerrée avec des vis contre la regle de fer. On y attache perpendiculairement deux conſoles ogaeKEDH, a'e'K'E'D'H', qui ont chacune une ouverture ronde pour recevoir l'axe du cylindre KEE'K'. On voit une de ces ouvertures en I. Au cylindre eſt attachée la lame EDFGMCM'G'F'D'E', qui ſert de porte à la boëte, & qui étant fermée, eſt parallele à la lame AA'B. Sa partie G'M'MG entre dans une échancrure faite à une lame perpendiculaire à AA'B, ſavoir MGFfbBNM.. M'G'F'N'. On place encore perpendiculairement ſur la lame AA'B, depuis le pied a'e' de la conſole K'H'D'E' juſqu'à la lame F'G'M'N', une autre lame plus mince, & dont la face extérieure s'éleve autant au-deſſus de la ſuperficie A'AB à laquelle elle eſt parallele, que la ſurface du limbe eſt éloignée de celle de la regle de fer. C'eſt ſur cette face extérieure qu'eſt marqué le point qui détermine le centre. Ce point répond dans la figure 8 au point R', que nous avons marqué ici ſur la ſuperficie D'DFF' de la lame D'DFGCG'F'D', contre laquelle eſt attachée perpendiculairement ſur la face oppoſée, & vis-à-vis de R', la tête de l'aiguille.

Suite. F. 3. 8, 9, 10.

33. L'aiguille ſe voit dans la figure 9, qui repréſente une ſection de la boëte, perpendiculaire au plan A'AB de la figure 8. Le reſte n'a pas beſoin d'explication. P, Q ſont des vis qui attachent la boëte à la regle de fer; MG eſt la face extérieure de

de la petite lame posée en travers; S est le centre du secteur, Rr l'aiguille aboutissant d'une part au centre S, & fixée de l'autre sur la plaque DF*fd*, qui fait corps avec le cylindre qui tourne autour de l'axe I. La boëte est fermée dans la figure 9; elle est à demi ouverte dans la figure 10, où l'aiguille est écartée du centre S. C'est dans cette derniere position qu'on fait entrer l'aiguille dans un large nœud du fil à plomb; ensuite on ferme la boëte en poussant la plaque DC sur FN, & en la remettant dans la position de la figure 9. Pour lors on pousse le fil contre la pointe r, jusqu'à ce qu'il rase la petite lame, sans pourtant la toucher, & qu'ainsi il pende du centre même. Nous n'avions rien à desirer sur tous ces articles. Le point étoit des plus petits, l'aiguille très déliée du côté de la pointe, parfaitement arrondie, & remplissant exactement ce petit point destiné à la recevoir. Enfin la figure 3 représente en C la boëte toute ouverte; l'aiguille est en R, & le centre S totalement découvert.

Maniere de placer cette boëte. Pl. 2. F. 1. & 10.

34. Voilà pour ce qui regarde cette boëte; je viens à la maniere de la placer. Sur le rayon du secteur (fig. 1.), à un pied ou environ de distance de la ligne du milieu de la lame mobile EE', on avoit soudé en d sur la regle de fer une lame de cuivre, une seconde lame à deux pieds de distance en d', une troisieme à trois pieds en D, une quatrieme à six pieds en D'. Elles n'avoient pas tout à fait la même épaisseur que le limbe de cuivre appliqué sur la regle de fer; cette précaution avoit été jugée nécessaire pour empêcher qu'elles ne pussent interrompre le mouvement du fil à plomb; mais leur face antérieure n'étoit guere plus retirée sur la regle que celle du limbe. Cela fait, on appliquoit sur le milieu de la regle un fil délié & bien tendu, & avec le compas à verge ouvert d'un pied, pris exactement sur les divisions même de la ligne du milieu de la lame mobile, on commençoit la mesure du rayon. Une pointe du compas appliquée sur la ligne du milieu, on portoit l'autre à l'endroit désigné par le fil tendu, & avec un petit coup de marteau on marquoit un très petit point sur la lame d; ensuite laissant cette derniere pointe en d, on portoit la premiere en d', où l'on marquoit également un point, puis en D un troisieme; & ayant pris avec un

plus grand compas l'intervalle de trois pieds, depuis la ligne du milieu jusqu'en D, on le transportoit en DD' & en D'C. Le point C déterminoit la position de la boëte, par rapport à la regle de fer à laquelle on devoit ensuite l'attacher, ce point devant tomber précisément sur le point *s* (fig. 9. & 10.), qui représente le centre du secteur. Par-là le rayon de notre secteur, ou la distance du centre à la ligne du milieu de la lame mobile, égaloit neuf fois l'intervalle d'un pied pris sur le limbe.

Division du limbe. Pl. 2. F. 4.

35. Il eût été également facile de déterminer exactement cet intervalle dans la figure 4, & de le diviser en 72 parties, en commençant par transporter trois fois sur la ligne du milieu l'intervalle de deux lignes, deux fois celui de six lignes, trois fois celui d'un pouce, & quatre fois celui de trois pouces; en changeant de compas à chaque nouvel intervalle; car alors on auroit eu un pied contenant exactement les 72 intervalles de deux lignes chacun; on eût ensuite divisé en pouce les intervalles de trois pouces, les pouces en demi-pouces, & les demi-pouces en intervalles de deux lignes: ce qui eût été facile, en se servant des mêmes ouvertures de compas. Il eût encore été à propos de rendre la ligne du milieu fort déliée, & d'y marquer les divisions, non par des lignes perpendiculaires, mais par de petits points qu'on y auroit marqués en frappant légerement sur le compas, dont on auroit pris la précaution de rendre la pointe bien fine & bien aiguë: de cette sorte notre division eût été fort exacte; & dans la vérification qu'on en fait avec le microscope, & dont nous parlerons plus bas, nous n'eussions pas eu à craindre une erreur de la dixieme partie d'une seconde. Mais la division ayant été faite en notre absence, nous y avons trouvé quelques petites inégalités, lesquelles étant une fois bien connues, ne pouvoient plus nuire aux observations. De plus, la ligne du milieu se trouva un peu plus forte que je n'aurois souhaité, & celles qui la traversoient n'étoient ni d'une largeur assez égale dans toutes leurs parties, ni assez exactement perpendiculaires à la ligne du milieu, ni même toujours assez droites. Il résultoit de-là quelque difficulté pour déterminer d'une maniere plus précise le point d'intersection qui marque la division. Cependant je suis

très persuadé que cet inconvénient n'a pas occasionné dans nos observations une erreur d'une seconde; mais je marque ceci pour faire voir combien il eût été facile d'avoir une division beaucoup plus exacte, & beaucoup plus aisée à vérifier. Nous aurons encore occasion d'en parler dans la suite, lorsque nous traiterons de la vérification du secteur.

36. Après avoir expliqué ce qui a rapport au limbe & au centre du secteur, il faut expliquer en détail ce qui concerne la lunette. Lorsqu'on applique la lunette à la regle de fer, on doit avoir égard à trois choses; savoir à l'objectif placé en H (fig. 1.), au micrometre qu'on y ajoute en H', & au tuyau. J'avois une excellente lunette de 9 pieds, qui auroit pu le disputer avec avantage à des lunettes beaucoup plus longues. Je pris soin qu'on l'appliquât de telle sorte à la regle de fer, qu'elle ne fît avec elle qu'un seul instrument; ce que *Graham* avoit exécuté d'une maniere différente dans le secteur de M. *de Maupertuis*. C'est pourquoi je fis attacher immédiatement à la regle de fer, & la boëte de cuivre qui renfermoit l'objectif, & celle qui contenoit les fils qui se coupent à angles droits dans le foyer de l'objectif; je fis ensorte que le tuyau fût aussi attaché immédiatement par lui-même à la regle de fer, & non pas à ces boëtes, dans la crainte que s'il venoit à heurter contre quelque chose, on ne dérangeât la ligne de foi, qui aboutit de l'objet au centre des fils, & que nous appellerons dans la suite l'axe de la lunette. De la lunette. Pl. 2. F. 1.

37. La figure 11 représente une section faite par l'axe de la boëte qui contient l'objectif. La boëte est toute de laiton, & immédiatement attachée à la regle de fer. La section de l'objectif est OoO'O'. Ce verre est enchassé dans deux cercles, l'un supérieur SQPoZXVTT'V'X'Z'o'P'Q'S', l'autre inférieur NOoZXYDEFMM'F'E'D'Y'X'Z'o'O'N'. Ces deux cercles forment une boëte qui renferme l'objectif, dont l'axe passe par *b*; & parceque l'objectif est des meilleurs, ce point *b* se trouve au milieu du diametre du verre OO'. TSS'T' détermine l'ouverture de l'objectif dans l'anneau supérieur, NMM'N' dans l'anneau inférieur. De la boëte qui contient l'objectif. F. 11.

38. Cette boëte, composée de deux cercles, est renfermée par une vis EcE'c' entre deux autres cercles, l'un supérieur Des cercles qui la contiennent.

DEcABCC'B'A' &c. l'autre inférieur LFEcAHGIKKI'G &c. Le cercle inférieur renferme les trois autres avec l'objectif; il reçoit dans sa concavité intérieure LKK'L' le tuyau L*de*L'*d'é* de la lunette, & il est attaché en A'H' sur la regle de fer. *fghi* représente la section de cette regle, pq celle de la petite lame où aboutit la pointe de l'aiguille rR.

De son excentricité.

39. Or le point du milieu de toute la longueur EE' n'est point en *b*, mais en *a*, & c'est en cela que consiste le premier & le principal avantage de cette machine. Car si on lâche la vis Ecc'E', & qu'on souleve le troisieme cercle DEcABCC'B'A', &c. la boëte, composée des deux premiers cercles qui renferment l'objectif, savoir PQSTVXYEF-MNN'M'F' &c. pourra tourner autour de son centre *a*, & dans cette révolution, le point *b*, par où passe l'axe de la lunette, tournera autour du point *a*, & par conséquent s'approchera par une demi-révolution, & s'éloignera par l'autre du plan de la regle, & du plan du secteur passant par le point r. Or par-là on pourra rendre & placer, & aussi exactement qu'on voudra, l'axe de la lunette parallele au plan de l'instrument. Car cet axe passera toujours par *b*, & par le centre des fils du micrometre; & si ce centre reste immobile & placé sensiblement à la même distance du plan du secteur que le point *a*, & que l'excentricité *ab* soit petite, on pourra, en tournant la boëte intérieure, rapprocher ou éloigner le point *b* du plan du secteur, & par-là incliner plus ou moins l'axe de la lunette, jusqu'à ce qu'on l'ait rendu parallele au plan du secteur. Pour lors on serrera la vis Ecc'E, qui appuiera en EDD'E' le troisieme cercle contre le plan EYY'E' de la boëte intérieure. Par ce moyen la boëte intérieure conservera sa position, & la lunette son parallélisme. Nous verrons dans la suite comment on peut s'assurer du parallélisme de l'axe de la lunette, ou connoître de combien elle s'en écarte.

De l'axe de la lunette.

40. Nous appellons ici axe de la lunette la ligne décrite par le rayon qui passe par le centre des fils au foyer de l'objectif, & qui conserve, au sortir de l'objectif, la direction qu'il avoit en y entrant. On appelle proprement axe d'une lentille, la droite qui passe par l'un & l'autre centre

de sa double convexité. Si le verre est bien travaillé, cette ligne passera encore par le centre du verre, & c'est ce qu'on appelle verre bien centré. Le rayon qui passe par cet axe, n'a point de réfraction. Tous les autres rayons homogênes, partant du même point d'un objet éloigné, ou paralleles à ce rayon, s'en rapprochent en entrant dans le verre, & vont se réunir à l'un des points de ce rayon, ensorte néanmoins que les rayons violets se réunissent plus près, les rouges plus loin, & qu'entre ces deux termes il y a une suite de foyers pour les rayons des couleurs intermédiaires. Les rayons qui ne partent pas de quelque point dans l'axe, éprouvent tous quelque réfraction; cependant il y en a toujours quelqu'un qui éprouve deux réfractions contraires & égales, & qui par conséquent sort du verre avec la direction qu'il avoit en y entrant. Dans le cas d'une légere inclinaison à l'axe, j'ai démontré dernierement dans ma dissertation sur les lentilles & les lunettes, que ce rayon est celui qui en arrivant se dirige, dans une lentille également convexe de part & d'autre, au point de l'axe qui est abaissé au-dessous de la superficie, dans laquelle il entre, du tiers de l'épaisseur du verre, & qui en sortant prend une direction qui, étant continuée, coupe l'axe dans un point éloigné, de la superficie par laquelle il sort, du tiers de la même épaisseur. Or il est facile, étant donnés les rayons des deux convexités, de déterminer généralement les points de l'axe, où se terminent ces directions.

Usage du rayon qui conserve sa premiere direction.

41. Mais parceque l'épaisseur du verre est très petite, & à plus forte raison ce tiers de cette épaisseur, lequel mesure la distance oblique des rayons qui suivent ces directions, & que la distance perpendiculaire est encore plus courte que l'oblique, ces deux lignes peuvent passer pour une seule ligne droite, & le rayon qui parvient de l'objet au milieu de l'épaisseur du verre, peut passer pour n'avoir point de réfraction. Tous les autres rayons partant d'un même point de l'objet, ou paralleles à ce premier rayon, se réunissent à lui de la même maniere que dans un axe proprement dit. D'où il suit que si l'axe de l'oculaire se trouve dans la ligne qui passe par le centre des fils, & par le milieu de l'épaisseur de l'objectif, ou, pour parler plus exactement, par le point abaissé

au-dessous du milieu de la sixieme partie de l'épaisseur du verre, dans une lentille également convexe sur chaque face, cela produira le même effet que si le vrai axe de l'objectif passoit par l'intersection des fils. Il suit encore que si l'objectif n'étoit pas exactement perpendiculaire à l'axe du tuyau, l'aberration des rayons, causée par la différence de leur réfrangibilité, seroit encore la même, & que ces rayons se réuniroient dans le même ordre, & représenteroient l'objet dans le même lieu relativement aux fils, & à l'œil de l'observateur. Mais ce point appartient à la dioptrique; nous ne le touchons ici qu'à l'occasion de l'axe de la lunette, & en passant.

Excentricité de l'oculaire. Pl. 2. F. 11, 12.

42. La figure 12 représente une section perpendiculaire à l'axe, faite par le point *a* de la figure 11. Les points EDYONbaN'O'Y'D'E' sont les mêmes dans ces deux figures. E*x* est la distance du point E à la droite AH de la figure 11: mn est l'épaisseur de la regle de fer, *uu'* sa largeur; la boëte est soudée avec la regle en *yuu'y'*; *nr* est l'épaisseur, & *ss'* la longueur de la petite lame, *r* le centre du secteur, *r*R l'aiguille d'acier; le cercle EE''E' est le contour de la boëte qui renferme de l'objectif OO''O'. En tournant la boëte on transporte E en E'', *b* en *b'*; & ayant abaissé sur EE' la perpendiculaire *b' d*, on aura *b d*, qui est la quantité dont l'axe, passant par *b*, s'est rapproché du plan du secteur qui passe par *ss'*; & si E'' tombe en *e*, & par conséquent *b'* en *t*, & *d* en *z*, il s'en approchera encore de la quantité *d z*.

Du tuyau de la lunette. Pl. 2. F. 1.

43. Le tuyau HH' (fig. 1.) est armé d'un bon nombre de petits bras de laiton S, auxquels il est soudé, & qui le tiennent à 10 lignes de la regle de fer, à laquelle il est fixé par leur moyen. Son diametre est de 28 lignes. Il n'a par lui-même aucune flexion sensible: il est si bien uni à la regle, déja assez ferme aussi par elle-même, surtout de côté, qu'il en exclut absolument tout danger de flexion. Au-dedans on a placé plusieurs diaphragmes, pour intercepter les rayons réfléchis par les parois du tube: précaution que nous avons jugée nécessaire pour pouvoir observer de jour, encore a-t-il fallu ajouter à l'extrémité H, un tuyau de deux pieds, pour ombrager l'objectif; moyennant quoi les étoiles paroissoient très bien de jour.

44. Le tuyau est brisé en H', & ne fait point corps avec le micrometre où sont les fils. Il faut donc expliquer la maniere dont le micrometre est attaché à la regle de fer, & dont on doit ensuite ajuster l'oculaire avec le tuyau. L'assemblage du micrometre avec la regle de fer est représenté dans la figure 13. ABCD est une plaque de cuivre fort épaisse, fortement serrée contre la regle YXSTV par trois vis P: elle porte perpendiculairement deux bras de laiton, encore beaucoup plus épais: le premier est représenté tout entier dans la figure en BEGFC, & creusé en demi cercle en EGF: le second ne se laisse voir qu'en partie en AHID. Contre ce dernier on a soudé solidement un tuyau QIHOR de même métal, exactement rond dans l'intérieur, d'un diametre un peu plus petit que le tuyau de fer blanc de la figure 1, & d'environ 4 pouces de long. On enchasse dans celui-ci un autre tuyau de laiton IONKLM, parfaitement rond, & qui s'y ajuste si exactement, qu'on ne peut sans effort le faire avancer ou reculer, ou tourner sur son axe; de façon que par-là on peut lui donner telle position qu'on juge à propos, dans laquelle il reste invariablement.

Du micrometre. Pl. 2. F. 13.

45. Ce tuyau porte une rainure KNML: cette rainure est percée dans le fond en quatre endroits, également éloignés, c'est-à-dire à 90 dégrés l'un de l'autre: on fait passer un fil d'argent très délié dans une de ces petites ouvertures, par exemple en K, & on l'y fixe par un bout avec une goupille de cuivre, qu'on y fait entrer de force, & qui serre si fortement le fil dans cette ouverture, qu'on ne peut plus l'en tirer. Ensuite on fait passer le fil dans l'ouverture opposée M; d'où on le ramene en L par la rainure; & de L on le fait passer en N: mais entre M & L on met dans la rainure une lame élastique, ou un ressort courbé en arc de cercle d'une moindre courbure que celui de la rainure; & tandis qu'on passe le fil, on applique de force le ressort contre le fond de la rainure, & on le retient dans cette position forcée, jusqu'à ce qu'ayant passé le fil dans l'ouverture N, on l'y ait également arrêté avec une goupille; & d'une maniere à ne pouvoir se lâcher. Pour lors le ressort abandonné à lui-même agit sur le fil dans la partie ML de la rainure, le tend encore davantage, &

Fils tendus par une lame élastique.

pour long-tems; le nôtre, au bout de quatre ans, est encore aussi bien tendu que le premier jour: c'est un fil cru, qui a lui-même son élasticité, & qui la conserve; ainsi malgré l'effort continuel du ressort, il ne risque point de se lâcher.

De l'oculaire. Pl. 2. F. 14.

46. Pour montrer maintenant comment l'oculaire est ajusté au tuyau HH' de la figure 1, jettons les yeux sur la figure 14. Cette figure représente un tuyau de fer blanc C*cbf*, prolongé en *f* du côté de *b f*, & brisé en CD du côté de C; il est plus brisé encore en D*gf*. De plus il a une ouverture en *i*GQRIK*h*, qui est d'un grand usage pour éclairer les fils pendant la nuit; & pour les rendre plus solide, on joint les bords de l'ouverture par deux gros fils de laiton *t*K, IG. Au-dessous est un tuyau un peu plus large ML*h*R*a*ONM, avec une petite échancrure en ONM, & l'extrémité du tuyau de la lunette est *cebd*.

Des tuyaux. F. 13. 14. 15.

47. Dans la figure 15 A, B, E, H, P sont les mêmes que dans la figure 13; YTSX est encore ici la regle de fer, mais plus prolongée du côté de SX. *qrp* est un des petits bras de laiton S de la figure 1. *sxuylp*H est la continuation du tuyau de fer blanc, qui se brise au point H. On y soude en *ln*, & du côté opposé, qui ne paroît point dans la figure, une plaque de fer repliée *lymn*, mais un peu plus ample que la partie du tuyau qu'elle couvre, de sorte qu'il y a entre l'un & l'autre un espace qui paroît en m, & dans lequel on fait entrer la partie D*gf*F du tuyau de la figure 14; ainsi C,i,G,Q,F,D sont les mêmes dans ces deux figures, & le reste jusqu'à l'extrémité *cebd* est aussi le même de part & d'autre. Le bord Ci touche le petit bras H; le reste du tuyau est reçu dans la cavité du petit bras E. On peut avancer le tuyau un peu plus large L*h*IR*a*ONM, jusqu'à ce que LhIRK joigne CiGQt, pour fermer de jour l'ouverture iGQRIh; & on peut le retirer de nuit pour éclairer les fils qui sont cachés sous le tuyau nDFQiC entre le petit bras H & le bord circulaire iGQt. Cela fait, on insere dans l'ouverture *cebd* le tuyau qui porte l'oculaire, & qu'on peut très librement avancer ou reculer, suivant qu'on a la vue plus longue ou plus courte, sans causer pour cela le moindre mouvement dans l'objectif, ni dans le micrometre.

48.

48. Il reste à parler des barres GG′, FF′ (fig. 1.), des vis IF, I′F′, des poids L, L′, des bras NOV & ST, & de la vis PE. La figure 16 représente une section horizontale, faite par les vis IF & les fils FK. GG′ & FF′f′f sont ici la même chose que dans la premiere figure GG′ & FF′; les fils FK, les vis FI, & le tuyau H sont aussi les mêmes dans les deux figures. BB′i′i (fig. 16.) est la section de la regle BQ (fig. 1.) à laquelle on attache la regle FF′f′f (fig. 16.) au moyen de la barre recourbée BACrEE′r′C′A′B′, & des vis D, D′. Il eût mieux valu, comme je l'ai insinué n°. 19, plier la regle FF′f′f, comme dans la figure 17, en BifFACC′A′F′f′i′B′, en mettant dans le même plan ff′ & ii′, FF′ & BB′; il arriveroit de-là que lorsqu'on tourneroit le secteur la face ff′ occuperoit exactement la place de la face opposée FF′. Ceci semble se présenter de soi-même; mais je n'y pris garde qu'après les observations commencées, sans que le tems nous permît de les interrompre. De la regle superieure posée en travers. Pl. 2. F. 1. 16. 17.

49. On auroit pu faire la regle FF′ de la même épaisseur que BQ, & l'unir avec elle comme EE′. J'avois même d'abord destiné la regle EE′ à cet usage; mais alors la barre GG′ auroit dû être placée plus bas, & répondre à la regle EE′; & lorsqu'en retournant l'instrument, le limbe EE′ auroit été tourné contre la barre GG′, cette barre auroit empêché de voir sur le limbe le point désigné par le fil à plomb. C'est pourquoi il a fallu lui substituer une autre regle plus élevée, & je fis ensorte qu'on pût l'ôter à volonté, pour faciliter le transport de l'instrument, & donner à sa caisse une forme plus commode. Après le retournement du secteur, nous l'avions bientôt rétabli dans sa premiere position, au moyen des vis IF, I′F′; de plus, comme nous avions à observer plusieurs étoiles qui exigeoient différentes inclinaisons du secteur, il falloit placer les vis différemment pour chacune, de sorte que nous ne pouvions nous servir deux jours de suite de la même position. Suite. F. 1.

50. Il n'est pas besoin de placer si scrupuleusement dans la direction de la méridienne la barre GG′, puisqu'en avançant les vis IF, I′F′, l'une plus, l'autre moins, on met aisément le limbe dans le plan du méridien. Il y avoit deux rangs Des vis de cette regle.

de trous dans la barre, parceque dans le cas d'une plus grande inclinaiſon du ſecteur, le limbe eſt plus élevé, & demande par conſéquent plus d'élevation dans les vis; ces trous étoient en aſſez grand nombre pour pouvoir donner de part & d'autre à l'inſtrument l'inclinaiſon qu'on jugeroit à propos.

Du bras de la regle inférieure. Pl. 2. F. 1. 18.

51. Pour ce qui eſt maintenant du bras RNOV, il eſt repréſenté dans la figure 18, dans laquelle, R exprime l'ouverture où l'on fait entrer la barre GG′ de la figure 1. Il y a en N deux vis qui ſerrent étroitement le bras contre la barre. Le petit bras ST eſt repréſenté ſéparément, & un peu plus bas, avec ſa vis PE′. Or il eſt clair qu'on peut attacher le bras NOV avec les vis N, en quelque endroit qu'on voudra de la barre GG′, & le petit bras ST en quelque endroit qu'on voudra de la partie OV, pour pouvoir enſuite avec la vis PE′ pouſſer la regle EE′, ſur laquelle on a laiſſé pour cela un eſpace libre AGG′A′ (fig. 4.), au-deſſus des lames de cuivre, de crainte que la vis PE′ n'allât heurter contre le micrometre E, ou contre la lame mobile. Du reſte j'ai choiſi de pouſſer la regle EE′ plutôt que FF, afin que l'obſervateur, dans le tems même de l'obſervation, pût appliquer la main à la tête de la vis X, & incliner plus ou moins l'inſtrument, juſqu'à ce que l'étoile arrivât ſur le fil perpendiculaire au plan du ſecteur.

Situation de l'oculaire. F. 1.

52. Pour finir cet article, obſervez que l'extrémité du tube n'eſt marquée à la hauteur H′ que pour pouvoir être vue dans la figure; car elle doit deſcendre juſqu'au bas de la regle BQ, & c'eſt près de cet endroit que ſe trouve le micrometre; de ſorte qu'on peut fort commodément approcher l'œil de l'entrée du tube, & qu'on n'a preſque rien à craindre de la flèxion de l'inſtrument, qui d'ailleurs, ainſi que nous l'avons dit, ne peut être ſenſible.

De l'aiguille du centre. F. 9.

53. Voilà ce qui regarde la conſtruction du ſecteur: venons à ſon uſage. Nous avons ici trois choſes à conſidérer, la diſpoſition des parties, la maniere d'obſerver, les obſervations mêmes. Quant à la diſpoſition des parties, on doit avoir ſoin premierement que la pointe *r* (fig. 9.) de l'aiguille du centre R*r* rempliſſe exactement le point *s* marqué ſur la petite lame, & qu'elle ſoit parfaitement ronde. Nous n'avions rien à deſirer ſur ce point, comme je l'ai déja dit. Mais c'eſt un point d'une

extrême délicatesse, lorsqu'on attache l'aiguille à la lame DF*fd*, & il y a peu d'ouvriers qui en soient capables. On en viendra plus aisément à bout en perçant la lame en RR, & en se servant d'une plus longue aiguille. La boëte fermée, on fera entrer l'aiguille dans l'ouverture RR jusqu'à ce que la pointe aboutisse en *s*. La tête de l'aiguille restera en dehors de la boëte, & le diametre du trou étant un peu plus grand que celui de l'aiguille, il sera aisé de reconnoître si l'aiguille est bien ronde. Car on n'aura qu'à la faire tourner sur son axe, en observant en même tems si le fil à plomb CM (fig. 1.) répond toujours à la même division; & s'il change tant soit peu de position, on connoîtra aisément par le mouvement de la lame mobile, & à l'aide du microscope, jusqu'aux plus petites différences des demi-diametres de l'aiguille, & ce qu'il s'en faut que son axe ne réponde également au point du centre.

54. Il faut ensuite vérifier les divisions, tant celles du rayon du secteur, depuis le centre C jusqu'à la ligne du milieu de la lame mobile, que celles de la ligne du milieu. C'est ce qu'on pourra exécuter sans difficulté en se servant du compas à verge, dont les pointes doivent être bien arrondies & bien aiguës, & de la vis E; mais on y parviendra encore plus aisément avec un autre compas, qui, au lieu de deux pointes, porte deux verres, l'un fixe, l'autre mobile. Je dirai d'abord comment, avec un verre seul, nous avons procédé à l'examen des divisions; je donnerai ensuite une idée de ce compas, armé de verres au lieu de pointes, & qui n'est pas d'ailleurs d'une construction difficile. Instrumens de vérification des divisions. Pl. 2. F. 1.

55. D'abord on peut vérifier très exactement la vis E (fig. 4.) par le moyen du cercle ACIG (fig. 7.), & de l'index EI. Sur un verre bien net, bien plané & bien poli, menez deux paralleles éloignées l'une de l'autre de la distance d'environ un pas de la vis, ou de l'intervalle parcouru par la lame mobile pendant un tour entier de l'index EI (fig. 7.). Tirez ensuite une troisieme parallele éloignée de la premiere d'une distance quintuple, ou de cinq pas de la vis, puis une quatrieme éloignée de dix pas ou environ. Toutes ces lignes peuvent être coupées par une perpendiculaire, qui suppléra, comme nous le verrons bientôt, à tous les défauts qui pourroient se rencontrer De la vis du micrometre. F. 4. 7.

dans leur parallélisme. Ces lignes doivent être bien égales, & très déliées. On pourra les tracer avec un morceau de pierre à fusil, qui, étant brisée, donne des pointes fort aiguës, qui ne coupent pas le verre comme le diamant.

Vérification de la vis. Pl 2. F. 4. 18. 7.

56. Le verre ainsi préparé, on l'appliquera sur les lames CC', G'G (fig. 4.), & on l'y fera tenir avec de la cire, ou, pour écarter tout scrupule, avec un instrument semblable à celui qu'on auroit dans la figure 18, en retranchant la partie *a*P du petit bras TSP, & laissant T*ta*A avec la vis S; je veux dire en faisant entrer dans l'ouverture de cet instrument tant la regle de fer, que les lames & le verre, & en les serrant au moyen de la vis S appliquée sur le revers de la régle; car de cette sorte le verre sera tellement fixé sur les lames G'GII', O'OCC', qu'il ne pourra être ébranlé par le mouvement de la lame mobile. On tournera contre les lames la surface du verre sur laquelle on a tracé des paralleles: la perpendiculaire qui traverse ces paralleles, doit répondre à la ligne du milieu de la lame mobile, & la premiere parallele à l'une de ses divisions, dans le moment où l'index *b* (fig. 4.), & l'aiguille EI (fig. 7.), marquent le commencement des divisions, & où la lame mobile (fig. 4.) n'a point encore commencé à avancer du côté de E'; ensuite, par le mouvement de l'index EI, on fera avancer la lame mobile, dont le même point de division, après environ un tour de vis, arrivera sur la seconde parallele, & l'on remarquera alors de combien de parties du micrometre cet intervalle differe de celui d'un pas de la vis, lequel répond à toute la circonférence ACIG. La différence, s'il y en a, sera au moins très petite. Ensuite ayant placé l'aiguille à la fin de la premiere révolution, au nombre 180, & lâché la vis qui attachoit le verre aux lames fixes, on avancera le verre jusqu'à ce que sa premiere parallele réponde à cette même division de la lame mobile avancée par la premiere révolution du micrometre; on attachera de nouveau le verre contre les lames fixes, & par un second tour qu'on donnera à la vis, & qu'on continuera jusqu'à ce que cette division réponde à la seconde parallele, on connoîtra derechef la différence de la seconde révolution entiere du micrometre, ou du second pas de la vis, & de l'intervalle qui se trouve

entre ces mêmes paralleles : on pourra de la même maniere comparer à cet intervalle les autres révolutions du micrometre, ou pas de la vis, & constater l'égalité de ces pas, ou de ces révolutions comparées les unes aux autres, ou la quantité précise de leurs différences.

57. De même dans la crainte que les erreurs ne s'accumulent, après avoir comparé les pas de la vis un à un, on pourra les comparer de cinq en cinq avec l'intervalle de la premiere & de la troisieme parallele, puis de dix en dix, & ainsi de suite, au cas que l'on veuille se servir d'une plus longue vis. Si l'on vouloit encore tirer des paralleles distantes de la moitié, ou du tiers d'un pas de la vis, ou d'un, & même de plusieurs pas déja connus, ajoutés à cette moitié, à ce tiers, &c. on pourroit comparer également les parties de révolutions, & connoître à fond l'état de la vis. Mais lorsqu'on n'emploie qu'un petit nombre de pas, & que la vis est faite avec un peu de soin, on n'y doit trouver aucune différence sensible. Même sujet.

58. Il est à remarquer, & ceci peut servir de même pour ce qui nous reste à dire sur la vérification du secteur, & sur celle du quart de cercle, l'une & l'autre ayant été faites par cette méthode, que le moment, où le point de la division arrive sur la parallele tracée sur le verre, se connoît beaucoup mieux par un mouvement continu du micrometre & de la lame. Nous avons observé souvent que la ligne paroissoit répondre au point de la division, quoique nous examinassions l'un & l'autre avec le microscope, & que malgré cela ayant ensuite retiré, puis avancé la lame, leur point de rencontre ne répondoit plus au même nombre de parties du micrometre. Après nous être convaincus à loisir de cette différence en répétant plusieurs fois la même opération, nous prîmes le parti de ne plus déterminer le point de rencontre que par un mouvement continu; & il nous est arrivé très souvent depuis, en observant l'un après l'autre, de nous accorder à une, ou tout au plus à deux parties près du micrometre, quoique celui qui observoit actuellement ne tournât point lui-même la vis, & ne connût point les nombres indiqués par l'index, & qu'il se contentât d'avertir son compagnon, au moment de la ren- Remarque sur la maniere de se servir du micrometre.

contre, d'arrêter l'index, & de marquer le nombre. Le mouvement de la vis doit être lent & égal, pour la commodité de l'observateur & le succès de l'observation.

Sur les moyens de distinguer les points de la division;

59. Observez de plus, & c'est encore une chose que j'ai moi-même éprouvée, que si la division est faite par de petits points bien ronds & bien unis, & qu'on applique le microscope, en éclairant au même endroit la division, par le moyen d'une lentille qui rassemble les rayons du soleil ou d'une lumiere, on pourra appercevoir fort distinctement l'instant de rencontre du premier & du dernier point de la circonférence de ce petit cercle, avec la ligne tracée sur le verre, ou même avec un fil délié, tendu sur la lame mobile, & attaché de part & d'autre aux lames fixes: quoiqu'il soit plus à propos de se servir de verres que de fils, lesquels courroient risque d'être emportés par la lame mobile, & qu'il faudroit placer pour cela à quelque distance de cette lame, avec danger peut-être d'y occasionner quelque parallaxe; au lieu qu'on peut sans crainte appliquer immédiatement le verre sur la lame mobile.

De déterminer le point de rencontre.

60. Observez enfin que dans la détermination du point de rencontre, la lame doit toujours être mue du même côté; Car pour peu que la vis ait de jeu dans l'écrou, les mouvemens opposés de la lame donneront des nombres différens de parties du micrometre. Nous commencions toujours par retirer la lame mobile; ensuite nous la poussions du côté de E', & c'est dans ce second mouvement que nous déterminions le point de rencontre.

Vérification de la division.

61. La vis ainsi vérifiée, vérifie à son tour, & par une méthode également sûre & facile, la division de la lame mobile en cette sorte. Ayant amené le micrometre au premier point de la division, on attache contre le limbe un verre marqué d'une petite ligne, laquelle doit répondre au point qui termine le premier intervalle de deux lignes, qu'il faut comparer aux autres intervalles. Ensuite on tourne la vis jusqu'à ce que la ligne du verre réponde au commencement de la division, & l'on compte en même tems le nombre de tours de la vis & de parties du micrometre, contenu dans cet intervalle. Ensuite on ramene la lame & le micrometre à leur premier

point; on avance le verre jufqu'à ce que fa ligne rencontre le point qui termine le fecond intervalle, & on pouffe la lame mobile, comme auparavant, jufqu'à ce que la ligne du verre fe rencontre avec le commencement de cet intervalle, en comptant toujours le nombre de tours & de parties du micrometre. On vérifiera de même tous les autres intervalles; on les comparera entre eux pour en avoir les différences, s'il s'en trouve quelqu'une; on en prendra la fomme pour avoir en parties de micrometre la valeur du pied $i\,i'$, ou de la longueur du limbe.

Suite.

62. On pourra encore comparer ces intervalles trois à trois, ou quatre à quatre, au moyen de cette vis qui peut avancer la lame d'environ 8 lignes, ou 4 intervalles. Si elle étoit plus longue, & qu'elle pût avancer la lame d'un demi-pied, on pourroit comparer auffi les deux intervalles de fix pouces, les quatre intervalles de trois pouces, enfuite les intervalles d'un pouce, d'un demi-pouce, & enfin de deux lignes. On corrigeroit en même tems les petites erreurs qui réfulteroient de ces comparaifons multipliées, & l'on auroit en parties de micrometre la valeur exacte des intervalles de la lame mobile, comme nous le verrons bientôt.

Ufage des lignes gravées fur le verre; F. 5.

63. Mais une vis de cette longueur ne laifferoit plus de place aux curfeurs M, M' (fig. 5.) qui affujettiffent la lame mobile contre la lame intérieure; & d'ailleurs une longue vis eft plus fujette à fe courber. C'eft pourquoi on en a préféré une plus courte, qui n'agit pas au-delà de 8 lignes; & on a imaginé un autre moyen de comparer de plus grandes parties du limbe. Ce moyen confifte à tracer, fur un plus long verre, une ligne coupée à angles droits par plufieurs paralleles, dont la feconde foit éloignée de la premiere d'environ fix lignes, la troifieme d'un pouce, la quatrieme de trois pouces, la cinquieme de fix pouces. On applique enfuite le verre fur les lames, de telle forte que la premiere parallele réponde au commencement de la divifion, d'où il arrivera que la feconde parallele répondra au point de milieu du premier pouce. Il faut obferver avec foin le point de rencontre du commencement de la divifion avec la premiere parallele, & du milieu du premier pouce avec la feconde. Si l'un & l'autre donne le même nombre

de parties du micrometre, c'eſt une marque que ce premier demi-pouce eſt égal à la diſtance de ces paralleles ; ſi le nombre eſt différent, on tiendra compte de cette différence, qui ſera toujours fort petite. Cela fait, on avancera le verre juſqu'à ce que l'intervalle de ces deux premieres paralleles réponde à la ſeconde moitié du premier pouce, & ayant remis la lame dans ſa premiere poſition, on la pouſſera de nouveau pour connoître la différence de cette moitié de pouce avec cet intervalle. On opérera de même ſur le reſte de la diviſion ; on comparera ces demi-pouces entre eux, & l'on verra ſi leur différence s'accorde avec celle qu'on a trouvée en comparant à la fois trois intervalles de deux lignes. De même l'intervalle de la premiere & troiſieme parallele vérifiera les pouces, celui de la premiere & de la quatrieme les intervalles de trois pouces, celui de la premiere & de la cinquieme, ceux de ſix pouces.

Qu'on n'y a pas beſoin de connoître l'état de la vis.

64. Il y a un autre auantage conſidérable à ſe ſervir de cette méthode, c'eſt qu'on y eſt diſpenſé de vérifier la vis. Il eſt vrai que pour vérifier les intervalles de deux lignes par la méthode que nous avons donnée, où l'on ſe contente d'une ſeule ligne tracée ſur le verre, il faut employer cinq tours de vis ; mais on emploie toujours les mêmes tours, & la différence dépend de l'excès d'un intervalle ſur l'autre, lequel eſt toujours très petit ; & l'erreur qui en réſulte, & qui après un certain nombre de révolutions pourroit peut être ſe faire ſentir, eſt abſolument inſenſible dès qu'il n'eſt queſtion, comme ici, que d'un petit nombre de parties du micrometre. Enſuite dans les vérifications que l'on fait par le moyen des autres paralleles, on n'a beſoin d'employer qu'un très petit nombre de parties du micrometre, leſquelles ſuffiſent pour faire connoître la différence qui ſe trouve entre les intervalles des paralleles, & ceux qui leur répondent dans la diviſion. Ainſi quelque inégalité qu'il y ait dans les pas de la vis, on peut l'ignorer ſans que la vérification en ſouffre. Remarquez qu'on peut abréger, en ſe ſervant de cette derniere méthode, dans la vérification des intervalles de deux lignes ; car il ne ſera plus beſoin pour lors de tourner & retourner cinq fois la vis, comme auparavant, puiſqu'on pourra ſe contenter d'un petit nombre de parties du micrometre.

65.

65. Cette ligne qui coupe à angles droits les paralleles, est ici d'un grand usage, pourvu qu'elle réponde toujours à la ligne du milieu de la lame mobile, parcequ'elle détermine la distance des paralleles, à laquelle on compare tous les intervalles de même genre, & qui pour cette raison doit être toujours la même; ce qui ne seroit pas, si ces lignes n'étant pas exactement paralleles, on prenoit leur distance tantôt en un endroit, tantôt en un autre, ou si dans la supposition même d'un parallélisme exact, on prenoit quelquefois une distance plus ou moins oblique.

Avantage de la ligne du verre qui coupe les paralleles.

66. On pourroit encore se servir ici avec avantage d'un compas dont j'ai parlé plus haut, & qui seroit armé de deux verres, l'un fixe, l'autre mobile, sur chacun desquels on auroit tracé une ligne fort près du bord intérieur, afin qu'on pût les approcher davantage l'un de l'autre; car il est difficile de tracer sur le verre, à une distance donnée, des lignes déliées, unies & paralleles: j'ai gâté plusieurs verres avant que de m'y faire, encore ai-je bien de la peine aujourd'hui à m'en tirer; tantôt c'est la pointe du caillou qui se brise; tantôt c'est la regle qui glisse sur le verre, ou qui se détourne pour peu qu'on remue la main; ce qui donne des lignes larges, raboteuses, courbes, tortues & défigurées.

Description d'un compas à deux verres;

67. Ce compas doit avoir deux lames de métal, comme dans la figure 4 GG'I'I, OO'C'C, à une certaine distance l'une de l'autre, & unies ensemble par leurs extrémités GC, G'C'. Entre ces lames est une lame mobile plus large, percée à jour dans toute sa longueur, excepté aux deux bouts, & dans une assez grande largeur. Il doit y avoir plusieurs trous contenant des écrous, & fort proches les uns des autres. A l'extrémité, comme en O'I', on attachera solidement aux lames fixes un verre, sur la surface extérieure duquel on aura tracé deux lignes, la premiere, proche le bord intérieur qui regarde GC, la seconde, perpendiculaire à la premiere, & passant par le milieu du verre dans la direction des lames. On aura un autre verre, renfermé de trois côtés seulement, savoir *o*, *i*, & OI, dans un petit cadre de métal, dont la longueur n'excede pas la largeur de la lame mobile. Sur le quatrieme côté du verre, & sur le bord qui regarde O'I', on

Sa ressemblance au limbe du secteur.

tracera une ligne perpendiculaire à GG'. Les deux côtés du cadre qui ſont en *i* & *o*, doivent être percés de petits trous, pour recevoir des vis qui fixeront le verre ſur la lame mobile, à peu près à la diſtance de *o' i'* qu'on jugera néceſſaire pour la vérification de l'intervalle propoſé : c'eſt ce qu'on peut faire aiſément par le moyen de ce grand nombre de trous préparés dans les lames fixes; enſuite avançant avec la vis E la lame mobile, on aura plus exactement la distance des paralleles tracées ſur la ſuperficie extérieure, & proche le bord intérieur des verres.

Du verre mobile.

68. On pourroit ſe paſſer de ce grand nombre de trous des lames fixes, en repliant les bords *i* & *o* du cadre qui porte le ſecond verre, & les faiſant entrer dans des couliſſes pratiquées dans la longueur de l'ouverture de la lame mobile, de telle ſorte néanmoins que le cadre ne pût avoir par lui-même aucun mouvement, & qu'il fallût quelque effort pour le rapprocher du premier verre. On pourroit auſſi l'attacher avec des vis où l'on jugeroit à propos. Ceci n'a pas beſoin d'explication, & il ſeroit inutile de nous y arrêter.

Du micrometre. Pl. 2. F. 7. 5.

69. Rien n'empêche d'ajouter à ce compas un micrometre, ou un cercle en E, ſemblable à celui de la figure 7, avec un index; mais il faut prendre la précaution de placer le curſeur P (fig. 5.), & la vis EF à une plus grande diſtance de la ſurface antérieure, de peur que la circonférence du cercle GC ne s'éleve au-deſſus de cette ſurface, au-delà de celle des verres, & n'empêche qu'on n'applique ces verres à toute ſorte de plans. De plus, comme l'ouverture s'étend dans preſque toute la longueur de la lame mobile, & que le paſſage doit être libre, on ne doit point placer au milieu un curſeur unique M, ou M'; mais on en doit mettre deux, l'un au-deſſus, l'autre au-deſſous de ce point de milieu, pour aſſujettir les deux long côtés de la lame mobile contre les lames fixes.

Uſage du micrometre.

70. On peut rapprocher les verres de ce compas à la diſtance d'un demi-pouce, pour comparer entre eux les demi-pouces de la diviſion; puis à la diſtance d'un pouce, pour comparer les pouces; & ainſi de ſuite pour les autres intervalles. Le micrometre même de ce compas ne nous étoit point néceſſaire pour notre uſage propre, puiſque nous avions déja

un micrometre sur le limbe de notre secteur; mais il peut beaucoup servir à plusieurs autres usages.

71. Il y a un compas d'une nouvelle invention, consistant en une longue verge, ayant à l'un de ses bouts un microscope fixe, à l'autre un microscope mobile, qu'on peut rapprocher du fixe plus ou moins à volonté; & chaque microscope a son micrometre. Le P. *Pesenas* Jésuite, Professeur royal d'Hydrographie à *Marseille*, & qui s'entend aussi en Astronomie, comme je le vois par ses lettres, se sert de ce compas pour vérifier les divisions du quart de cercle: mais pour peu que la distance du limbe au micrometre vienne à varier, on change notablement la valeur des parties du micrometre: ce qui n'est pas un petit inconvénient; au lieu que mon compas, qui n'est au reste qu'une suite naturelle de la construction de mon limbe, lequel étoit achevé long-tems avant que j'eusse oui parler de ce nouveau compas, renferme tous les avantages du microscope pour l'augmentation des distances, & peut mesurer de très grands intervalles, sans aucun danger de parallaxe sensible, puisque la ligne tracée sur le verre touche immédiatement le limbe, où est la division qu'il s'agit de vérifier. A l'égard du quart de cercle, on verra dans le chapitre second comment, au moyen de deux verres attachés à son alidade, & par une méthode toute fondée sur les mêmes principes, on peut procéder à l'examen de sa division.

Avantage de ces verres sur les microscopes.

72. Pour revenir à notre limbe, dès qu'une fois on aura une connoissance parfaite de la vis, des révolutions & des parties de révolutions du micrometre, il sera plus court de n'employer qu'une seule ligne sur le verre pour comparer entre eux les intervalles de deux lignes, dont il en faut trois pour le demi-pouce, en faisant faire pour le demi-pouce quinze tours à la vis, qui feront passer sous la ligne du verre quatre points de la division, dont on remarquera les points de rencontre. C'est la méthode dont nous nous sommes servis, après nous être convaincus que notre vis étoit fort égale, & que ses révolutions n'avoient entre elles aucune différence sensible.

Vérification des intervalles de deux lignes.

73. Après avoir vérifié la ligne du milieu de la lame mobile, il faut voir à combien de parties du micrometre répond le rayon du secteur, ou la distance du centre à la ligne du

Longueur du rayon déterminée par le nouveau compas.

milieu de cette lame mobile. On le connoîtra en comparant (fig. 1.) la distance du point *d* à cette ligne, avec l'intervalle d'un pied, marqué sur cette même ligne du milieu; ensuite les distances *dd'*, *d'D* avec ce même intervalle; enfin les intervalles DD', & D'C avec la distance du point D à la ligne du milieu de la lame mobile. Cette comparaison pourroit se faire aisément par le moyen du compas à deux verres, dont j'ai donné la description au n°. 67 & suivans. On appliquera la ligne du verre immobile à l'une des extrémités de l'intervalle qu'on veut comparer, & si le compas a un petit cercle & un index qui fassent les fonctions d'un micrometre, on amenera avec la vis à l'autre extrémité la ligne du verre mobile. On verra ensuite, à l'aide du microscope, à quel nombre de parties du micrometre répond le point de rencontre.

Moyen de suppléer au micrometre du compas,

74. Si le compas n'a point de micrometre, on pourra y suppléer par la lame mobile EE'. Car dès que l'intervalle à comparer ne surpasse pas la longueur de la lame, comme *dd'* qui n'est que d'un pied, il suffira, après avoir tellement disposé les verres du compas, que leurs lignes répondent exactement aux points *d*, & *d'*, de les appliquer contre la lame mobile, de sorte que leurs lignes répondent à peu près aux extrémités du pied gravé sur cette lame, & de pousser la lame mobile avec la vis E en deux fois, la premiere, jusqu'à ce que l'une des extrémités du pied réponde exactement à l'une des lignes, la seconde, jusqu'à ce que l'autre extrémité réponde à l'autre ligne. Car examinant à chaque fois la position de l'index, on aura en parties de micrometre le rapport exact de cet intervalle d'un pied à l'intervalle *dd'*.

De comparer de grands intervalles.

75. Pour comparer de plus grands intervalles, par exemple ceux de trois pieds, on s'y prendra de la maniere qui suit. A l'extremité de la lame mobile, & à peu près dans le même plan, on placera une feuille de carton, ou une planche, ou une autre lame de métal, sur laquelle, dans la direction de EE', & à la distance de plus de deux pieds, on marquera avec une pointe d'aiguille bien ronde, un petit point. Ensuite ayant pris avec le compas à verres l'un des intervalles qu'on veut comparer, on appliquera sur ce point la ligne de l'un des verres, & l'autre verre sur le limbe, & on avancera la lame

mobile jusqu'à ce qu'une de ses divisions réponde à la ligne de ce second verre, en marquant le nombre désigné par l'index au point de rencontre. On fera la même opération pour l'intervalle suivant, & le rapport des nombres donnera celui des intervalles.

76. Nous avons comparé les intervalles DD', & D'C d'une maniere un peu différente, mais pourtant fort exacte, en les divisant chacun en trois intervalles d'un pied, par quatre autres petites lames sur lesquelles il y avoit de petits points qui marquoient la division: ce qui donnoit neuf intervalles d'environ un pied chacun, depuis la ligne du milieu jusqu'au centre du secteur. Nous n'avions point de compas à verres pour connoître les petites différences qui pouvoient se trouver entre ces intervalles & l'intervalle du pied gravé sur la lame mobile; nous y suppléâmes de deux façons: en premier lieu je fis faire une sorte de cadre oblong, qui consistoit en deux lames de cuivre posées à une distance suffisante l'une de l'autre, & attachées à leurs extrémités par deux autres lames plus courtes: j'y faisois tenir avec de la cire deux verres marqués d'une ligne; & au défaut d'une vis, dont l'usage eût été plus commode & plus sûr, j'avançois de force l'un des verres jusqu'à ce que la distance de leurs lignes répondît exactement à l'intervalle que nous voulions comparer. Ensuite on transportoit l'instrument sur le limbe du secteur, & on comparoit, comme ci-dessus, cette distance à l'intervalle d'un pied gravé sur la lame mobile.

Premier moyen de remplacer ce compas.

77. Le second moyen que nous employâmes fut de prendre avec un compas à verge, dont les pointes étoient très déliées, un intervalle, par exemple *dd'*, & de le porter sur la lame mobile, ensorte que l'une des pointes répondant exactement au commencement de la division, nous tracions avec l'autre une petite ligne vers l'extrémité de la division. Il étoit aisé ensuite de connoître de combien de parties de micrometre cette ligne étoit éloignée de cette extrémité; il suffisoit pour cela d'appliquer en travers contre les lames fixes un verre marqué d'une petite ligne, & de pousser la lame mobile jusqu'à ce que cette petite ligne rencontrât successivement l'extrémité du pied, & la ligne tracée avec la pointe du compas, proche cette extrémité.

Second moyen.

Grand avantage de la lame mobile & de son micrometre.

78. On voit par-là qu'outre plusieurs avantages de la lame mobile, elle est d'un merveilleux usage pour comparer des intervalles, & connoître leurs plus petites différences en parties presque insensibles d'une grandeur connue: car on connoîtra très exactement cette différence sur la lame, soit en y transportant ces intervalles d'un point pris sur le limbe, ou hors du limbe, suivant que l'intervalle sera plus petit ou plus grand que le limbe, & avançant ensuite la lame mobile, ensorte que l'extrémité de l'un & de l'autre intervalle passe sous une même ligne tracée sur un verre fixe; soit qu'ayant pris la différence des intervalles représentée par la distance de deux lignes tracées sur un même verre, ou successivement par deux ouvertures du compas à verres, on avance la lame mobile jusqu'à ce qu'elle ait passé, ou sous les deux lignes du verre unique, ou sous la même ligne du compas à verre pris successivement avec ses deux ouvertures.

Ce même moyen, utile dans une autre méthode : avantage des verres sur les fils.

79. La même chose arrive dans une autre méthode, dont nous parlerons bientôt, & qui consiste à vérifier les divisions du secteur, qui ont servi dans l'observation, en comparant leur intervalle à une partie aliquote du rayon; c'est-à-dire qu'on en peut très aisément venir à bout au moyen du compas armé de verres dont j'ai donné la description, & auquel on peut suppléer, ou par deux verres collés avec de la cire sur un cadre oblong, ou par un compas à verge garni de deux pointes très aiguës, de telle sorte qu'on puisse rapprocher l'une de l'autre à volonté, & l'arrêter à la distance requise. C'est ce que nous avons fait, en suppléant de ces deux manieres au compas garni de verres. On pourroit, dans toutes ces méthodes, & surtout dans celle où l'on fait passer la lame mobile sous un verre marqué d'une ligne, se servir d'un cheveu, ou d'un fil de soie, ou d'argent, posé transversalement sur la lame mobile, & attaché de part & d'autre avec de la cire sur les lames fixes: je m'en suis servi dans les commencemens, & d'ordinaire avec succès; mais j'y ai remarqué un inconvénient, savoir que si ce fil est fort près de la lame mobile, il peut très aisément être poussé de côté par un grain de poussiere qui se trouvera sur cette lame; & que s'il en est éloigné, il est extrêmement difficile, soit que l'œil de l'ob-

servateur reste immobile, soit qu'il soit ramené à la même position, d'éviter l'effet de la parallaxe; au lieu que le verre, pourvu qu'il soit bien attaché aux lames fixes, est immobile, avec sa petite ligne, tandis que la lame qui le touche glisse par-dessous, sans aucun danger de parallaxe.

80. Il est encore à remarquer que dans ces opérations, & les suivantes, nous regardions toujours ces lignes & les points de la division avec une lentille d'un foyer très court, & qui augmentoit considérablement les objets. Elle étoit attachée par des fils & des lames élastiques, ensorte qu'on pouvoit l'appliquer sur le limbe, & l'y arrêter à la distance qu'on jugeoit la plus convenable à l'observation. Je m'y suis aussi quelquefois servi du microscope. Usage de la loupe & du microscope.

81. Or dans l'examen de cette division, nous avons trouvé que les six pouces qui sont à gauche, ou du côté du micrometre, contiennent 32716 parties de micrometre, dont une seule révolution en contient 180, & que ceux de la droite en contiennent 32734, ce qui fait en tout 65450; de plus, que le rayon ayant 9 pieds, & le limbe n'en ayant qu'un, chaque pied du rayon surpassoit celui du limbe, & que la différence moyenne étoit de 35 parties, ce qui donnoit 65485 parties pour un pied du rayon, & 589365 pour le rayon entier. Longueur du rayon.

82. Il s'ensuit que pour chaque minute il faut 171.446 parties à peu près. Car la tangente d'une minute est 2909, pour le rayon 10000000; & 10000000 est à 2909, comme 589365 à 171.446, ce qui ne change presque point dans toute l'amplitude de notre secteur. En effet, le demi-pied gravé de part & d'autre du point de milieu, n'est presque, pour un rayon de 9 pieds, que la tangente d'un angle de trois dégrés. Or une minute de plus n'augmente la tangente d'un dégré que de 2909, celle de deux dégrés que de 2913, & celle de trois dégrés que de 2917. Il faudroit donc une erreur de près de trois parties de micrometre dans la tangente, lorsqu'on observe l'étoile, ou qu'on vérifie les divisions du secteur, pour produire une erreur d'une seconde. L'erreur d'une seconde répond à trois parties de micrometre.

82. Mais il faudroit une erreur bien plus grande dans le rayon pris dans toute sa longueur. Car on démontre aisément

Et à une bien plus grande différence dans le rayon.

que pour commettre dans un angle une petite erreur donnée, l'erreur du rayon doit être au rayon, comme l'erreur de la tangente à la tangente. On a donc cette analogie : comme 524078 tangente de trois dégrés, est à 2917 erreur d'une minute ; (ces nombres sont pris des tables, pour un rayon 10000000) ; ainsi notre rayon 589365 est à un quatrieme terme qu'on trouvera de 3284 parties pour une minute, & par conséquent il en faut près de 55 pour une seconde. Mais si cet angle diminue, l'erreur de la tangente est sensiblement la même, & la tangente diminue presqu'en raison de l'angle ; ainsi l'erreur requise dans le rayon augmente presque dans la raison inverse de l'angle : de sorte que pour produire dans un angle d'un dégré l'erreur d'une seconde, il faudroit dans la détermination du rayon commettre une erreur de près de 165 parties, ce qui n'est point à craindre.

Moyen de diminuer l'erreur.

84. Si dans la vérification des intervalles de deux lignes de notre division, dont il y en a 36 à droite, & autant à gauche, on commettoit dans chaque intervalle une erreur d'une partie de micromettre, l'erreur totale pourroit être de 36 parties ; ce qui entraîneroit une erreur de 12 secondes : cela arriveroit, dis-je, si toutes les erreurs se trouvoient du même côté ; mais c'est un cas qui n'est peut-être jamais arrivé, les erreurs se trouvant ordinairement tantôt d'un sens, tantôt de l'autre, & se corrigeant par-là en grande partie les unes les autres, si elles ne s'effacent totalement. Mais indépendamment de cette correction, qui ne manque jamais, on diminue considérablement cette erreur, en comparant entre eux, suivant la méthode exposée ci-dessus, les intervalles de six pouces, ceux de trois pouces, d'un pouce, d'un demi-pouce, & enfin de deux lignes. Car il n'est pas difficile de démontrer, qu'en vérifiant & corrigeant l'instrument par cette comparaison, l'erreur ne peut être au plus que quintuple de celle qu'on suppose avoir commis dans chaque intervalle, quand même les erreurs se trouveroient toutes du même côté, & cette erreur même, la plus grande qui soit possible, diminue en raison de l'angle ; de sorte que si l'on suppose avoir commis, dans chacun des intervalles que l'on compare, une erreur d'une partie de micrometre, celle d'un angle d'un dégré

ne

ne pourroit être que de la moitié d'une seconde, les erreurs se trouvassent elles toutes du même côté; ce qui prouve bien la bonté de cette méthode.

85. En effet, si l'on prend dans le pied un nombre quelconque de parties de micrometre à volonté, par exemple celui que donnent tous les intervalles; qu'on le répartisse sur les deux intervalles de six pouces, suivant le rapport qu'on leur aura trouvé entre eux; & que l'on en fasse de même pour les autres subdivisions, on pourra commettre dans chacune une erreur égale à celle qui se trouve dans l'autre intervalle de six pouces, soit que la subdivision se fasse en deux ou en trois parties, pourvu que dans ce second cas on ne prenne pas immédiatement la valeur de deux parties; mais que pour avoir la valeur de ces deux parties on ait retranché de l'intervalle entier de trois parties, qu'il falloit diviser, la valeur d'une partie sur laquelle on suppose une seule erreur. En général on peut démontrer que si la division se fait en quatre ou en cinq parties que l'on compare entre elles, l'erreur de la totalité sera au plus double de celle de chaque partie; que si on la fait en six ou en sept, elle sera au plus triple, & ainsi de suite. Démonstration de cette méthode.

86. De cette sorte, pourvu que la division soit nette, surtout si elle est faite par de petits points bien ronds, je suis persuadé qu'en répétant plusieurs fois l'opération, & en s'y servant du microscope, on pourra absolument éviter toute erreur, jusqu'à pouvoir en toute occasion s'assurer que la plus grande erreur possible ne va pas au-delà d'une seconde. Il y a cependant encore une autre méthode beaucoup plus sûre, & qui revient presqu'à celle dont MM. *Bouguer* & *de la Condamine* se sont servis, & par laquelle on vérifie exactement les divisions du secteur, du moins celles qui ont servi dans l'observation. Le P. Maire en a dit quelque chose dans le second livre; nous en allons traiter ici plus au long. Méthode de MM. de la Condamine & Bouguer.

87. Après avoir choisi l'étoile qu'ils vouloient observer, & avoir examiné quelle étoit à peu près sa distance au zénith, MM. *Bouguer* & *de la Condamine* prenoient la partie aliquote du rayon qui égaloit la corde de l'arc le plus approchant du double de celui qui mesuroit cette distance, & la Suite.

portoient autant de fois ſur le rayon, avec le compas à verge, depuis le centre juſqu'au limbe. Le rayon ainſi déterminé, ils décrivoient du centre avec un plus grand compas, & à l'ouverture du rayon même, un arc de cercle ſur le limbe, ſur lequel ils coupoient l'arc qui répondoit à cette partie aliquote, en faiſant enſorte que l'axe de la lunette répondît à peu près au milieu de cet arc, dont chaque extrémité étoit marquée d'un point. Avant l'obſervation ils faiſoient paſſer le fil à plomb par l'un des points, le limbe tourné du côté de l'orient, & par l'autre point, le limbe tourné à l'occident, & à l'aide du micrometre ils recherchoient la différence de cette double diſtance au zénith à l'amplitude de cet arc.

Pourquoi on ne s'en eſt pas ſervi.

Méthode ſemblable.

88. Nous euſſions pu faire la même choſe ſur notre ſecteur, en y décrivant au lieu d'arc une tangente, ſur laquelle nous euſſions pris une partie aliquote du rayon. Mais le limbe ainſi préparé, ne peut ſervir qu'à obſerver une ſeule étoile, & dans un ſeul endroit : ſi l'on en veut obſerver d'autres, il faut effacer les cercles, ou les tangentes, avec leurs points, & en marquer de nouveaux pour chaque obſervation. Nous avons mieux aimé avoir un ſecteur propre à obſerver toutes les étoiles voiſines du zénith, pour pouvoir choiſir, ſuivant la ſaiſon, celles qui nous paroîtroient moins expoſées à être obſcurcies par les rayons du ſoleil ; & afin qu'après nous avoir ſervi dans notre meſure, cet inſtrument, une fois vérifié, pût ſervir dans la ſuite en tout tems & en tout lieu. Nous étions d'autant plus autoriſés à prendre ce parti, que nous avions une méthode toute ſemblable pour vérifier très ſûrement, & avec bien plus de facilité, les diviſions ; c'eſt auſſi celle dont nous nous ſommes ſervis. Si nous avions eu le compas, dont j'ai donné plus haut la deſcription, garni de deux verres, l'un fixe, l'autre mobile, avec ſon micrometre, nous nous en fuſſions ſervis avec encore plus d'avantage ; mais nous avons ſuppléé à ſon défaut, comme je l'ai déja dit.

Exemple de cette méthode.

89. Qu'il faille par exemple déterminer l'angle auquel répond ſur notre ſecteur l'intervalle pris ſur la lame mobile, compoſé de dix-ſept diviſions à droite, & de treize à gauche, chacune de ces diviſions étant de deux lignes ; c'eſt aux deux points qui terminent cet intervalle entier, que nous avons

rapporté la position de μ de la grande ourse à *Rimini*, le limbe tourné tantôt à l'orient, tantôt à l'occident; & nous avons mesuré avec notre micrometre la distance du fil à plomb à chacun de ces points de division, en avançant la lame mobile jusqu'à ce que le fil répondît exactement au point, comme nous l'expliquerons plus au long dans la suite. L'espace entier est composé de 30 intervalles de deux lignes, le pied en comprend 72, & par conséquent le rayon, qui est de 9 pieds, en contient 648. Or 648, divisé par 30, donne à peu près 21. Il falloit donc comparer cet intervalle à la vingt-unieme partie du rayon.

90. Comme en divisant 648 par 21, il vient 30 $\frac{6}{7}$, nous avons pris à peu près cet intervalle sur la lame mobile, & mené à la même distance sur un long verre poli deux paralleles coupées en certains endroits par de petites lignes. Nous avons ensuite placé horizontalement le secteur sur deux supports, qu'il débordoit d'un quart de part & d'autre; le tuyau de fer blanc étoit d'ailleurs trop massif & trop bien soudé avec la regle de fer, pour qu'il y eût aucun danger de fléxion; puis appliquant contre le limbe le côté du verre sur lequel étoient marquées les paralleles, de sorte que l'une répondant à peu près à la fin du dix septieme intervalle de deux lignes sur la gauche, l'autre ne devoit pas être fort éloignée du treizieme à droite, nous déterminions en parties de micrometre par le mouvement de la vis, suivant la méthode exposée ci-dessus, la différence de la distance de ces paralleles à l'intervalle de ces 30 parties de la lame mobile. Suite.

91. Nous avions préparé aussi une sorte de petites regles de bois de l'épaisseur des lames de laiton, afin qu'en les appliquant sur le rayon de fer, leur face antérieure se trouvât dans le plan du limbe. Elles étoient recouvertes d'une feuille de papier collée sur le bois. Nous attachions avec de la cire molle contre le rayon de fer la premiere regle D, à peu près à la distance du centre S du secteur, que requéroit l'intervalle que nous avions pris pour la vingt-unieme partie du rayon; nous appliquions ensuite le verre, de sorte que l'une de ses paralleles passât exactement par le centre du secteur: ce que nous connoissions en l'examinant avec une lentille d'un foyer assez Suite. Pl. II. F. 3.

court; & nous faisions glisser sous le verre la petite regle de bois, en l'avançant contre le centre S, jusqu'à ce que le petit point, marqué sur le papier, répondît en même tems & à la seconde ligne marquée sur le verre, & au milieu de la grande regle de fer : la cire avoit tout à la fois l'avantage d'être assez molle pour laisser avancer le bois quand on vouloit le pousser, & d'avoir assez de tenacité pour lui conserver ensuite invariablement sa position. On arrangeoit de la même façon les autres petites regles de bois, jusqu'à ce qu'il ne restât plus qu'un seul intervalle à mesurer, depuis le poind D jusqu'au milieu de la ligne EE'.

Suite. 92. Le verre ne pouvoit plus servir à comparer cet intervalle avec les précédens; nous y avons employé notre compas à verge, avec lequel nous avons porté cette derniere partie du rayon, & l'un des intervalles égaux DD sur la lame mobile, en commençant par le même point, qui étoit comme le centre d'où nous décrivions sur le limbe deux petites lignes. Il étoit aisé ensuite de déterminer en parties de micrometre la distance de ces deux petites lignes, en poussant la lame, & en les faisant passer successivement sous le même trait d'un verre immobile, & appliqué contre le limbe. Cette distance devoit se répartir sur les 21 parties du rayon, & l'on connoissoit enfin en parties de micrometre la différence d'une de ces parties aliquotes avec notre intervalle de ces 30 parties de la lame mobile, auxquelles nous avions rapporté la position de la fixe en l'observant à *Rimini :* en conséquence on voyoit aussi de combien ce nombre différoit des 30 parties dont le rayon en contient 648, & quelle correction il convenoit de faire à la division de la lame; ou plus briévement, on voyoit à quelangle du centre répondoit cet intervalle, puisqu'on sait à quel angle répond une tangente qui est au rayon comme 1 à 42, & qu'en doublant cet angle on a une double tangente, ou plutôt deux tangentes, qui valent ensemble la vingt-unieme partie du rayon; & de-là il étoit aisé de connoître la différence de cette partie avec l'intervalle de ces 30 parties de la lame mobile, par le nombre connu de parties de micrometre, dont cet intervalle differe de cette partie aliquote.

93. On voit encore qu'il n'étoit pas besoin de prendre si

ſcrupuleuſement l'intervalle précis d'une partie aliquote, puiſque la différence du dernier intervalle doit ſe répartir ſur 21 parties; d'où il ſuit que chaque partie aliquote n'a que la vingt-unieme partie de l'erreur, qui par-là devient inſenſible, puiſqu'il faut trois parties de micrometre pour produire l'erreur d'une ſeconde, & qu'avec un peu d'application on peut éviter l'erreur de deux parties, qui ne produiroit qu'une erreur de deux tierces. Le ſeul inconvénient qu'il y eût, c'eſt que comme il falloit placer les petites regles de bois les unes après les autres, & les mettre chacune à ſon point, cela demandoit du tems, du travail & de la patience.

Précision de cette méthode.

94. Le moyen dont nous nous ſervîmes pour y remédier, fut de prendre avec le compas à verge la vingt-unieme partie, ou à peu près, du rayon; de placer les petites regles de bois environ à cette même diſtance les unes des autres, & de tendre par-deſſus un fil bien délié depuis le centre S juſqu'au milieu de la lame mobile EE'. Enſuite ayant appliqué une pointe du compas en S, nous marquions avec l'autre un petit point ſur la premiere regle de bois ſous le fil même en D. De ce dernier point, & à la même ouverture du compas, nous marquions un autre point ſur la ſeconde regle, & ainſi de ſuite juſqu'à la derniere. Cela fait, nous comparions d'abord une des parties égales du rayon avec l'intervalle de ces 30 parties de la lame mobile; puis la partie reſtante du rayon avec l'une de ces parties égales, & cela de deux manieres.

Autre méthode plus commode par le compas à verge.

95. Premierement nous poſions une pointe du compas à une extrémité de cet intervalle; nous tracions avec l'autre une petite ligne ſur la lame mobile, & nous meſurions à l'ordinaire la diſtance de cette ligne à l'autre extrémité du même intervalle par le mouvement de la lame mobile: quant à la partie reſtante du rayon, nous la prenions auſſi avec le compas; nous la portions ſur la lame mobile, en commençant au même point, & nous trouvions, comme ci-deſſus, la diſtance des deux petites lignes marquées ſur le limbe. Secondement au lieu d'un verre, nous en collions deux avec de la cire ſur une longue lame de laiton percée à jour dans ſa longueur, dont nous avons déja parlé, & qui peut ſuppléer en quelque façon au compas à verres, garni d'un verre mobile & d'un

Suite.

micrometre : nous appliquions cet inſtrument ſur deux petites regles de bois voiſines l'une de l'autre ; & nous rapprochions les verres juſqu'à ce que la diſtance de leurs lignes répondît exactement à une des parties égales. Enſuite ayant porté l'inſtrument ſur le limbe, nous comparions cette diſtance avec l'intervalle des 30 parties de la lame mobile, & nous en prenions la différence en parties de micrometre. Nous prenions encore avec le même inſtrument la derniere partie du rayon, & nous la comparions au même intervalle ; ce qui nous donnoit le rapport & la différence de ces diſtances, ſans qu'il fût beſoin de marquer ſur le limbe des lignes qu'il eût fallu enſuite effacer.

Comparaiſon de cette méthode avec une partie aliquote gravée ſur le limbe.

96. Il n'eſt point néceſſaire d'avertir ici que toutes ces comparaiſons euſſent pu ſe faire plus aiſément avec le compas à verres, dont j'ai donné plus haut la deſcription, & qui a un verre mobile, avec un micrometre. Il ſeroit également inutile de dire que, dans toutes ces opérations, nous nous ſommes ſervis d'une très bonne lentille pour groſſir les objets. Mais il ne faut pas oublier que nous faiſons ici deux comparaiſons, celle de la poſition de l'étoile avec l'intervalle des 30 parties de la lame mobile, & celle de cet intervalle avec une partie aliquote du rayon, tandis qu'après avoir tranſporté cette partie aliquote ſur la lame mobile, nous comparons immédiatement la poſition de l'étoile avec cette même partie aliquote. Mais cela ne peut produire qu'une erreur d'une, ou tout au plus de deux parties de micrometre, qu'on peut même éviter en ſe ſervant du microſcope, & qui d'ailleurs ne va pas à une ſeconde. De plus, cette erreur eſt compenſée, & par le grand nombre de méthodes dont on peut ſe ſervir pour procéder à cet examen, qu'on peut recommencer autant de fois qu'on jugera à propos, & parcequ'en comparant de la même façon un nombre quelconque de parties priſes depuis le milieu de la lame mobile, avec une partie aliquote, ou le double de ce nombre pris de part & d'autre du point de milieu, on a la facilité de ſe procurer, une fois pour toutes, une vérification très exacte de toutes les diviſions, laquelle pourra ſervir pour tous les tems, pour tous les lieux, & pour toutes les étoiles voiſines du zénith, ſans courir riſque de commettre une erreur qui excede le tiers d'une ſeconde.

97. Dans les obſervations ſuivantes, nous nous ſommes ſervis de la même méthode pour vérifier les diviſions. Seulement lorſque la partie aliquote différoit notablement de l'intervalle auquel elle devoit être comparée, nous prenions la moitié de cet intervalle, & la vérification ſe faiſoit avec un ſuccès égal. J'apporterai pour exemple l'intervalle qui nous a ſervi pour l'étoile α du cygne. Nous avons obſervé ſa poſition à *Rome*, & nous l'avons rapportée à 30 parties ſur la gauche, & à 26 ſur la droite ; ce qui fait 56 en tout : le rayon en contient 648, qui, diviſé par 56, donne 11 $\frac{1}{2}$, ou environ. On pourroit donc porter à droite & à gauche ſur cet intervalle, en commençant par le milieu, la vingt-troiſieme partie du rayon ; mais ce ſeroit s'engager dans une nouvelle opération, avec danger de commettre une nouvelle erreur. On pourroit encore ſe ſervir de 11 parties ; mais 648, diviſé par 11, donne près de 59, intervalle plus grand que l'intervalle à comparer de 3 parties, ou de 15 tours de vis ; ce qui donneroit lieu de ſoupçonner une erreur encore plus conſidérable. On peut y remédier au moyen de trois verres. Suppoſons que la diſtance du milieu aux extrémités ſoit à peu près la vingt-troiſieme partie du rayon, ou 28 intervalles de deux lignes, les extrémités ſeront éloignées l'une de l'autre de 56 parties de la lame mobile : portons 11 fois cet intervalle ſur le rayon, il reſtera environ la moitié d'un intervalle : faiſons enſorte que les verres des deux bouts répondent exactement à une des premieres diviſions du rayon, & que celui du milieu, avec l'un des précédens, réponde de même à la derniere, qui n'eſt que la moitié d'une des autres, ou à peu près. Comparons la premiere diſtance, qui eſt la plus grande, avec l'intervalle de 56 parties, auquel on a rapporté la poſition de l'étoile ; enſuite les diſtances du premier verre au ſecond, & du ſecond au troiſieme, avec un même intervalle de la lame mobile, pour avoir en parties de micrometre la différence de ces parties entre elles. La moitié de cette différence ſera la différence entiere de la derniere diviſion avec la moitié d'une des diviſions précédentes. Ainſi cette moitié de différence, diviſée par 23, fera connoître ce qu'il faut ajouter ou retrancher à chaque moitié des diviſions précédeutes, pour parvenir

Ce qu'il faut faire quand la partie aliquote eſt trop grande ou trop petite.

à une parfaite égalité. De-là on verra de combien on doit augmenter ou diminuer une de ces 11 parties égales, pour qu'elle contienne précisément $\frac{2}{13}$ du rayon, & par-là même on connoîtra aussi la différence de cette mesure, ou de $\frac{2}{13}$ du rayon, avec notre intervalle de 56 parties de la lame mobile.

Exactitude de la vérification.

98. Je ne finirois point si je voulois proposer des exemples pour tous les cas : il suffit de remarquer que nous fîmes plusieurs essais, tant à *Rome* qu'à *Rimini*, jusqu'à ce que l'usage nous eût donné plus de facilité pour la pratique, & que l'accord de plusieurs observations ne nous laissât plus aucun doute sur l'état de notre instrument; de sorte qu'il n'y a plus lieu de s'étonner de l'accord parfait qui se trouve entre nos observations astronomiques. Du reste on voit assez de quelle utilité est la lame mobile pour la rectification des divisions; nous verrons bientôt quel est son avantage dans les observations mêmes, & nous appliquerons dans le chapitre suivant la même théorie à la vérification du quart de cercle.

De la maniere de placer les fils.

99. Après avoir expliqué ce qui regarde la rectification des divisions, il faut dire quelque chose sur la maniere de placer les fils. La premiere attention qu'on doit avoir est de les poser à angles droits: ce qui dépend beaucoup de l'habileté de l'ouvrier, qui doit donner aux petits trous MNLK (fig. 13.) la forme & la disposition nécessaire, pour que les fils de soie, ou d'argent, ce qui est encore mieux, se coupent exactement à angles droits. Notre artiste y avoit parfaitement bien réussi. On peut aisément s'en assurer, en appliquant à l'orifice du tuyau un papier, où l'on aura tracé, par des points beaucoup plus distans l'un de l'autre, deux lignes perpendiculaires, & sur lequel on étendra une goutte d'huile pour le rendre transparent, afin qu'en appliquant l'œil du côté de ces fils, on puisse les voir distinctement. Quant à la maniere de leur conserver leur position, on en vient à bout au moyen de la lame élastique dont nous avons parlé, & sans laquelle ils pourroient très facilement se lâcher, & changer de position.

D'une erreur facile à éviter dans cette espece de secteur.

100. Il faut ensuite placer le tuyau qui porte les fils, au foyer de l'objectif, comme au lieu où se peint l'image de l'objet. Il est vrai, & nous l'avons déja remarqué, que les rayons qui partent d'un même point de l'objet, n'ont pas

tous

tous le même foyer, & qu'il y a une suite de foyers qui occupent une vingt-septieme partie de la distance du foyer le plus proche à l'objectif : cet intervalle est de 4 pouces pour un secteur tel que le nôtre, où cette distance est de 9 pieds. Les rayons violets sont ceux qui se réunissent le plus près de l'objectif, & les rouges, ceux qui se réunissent le plus loin. Quant aux erreurs que cela peut occasionner, M. *Bouguer* en a traité assez amplement. Je me contenterai de quelques observations. Pemierement cet espace diminue de plus de moitié, si l'on n'a égard qu'aux rayons les plus clairs, tel que le jaune, avec une partie de l'oranger & du violet. De plus, si le verre est bien centré, & que l'œil soit placé dans la ligne qui passe par le centre des fils, & par le milieu de l'ouverture de l'objectif, & qu'enfin ce point de milieu soit celui où passe l'axe, il n'y a plus d'erreur à craindre dans notre instrument, quand même les fils ne seroient pas au foyer de l'objectif. Car cet instrument n'est point de ceux où l'on mesure les angles par le mouvement des fils ; ce qui lui donne un grand avantage sur les autres ; mais il n'est question uniquement que d'avoir la ligne, que nous avons nommée plus haut axe de la lunette, & qu'on appelle aussi ligne de foi, & de la faire passer par l'objet & le centre des fils. Or il est aisé, comme nous le dirons bientôt, dans un instrument comme le nôtre, de connoître exactement le point où passe l'axe de l'objectif, & de placer l'œil dans la ligne qui passe par ce point, & par le centre des fils, puisqu'après avoir déterminé la position tant des fils que de l'objectif, on peut, sans y toucher davantage, déterminer celle de l'oculaire, & placer à la distance que l'on veut l'ouverture par où l'on regarde.

101. Il est encore à remarquer que nous avions les yeux également conformés, le P. *Maire* & moi étant aussi myopes l'un que l'autre ; qu'ainsi le foyer de l'oculaire étoit le même pour tous les deux, & que nous n'étions point exposés à l'incommodité qu'ont éprouvée MM. de *la Condamine* & *Bouguer*, dont le premier a la vue longue, & le second l'a courte ; ensorte que nous pouvions le même jour observer l'un & l'autre la même étoile. Si les fils sont placés en-deçà ou en-delà du foyer de l'objectif, ou de cet endroit du foyer où les Parallaxes des fils.

rayons sont plus denses, la tache qui se fait sur la rétine, par un effet des la diverse réfrangibilité des rayons, & par le défaut de la figure sphérique, qui ne réunit pas tous les rayons au même point, produit une espece de jeu ou de parallaxe, qui se manifeste en haussant ou baissant l'œil, en conséquence de quoi l'objet paroît changer de place par rapport aux fils, & suivre le mouvement de l'œil dans le premier cas, & dans le second se mouvoir en sens contraire. Lorsqu'on n'apperçoit pas cette parallaxe, c'est la meilleure preuve que les fils sont exactement placés. Or il nous étoit aisé de la faire disparoître, en retirant ou en avançant le tuyau OIKN, dont le mouvement qui se faisoit sans sacade, ne pouvoit cependant être produit que par un effort considérable; ce qui lui conservoit invariablement sa position. Les fils ayant été mis à la place qui leur convenoit, il ne m'est jamais arrivé d'appercevoir une autre parallaxe, ou changement de foyer, que MM. de *la Condamine* & *Bouguer* ont observé (1), occasionné par la différente constitution de l'atmosphere; de sorte que l'étoile une fois amenée au centre des fils, nous avions beau promener l'œil sur tout l'orifice du tuyau, nous n'appercevions de parallaxe ni de façon ni d'autre, & l'étoile nous paroissoit toujours au même endroit..

Direction des fils.

102. Après avoir placé les fils à une juste distance de l'objectif, il falloit les mettre dans une situation convenable; l'un devant être parallele, & l'autre perpendiculaire au plan du secteur, c'est-à-dire au plan qui passe par le limbe & le centre. Nous y avons réussi sans peine, en plaçant à l'ordinaire le secteur dans un plan horizontal, au moyen d'un niveau rempli d'une liqueur où nageoit une bulle d'air, appellé *niveau d'eau*, & tournant ensuite sur son axe le tuyau OIKN, sans changer sa position, jusqu'à ce que l'autre fil devînt parallele au fil à plomb, qui étoit suspendu librement devant lui. Mais comme l'axe du tuyau QAOR étoit sensiblement pa-

(1) On peut voir à ce sujet le Supplément au Journal Hist. par M. de *la Condamine*, page 163 & suivantes, & le Mémoire de M. *Bouguer*, du 29 Juillet 1750.

rallele à la regle de fer qui porte tous les tubes, il s'ensuit que ce fil étoit sensiblement perpendiculaire au plan du secteur, & par une conséquence ultérieure, que l'autre fil étoit parallele à ce plan & à la ligne du milieu de la lame mobile. Voilà ce qui regarde la position des fils.

Illumination des fils.

103. On les éclairoit aisément avec une lampe qu'on plaçoit derriere l'observateur, pour que la lumiere ne lui donnât pas dans les yeux, par l'ouverture *i*QR*h* de la figure 14, & l'on avoit pourvu à ce que l'observateur n'en fût point incommodé, soit en rendant tout l'intérieur de la lunette le plus noir qu'il se pouvoit, soit en couvrant la lampe, sur-tout par-devant, d'un corps opaque de figure conique, dans lequel on avoit pratiqué une petite fenêtre, qui ne laissoit passer qu'autant de lumiere qu'il en falloit pour éclairer un espace fort resserré, autour de l'ouverture *i*QR*h*. Mais il est arrivé heureusement que la plupart de nos observations, tant à *Rome* qu'à *Rimini*, se sont faites, ou en plein jour, ou à la faveur du crépuscule; ce qui nous dispensoit d'éclairer les fils, & rendoit l'image de l'étoile plus distincte.

Parallélisme de la lunette au plan de l'instrument

104. Pour achever ce qui regarde la disposition du secteur, il nous reste à parler du parallélisme de l'axe de la lunette au plan de l'instrument; sujet sur lequel M. *Bouguer* s'est fort étendu. Pour moi, je puis assurer avec vérité, que du moment que je commençai à penser à notre voyage, & à l'instrument nécessaire à ce dessein, & avant que nous eussions reçu le livre de M. *Bouguer*, je pensai d'abord à ce parallélisme, & je crois que tous les Astronomes y ont eu égard, dans ces longs instrumens dont on se sert pour observer les étoiles voisines du zénith, comme M. de *la Condamine* me paroît absolument l'avoir démontré, même par rapport aux petits quarts de cercle (1), & surtout à la nécessité de placer le plan du secteur dans la direction de la méridienne; moyennant quoi on ne doit pas certainement se mettre fort en peine de ce parallélisme: & je m'apperçus dès-lors qu'il étoit très

(1) Voyez le Supplément au Journal, par M. de *la Condamine*, seconde Partie, Réponse à l'Objection XIII.

facile de connoître par les observations mêmes, si la lunette s'écartoit du plan, & la quantité de cette déviation, de sorte que si cela pouvoit produire quelque erreur, on pût l'évaluer sans peine, & la corriger.

Moyen de procurer ce parallélisme.

105. Lorsque la lunette est adossée à la regle de fer, il est un peu plus difficile de placer tellement l'objectif, que l'axe soit exactement parallele au plan du secteur. C'est pourquoi j'ai pourvu 1°. à ce que le point de l'objectif, par où l'axe doit passer, pût être écarté ou rapproché du plan du secteur, ensorte qu'un mouvement considérable n'y produisît qu'une très légere différence de rapprochement ou d'éloignement; 2°. à ce qu'après avoir reçu le mouvement nécessaire, ce même point pût être fixé de maniere à ne pouvoir perdre sa position. En conséquence nous avons placé la boëte qui renferme l'objectif (fig. 11.) excentriquement, relativement à la caisse où cette boëte est elle-même renfermée (nous en avons deja parlé): car puisque l'excentricité *ab* (fig 11. & 12.) est peu de chose en comparaison du rayon *a*E, il s'ensuit qu'un grand mouvement dans le point E n'en produit qu'un très petit dans le point *b*, encore ne doit-on pas tenir compte de celui-ci pris dans son entier, pour déterminer le rapprochement ou l'éloignement, comme de *bb'*, ou *bt*, mais seulement de sa partie *bd* ou *bz*.

Méthode pour trouver le point de l'axe de l'objectif.

106. Au moyen de ce mouvement circulaire on peut trouver le point précis de l'objectif par où passe l'axe: ce qui n'est pas un petit avantage, surtout pour connoître si le verre est bien centré, afin de pouvoir placer ce point dans le centre de l'ouverture, & faire ensorte que l'axe de l'oculaire & le centre de l'orifice de son tuyau se trouvent dans la ligne qui, partant de ce point, passe par le centre des fils. Il y a encore plusieurs autres méthodes pour connoître le point par où passe l'axe; en voici une: je place l'objectif à la hauteur d'un rayon de lumiere, ou d'un point lumineux, & à une juste distance, par exemple vis-à-vis de l'ouverture circulaire d'un corps opaque, proche laquelle on a placé de nuit, & par derriere, une flamme plus grande que le diametre de cette ouverture; on recevra l'image du point lumineux sur une feuille de papier percée avec la pointe d'une épingle, de maniere que le trou réponde

au centre de l'image : j'applique contre l'objectif un carton avec une ouverture assez grande pour laisser passer une quantité suffisante de rayons de l'objectif, & je marque la position du verre, par rapport au carton, par trois points marqués sur le contour du verre, auxquels répondent trois autres points marqués sur le carton : ce point de l'axe se trouve dans la ligne qui joint le point lumineux au centre de l'image. Ayant donc écarté l'objectif, je vise par le centre de l'image, & par l'ouverture du carton au point lumineux, tandis qu'un aide fait glisser sur le carton une regle jusqu'à ce qu'elle me paroisse couvrir la moitié de ce point. Pour lors on marque sur le carton cette position de la regle ; & après avoir marqué deux positions de cette espece, on remet l'objectif à sa place, on applique de nouveau la regle sur le carton aux endroits désignés, on continue sur le verre les lignes tracées sur le carton, & le point d'intersection de ces deux lignes est le point cherché.

Autres méthodes.

107. On peut se servir aussi d'une lunette qui ait un micrometre au centre de l'objectif. Un aide fait tourner sur son axe la boëte qui renferme l'objectif, & qui dans les lunettes ordinaires est concentrique au verre, tandis que l'observateur vise par le centre des fils à un objet éloigné ; si le point de l'axe de l'objectif est exactement au centre de la boëte, le centre des fils répondra toujours au même point de l'objet ; s'il n'y est pas, le centre des fils parcourra divers points de l'objet ; on remarquera ces points ; on déterminera avec le fil mobile la quantité de cette déviation, & le côté qui répond à chaque position de la boëte ; par-là on connoîtra la grandeur du cercle décrit par le point de l'axe autour du centre de la boëte, puisqu'il est égal à l'aberration du centre des fils sur l'objet, & le côté opposé à celui où se porte le centre des fils par rapport à l'objet, c'est-à-dire qu'on aura le point de l'axe.

Moyen de se trouver dans le secteur.

108. Mais comme je ne mets point dans mon instrument un fil mobile au foyer de l'oculaire, j'ai rendu l'objectif excentrique, afin qu'au moyen de cette excentricité on pût connoître exactement ce point de l'axe ; car si l'on a l'intervalle dont ce point s'éloigne ou se rapproche du plan du secteur

par deux changemens de position dans la boëte (or on l'aura par la méthode que nous donnerons bientôt), on connoîtra aussi le point précis par où passe l'axe de l'objectif. Soient par exemple trois positions b', t, t' (fig. 12.), qui répondent à trois positions E″, e, e' de la boëte, & qu'on connoisse la valeur des intervalles dz, zz', dont le point se rapproche du plan du secteur par ces deux changemens de position, il est question de trouver b', t, t'; c'est-à-dire le point de l'axe dans les trois positions.

Suite. 109. Puisqu'on connoît les mouvemens E″e, ee', on pourra prendre avec un compas la mesure de ces arcs, & déterminer l'angle E″ee' mesuré par la moitié du reste de la circonférence, ou de l'arc E″EE$'e'$ sur lequel il s'appuie. De plus, les cordes E″e, & $b't$, ee', & tt' sont paralleles, puisqu'elles répondent aux mêmes angles du centre de deux cercles concentriques. Donc les angles E″ee', $b'tt'$ formés par ces cordes, sont égaux. Donc si l'on continue les lignes $t't$, db' jusqu'à ce qu'elles se rencontrent en c, l'angle $b'tc$ sera mesuré par la moitié de l'arc E″ee'. On aura aussi le rapport de $b't$ à tt', qui sera le même que celui de E″e à ee', & le rapport de $t't$ à tc, qui sera celui de $z'z$ à zd. Donc on aura celui de $b't$ à tc; & comme on connoît d'ailleurs l'angle $b'tc$, on aura les autres angles de ce triangle, nommément l'angle $cb't$, & par conséquent son alterne $b'tz$. Donc ayant mené $b'i$ parallele, & égal à dz, on aura $b't$ par cette proportion: comme le sinus de l'angle connu $b'ti$, ou $b'tz$ est au rayon, ainsi la ligne donnée $b'i$ est à $b't$. Donc si l'on prend une quatrieme proportionnelle à E″e, E″a, & $b't$, on aura ab', distance du point cherché b' au centre a, ou l'excentricité; & comme on a aussi les points E″, e, e', on connoîtra les trois positions du point de l'axe b', t, t', & le problême sera résolu.

Méthode trop imparfaite de M. *Bouguer* pour trouver le parallélisme.

110. Il faut chercher maintenant l'intervalle dz, dont le point de l'axe se rapproche du plan du secteur, en allant de b' en t, tandis que la boëte change de position de E″ en e; & nous donnerons en même tems une méthode pour déterminer l'inclinaison de l'axe de la lunette au plan du secteur, & l'erreur qui en peut provenir, & pour rendre ensuite la lunette parallele, ou si on aime mieux la laisser inclinée,

pour évaluer l'erreur & la corriger. Les Astronomes donnent plusieurs méthodes pour connoître si l'axe est parallele au plan du secteur, ou de combien il est incliné sur ce plan. Celle de M. *Bouguer* est au moins fort imparfaite : elle consiste à placer le secteur horizontalement, à viser ensuite à quelque objet très éloigné par le bord du limbe, & par la platine du centre, en pointant à la vue simple, & à placer sur le centre & le limbe des pinnules, pour viser plus juste ; après quoi il ne restera plus qu'à ajuster la lunette sur le même objet pour la rendre parallele. Cette méthode est, dis-je, assez informe, comme l'a très bien remarqué M. *de la Condamine*, parcequ'il n'est pas possible de pointer assez exactement à la vue simple, pour prévenir une erreur de deux ou trois minutes, ou plus, dans la position de la lunette. Elle peut néanmoins servir pour donner tellement quellement un parallélisme approché.

111. Pour ne point parler des autres méthodes, celle dont MM. *Bouguer* & *de la Condamine* se sont servis pour trouver la déviation de la lunette, est exacte, à la vérité ; mais elle demande beaucoup de travail : souvent même, à raison de la disposition du lieu où se fait l'observation, elle devient impraticable. Suivant cette méthode, on place d'abord exactement le secteur dans le plan du méridien ; on détermine ensuite l'instant de la médiation d'une étoile par plusieurs hauteurs correspondantes, ou si l'on connoît l'ascension droite, & le rapport du mouvement de la pendule à celui du soleil, par la différence du tems qui se trouve entre le point du midi & le passage de l'étoile par le méridien. Si l'étoile atteint le fil vertical précisément à l'instant de la médiation calculée, la lunette est parallele ; sinon on prendra la différence du tems, on la réduira à l'ordinaire en parties de l'équateur, & on aura l'arc du parallele de l'étoile intercepté par la ligne de foi, & le plan du méridien, que l'on convertira en arc de grand cercle par une méthode usitée en Astronomie, savoir en diminuant le nombre des minutes & des secondes, en raison du rayon au co-sinus de la déclinaison de l'étoile, ou du rayon d'un grand cercle à celui du parallele.

Autre méthode plus sûre, mais difficile dans la pratique ;

112. Mais outre qu'il en coute toujours beaucoup de tems, Sa difficulté.

& de travail pour prendre ces hauteurs, le lieu de l'obſervation eſt ſouvent tel, qu'on n'y a de vue ni à l'orient, ni à l'occident. Telle a été notre ſtation de *Rome*, telle à peu près a été celle de *Rimini*, où il n'y avoit que peu de vue à l'orient, point à l'occident; enſorte que pour avoir des hauteurs correſpondantes, il nous eût fallu avoir recours à des réductions de tems, après avoir obſervé au voiſinage dans quelque endroit plus commode. Il y a plus; il arrive ſouvent qu'on ne peut avoir deux hauteurs correſpondantes, les étoiles pouvant difficilement être apperçues de jour avec de petits quarts-de-cercle, tellement qu'on eſt obligé de recourir à l'aſcenſion droite.

Méthode de l'Auteur.

113. Pour moi dès que je commençai à m'exercer dans cette ſorte d'opérations, après avoir pointé l'inſtrument dans le plan du méridien; ce qui eſt également ſuppoſé dans la méthode précédente, & nous verrons bientôt par quel moyen on y peut peut réuſſir, je trouvai tout de ſuite une méthode facile (dont j'ai dit un mot dans le premier livre) pour connoître d'une maniere très préciſe la déviation de l'axe de la lunette, & cela ſans avoir aucune connoiſſance, ni de l'aſcenſion droite de l'étoile, ni de l'état de la pendule par rapport au ſoleil, ni du tems de la médiation: c'eſt ce que nous allons expliquer maintenant plus en détail.

Suite.

114. Soit (fig. 19.) G le centre du ſecteur, AB le limbe placé avec le centre dans le plan du méridien, GD le fil à plomb qui effleure le limbe en E; ſoit GF la ligne de foi, ou l'axe de la lunette, que l'on conçoit ici rapproché par un mouvement parallele à lui-même, juſqu'à ce que ſon extrémité ſupérieure ſe confonde avec le centre G. Si cet axe eſt incliné, ſon autre extrémité F ſera éloignée du limbe de l'intervalle d'une ligne FR perpendiculaire à ce limbe, & l'angle de la déviation ſera FGR. Suppoſons maintenant que G ſoit le centre d'une ſphere céleſte, dont le pôle eſt P, le méridien PQ paſſant par le zénith Z, où va ſe terminer la ligne du fil à plomb prolongée. L'axe FG ſe dirigera à un point L d'un cercle horaire PL incliné ſur le méridien PQ, & ſi l'on continue RG juſqu'à ce qu'elle rencontre le méridien en un point M, l'angle LGM ſera égal à l'angle de l'inclinaiſon

l'inclinaison FGR, & l'étoile se trouvera au centre des fils, non au moment de son passage au méridien en M, mais à celui où elle passera par ce cercle horaire en L. Si on observe le jour suivant la même étoile, après avoir tourné le limbe du côté opposé, l'axe de la lunette & le cercle horaire se trouveront de l'autre côté du méridien, c'est-à-dire que GF sera changée en GF', & PL en PL': & ayant retourné l'instrument le troisieme jour, l'axe reviendra à sa premiere position GF, & le cercle horaire en PL.

115. Supposons PL à l'orient par rapport au méridien PQ, l'étoile arrivera en L plutôt qu'en M. Le jour suivant, après une révolution entiere, elle reviendra au point L, (car le mouvement propre des étoiles, pour un ou deux jours, ne tire pas à conséquence, & il seroit encore aisé d'y avoir égard si on vouloit); mais pour arriver au point L' sur lequel la lunette est dirigée, elle a encore à parcourir l'arc entier LOL' de son parallele, dont le pôle est en P, & qui est coupé également, & à angles droits, en O par le méridien PQ. Le troisieme jour l'étoile paroîtra en L avant la fin de sa révolution, & la différence de ce tems à celui d'une révolution entiere sera le tems qu'il lui faut pour parcourir l'arc LOL', double de LO. Ainsi les intervalles de tems écoulés de la premiere observation à la seconde, & de la seconde à la troisieme, different entre eux du double du tems nécessaire pour l'arc LOL', ou du quadruple du tems nécessaire pour l'arc LO, le premier intervalle étant plus long, & le second plus court, que celui d'une révolution, de tout le tems qu'il faut pour parcourir l'arc LOL'. On auroit la même différence si PL étoit à l'occident, & PL' à l'orient, auquel cas le premier intervalle seroit au contraire plus court, le second plus long de la même quantité, c'est-à-dire du quadruple du tems dû à l'arc LO. Suite.

116. Maintenant que la pendule s'accorde ou ne s'accorde pas avec le mouvement du soleil, ou des étoiles fixes, pourvu que son mouvement soit uniforme, elle marquera de la premiere à la troisieme observation le tems requis pour deux révolutions, & l'on aura cette analogie : comme cet intervalle de tems est à la quatrieme partie de la différence ci-dessus; Inclinaison de la lunette réduite en parties du parallele.

ainsi deux cercles, ou 720 dégrés, sont à un quatrieme terme qui sera l'arc LO. Mais si la pendule est à peu près réglée sur les étoiles fixes, de sorte qu'elles s'accordent à un petit nombre de minutes près, sur 24 heures; il sera beaucoup plus facile de déterminer l'arc LO par cette différence des tems, en réduisant à l'ordinaire le tems en minutes & secondes, & en donnant 15 secondes de dégrés du parallele à chaque seconde de tems, & à quatre secondes de tems une minute du parallele.

Réduction en parties de grand cercle. Démonstration.

117. Mais puisque les arcs LOL', LML' se terminent aux mêmes points L, L', leur corde est commune; par conséquent la même ligne sert de sinus aux arcs LO, LM: mais ces cercles n'ont pas le même rayon. Le rayon du cercle LOL' est la perpendiculaire à l'axe PG, ou le sinus de l'arc PO distance de l'étoile au pôle; & le rayon de l'arc LML' est le rayon même de la sphere. Or en tout arc de cercle, le rayon est à la perpendiculaire tirée d'une extrémité de l'arc sur le rayon qui passe par l'autre extrémité, comme le sinus total, qu'on prendra dans les tables, au sinus de l'angle mesuré par cet arc. Ainsi le sinus de l'angle du centre, ou du nombre de dégrés, minutes & secondes qui se trouvent dans cet arc, est en raison directe du sinus rapporté à son rayon, & en raison inverse du rayon. Donc dans le cas présent, où la même ligne sert de sinus à deux arcs différens, le sinus de l'angle mesuré par l'arc LO, est au sinus de l'angle mesuré par l'arc LM, comme le rayon du cercle LML' est au rayon du cercle LOL', c'est-à-dire comme le rayon de la sphere est au sinus de la distance PO de l'étoile au pôle. Et puisqu'enfin de petits angles sont en raison de leurs sinus, le rayon de la sphere est au sinus de la distance au pôle, comme l'angle mesuré par l'arc LO, ou le nombre de dégrés, minutes & secondes qui se trouvent sur cet arc, à l'angle mesuré par l'arc LM, savoir à l'angle LGM, égal à l'angle de l'inclinaison cherchée FGR.

Autre démonstration. Récapitulation.

118. Plus briévement. Les arcs LML', LOL' sont à peu près égaux à leur corde commune. Donc ils sont égaux, & leurs moitiés LO, LM égales entre elles. Donc elles contiennent un nombre de dégrés en raison inverse de la cir-

conférence de leurs cercles divisés l'un & l'autre en 360 dégrés. Et tel est ce moyen si connu en Astronomie de réduire des arcs des parallele en arcs de grand cercle : moyen dont on a si souvent occasion de faire usage, nommément quand on se sert d'un micrometre avec des fils qui se coupent sous des angles de 45 dégrés. Nous avons donc démontré la méthode que j'ai donnée dans le premier livre, & cette méthode revient à ce qui suit. *Observez l'étoile trois jours de suite, en retournant alternativement le secteur. Si le tems écoulé entre la premiere & la seconde observation, est égal à celui qui se trouve entre la seconde & la troisieme, l'axe de la lunette est exactement parallele au plan de l'instrument. Si ces tems sont inégaux, prenez le quart de leur différence, & le réduisez en arc de parallele de l'étoile, en mettant une minute du parallele pour quatre secondes de tems. Vous ferez ensuite cette analogie : comme le sinus total est au sinus de la distance de l'étoile au pôle, ou au cosinus de sa déclinaison ; ainsi ce nombre de minutes est à un quatrieme terme qui sera l'inclinaison cherchée de l'axe de la lunette au plan du secteur.*

119. J'apporterai pour exemple les dernieres observations que nous avons faites à *Rome* sur *u* de la grande ourse. Nous y avons observé cette étoile trois jours de suite, savoir les 8, 9 & 10 décembre, en retournant le secteur au second & au troisieme jour. A la premiere fois que l'étoile parut au centre des fils, la pendule marquoit 5$^{h.}$ 9′ 25″, à la seconde 5. 5′ 55″, à la troisieme 5. 1′ 20″; ainsi le premier intervalle a 3′ 30″ par-dessus les 24 heures, & le second a 4′ 35″ de moins. La différence est 1′ 5″, dont le quart est 16″ $\frac{1}{4}$, qui, réduit en arc de parallele, donne 4′. 4″, ou 244″. La distance de cette étoile à notre zénith étoit d'environ 50′, en tirant vers le pôle, & notre zénith est à 48° 6′ du pôle. Donc la distance de l'étoile au pôle étoit de 47° 16′: & faisant cette analogie : le sinus total 1000 est au sinus de 47° 16′, savoir 735, comme 244 secondes du parallele à un quatrieme terme ; on aura le nombre de secondes d'un grand cercle, ou l'inclinaison de l'axe de la lunette, qui sera de 2′ 59″. Exemple de cette méthode.

120. Il n'est pas même nécessaire de retourner le secteur pour les deux dernieres observations, mais seulement pour

Autre exemple par une méthode un peu différente.

l'une des deux, & pour lors les observations faites du même côté, marqueront l'intervalle d'une révolution entiere, & celles qui sont faites du côté opposé désigneront le même intervalle augmenté, ou diminué non du quadruple, mais du double du tems que l'étoile met à parcourir l'arc LM. On pourroit encore commencer par deux observations de suite faites du même côté, & finir à quelque tems de-là par deux autres qu'on feroit après avoir retourné le secteur, pourvu que pendant ce tems-là l'égalité de mouvement dans la pendule ne fût point altérée par une variation considérable dans la températute de l'atmosphere. L'étoile *u* de la grande ourse observée à *Rimini* nous servira encore d'exemple pour le premier cas. Nous l'avons observée le 29 & le 30 avril, le limbe tourné à l'orient, & le premier mai, le limbe tourné à l'occident. A la premiere observation la pendule marquoit $7^{h.}\ 43'\ 26''$, à la seconde $7^{h.}\ 39'.\ 27''$, à la troisieme $7^{h.}\ 35'.\ 3''$. Le premier intervalle est de $24^{h.}$ moins $3'.\ 59''$, le second de $24^{h.}$ moins $4'.\ 24'$. La différence est $25''$, dont la moitié est $12''\frac{1}{2}$, qui, multiplié par 15, donne pour l'arc du parallele de l'étoile $187''\frac{1}{2}$, & réduit en arc de grand cercle, donnera pour l'inclinaison de l'axe $138''$, ou $2'\ 18''$.

Troisieme exemple par une méthode encore différente.

121. Si l'on avoit même deux observations faites à plusieurs jours l'une de l'autre, le limbe tourné du même côté, & deux autres de la même étoile, ou d'une étoile différente; en présentant le limbe à deux côtés opposés, on en tireroit également l'angle d'inclinaison, puisque les deux premieres observations déterminent le tems de la pendule pour un nombre donné de révolutions, & par conséquent pour une seule, d'où l'on conclut le tems nécessaire pour le nombre de révolutions qui se trouvent entre les deux dernieres observations, & la différence de ce tems au tems observé donne également le double de la déviation. Seulement si l'on mettoit un long intervalle entre chaque observation, il seroit à craindre qu'il n'arrivât quelque changement dans la pendule, à moins qu'elle ne fût des meilleures, & des plus justes. Dans notre premiere station de *Rome*, nous observâmes la même étoile le 4 mars, le limbe tourné à l'occident; le 7 & le 9, le limbe tourné à l'orient. A la premiere observation la pendule marquoit $11^{h.}$

3'. 0", à la seconde 10^h. 50'. 39", à la troisieme, 10^h. 42'. 31". Les deux dernieres donnent 8'. 8" de différence pour deux révolutions, pour chacune 4'. 4". De-là il devoit y avoir pour les trois premieres révolutions 12'. 12". Or il s'en est trouvé 12'. 21"; la différence est 9", dont la moitié 4" ½ donne 67" ½ pour l'arc du parallele, qui, réduit en arc de grand cercle, donne pour toute inclinaison un angle de 50".

122. Plusieurs autres déterminations s'accordent dans l'intervalle d'un très petit nombre de secondes, & cette différence provient de quelque petit changement dans la pendule, & de quelque petite erreur qu'on a pu commettre en plaçant le plan du secteur dans le plan du méridien, soit que le limbe ne se trouvât pas si exactement dans la direction de la méridienne, soit que le plan du secteur fût tant soit peu incliné sur le plan vertical : articles que nous traiterons plus bas. Mais les exemples que nous avons rapportés suffisent pour éclaircir la méthode, d'autant plus qu'il faut une erreur de trois minutes dans la déviation de l'axe de la lunette, pour produire dans la distance de l'étoile au zénith une erreur d'une petite fraction de seconde. On doit cependant remarquer que la premiere fois que nous avons observé à *Rome*, la lunette étoit à très peu près parallele; que nous l'avons trouvée ensuite fort inclinée à *Rimini*, & qu'elle a encore éprouvé depuis de petites variations jusqu'à notre derniere station à *Rome*. Le premier changement est venu de ce que nous avions ôté de sa place l'objectif de la lunette avant notre départ, & de ce que nous l'avons remis à *Rimini* dans une position, qui, à raison de cette excentricité de sa boëte, différoit notablement de la premiere. Au retour nous l'avons laissé à sa place, & tout le changement qu'y a occasionné l'ébranlement de la voiture, s'est réduit à trois secondes & demie de tems.

D'où vient la différence de ces trois inclinaisons.

123. Si nous eussions eu ces trois positions dans le même lieu, nous eussions pu déterminer, par la méthode proposée au n°. 109, le point *b'* de l'axe (fig. 12.). Car l'inclinaison diminue à proportion que ce point se rapproche du plan du secteur; & comme cette inclinaison est dans la premiere position de 2'. 59"; dans la seconde, de 2'. 18"; dans la troisieme,

Détermination de l'axe de l'objectif.

de 0'. 50", le point se rapprocheroit dans le premier changement de position de 41"; dans le second, de 1'. 38", & la valeur de ces approximations donneroit celle des petites lignes *dz*, *zz'*, par cette analogie : le rayon est au sinus de chacun de ces angles, comme la distance de l'objectif aux fils du micrometre, qui est ici de 9 pieds, à la petite ligne correspondante. Or les points *b'*, *t*, *t'* étant donnés de position, il nous eût été facile de déterminer la quantité de mouvement qu'on doit donner à la boëte pour rendre la lunette parallele. Mais cette précaution, comme nous le verrons bientôt, eût été superflue, une si petite inclinaison ne pouvant produire une erreur sensible dans la distance observée de l'étoile au zénith.

De l'inclinaison de l'axe de la lunette dans le plan du méridien.

124. Le parallélisme de l'axe de la lunette au plan du secteur n'est pas la seule chose qui mérite attention; il n'est pas moins important de connoître le point R du limbe AB (fig. 19.) auquel répond cet axe. Il seroit à souhaiter qu'il répondît au milieu du limbe; cependant s'il s'en faut de quelque chose, les observations n'en souffriront pas, pourvu qu'on sache de combien il s'en écarte. Or il ne faut pour cela que tourner le secteur du côté opposé; car le fil à plomb n'étant pas alors également éloigné du point de milieu, dans l'une & l'autre position, la différence de ces distances sera double de la distance du point R au point de milieu. Soit par exemple AB la position du limbe, le secteur tourné à l'occident, & que le point C, où se termine le rayon, soit le point de milieu entre A & B. Soit GR l'axe de la lunette, ou la ligne de foi, ou, si l'on veut, GF qui répond au point R; CE sera la distance du fil à plomb GED au milieu du limbe. Tournons le limbe à l'orient; si la ligne de foi est sur RG, elle conservera sa position; si elle est sur FG, elle retombera sur F'G, de sorte qu'elle répondra toujours au point R. Le point A tombera en *a*, B en *b*, C en *c*, E en *e*, & *c*E sera la nouvelle distance du fil à plomb au point de milieu. Or sa premiere distance CE est l'intervalle *ce*; & ôtant *c*C qui leur est commun, on a C*e* = *c*E. Donc la différence des distances est C*c*, dont la moitié est RC distance du point, où répond l'axe de la lunette, au milieu du limbe; & par la même raison la correction qu'il y aura à faire aux angles en G déterminés par

les tangentes *c*E, *ce*, sera de retrancher des plus grands, & d'ajouter aux plus petits la moitié de leur différence, pour avoir l'angle RGE, ou MGZ, qui mesure la distance de l'étoile au zénith, au moment de son passage par le méridien : mesure exacte dans le cas du parallélisme de la lunette, & très approchée dans le cas d'une petite déviation, comme nous le verrons plus bas.

Defaut de l'instrument ;

125. Remarquez que de cette maniere de placer l'objectif, il suit que l'erreur qu'on découvre en retournant le secteur, n'est plus la même, si par le mouvement circulaire de la boëte (fig. 12.) le point *b'* de l'axe est éloigné ou rapproché du plan du secteur. Car le point *b'* se rapproche en même tems, ou s'éloigne de la ligne EE' qui répond au centre du secteur, & dont il est maintenant éloigné de l'espace *db'*. Donc si l'on conçoit que l'axe de la lunette se rapproche par un mouvement parallele du corps de l'instrument, jusqu'à ce que le point *b'* se confonde avec le centre *r* du secteur ; ce que nous avons supposé dans la figure 19, dans laquelle le point G est le même que le point *r* de la figure 12, l'autre extrémité R de cet axe (fig 19.) sera également distante du milieu C, dont elle s'approchera aussi, ou s'éloignera. Concluons qu'avec un objectif ainsi disposé, on ne peut changer la direction de l'axe par rapport au plan du secteur, sans changer en même tems, par un mouvement continu, la distance RC ; & c'est pour cela que l'erreur que nous découvrîmes à *Rimini*, en retournant le secteur, se trouva plus grande que celle que nous avions découverte à *Rome* (1).

Moyen d'y remédier.

126. Mais on pourroit tellement placer l'objectif, que ces deux mouvemens de l'axe fussent indépendans l'un de l'autre. Il suffit pour cela d'enchasser les unes dans les autres trois boëtes quarrées, dont la premiere, qui est la plus grande, soit attachée à la regle de fer ; la seconde puisse se mouvoir, au moyen d'une vis, par un mouvement perpendiculaire au plan du secteur, dans la direction de EE' (fig. 12.) ; & la troisieme contenant l'objectif, puisse, avec une autre vis, se mouvoir dans la seconde par un mouvement parallele à ce même plan. On voit que par le mouvement de la seconde

(1) Voyez L. II. n°. 43.

boëte on peut rendre la lunette parallele, & par celui de la troisieme, l'ajuster au rayon. Ainsi l'on peut remédier en même tems, & à la déviation de l'axe, & à l'inégalité de distance au point de milieu ; & c'est la meilleure façon de disposer la lunette. Il est vrai que par-là il n'est plus possible de déterminer, par le mouvement de l'objectif, le point de sa surface où passe la ligne de foi ; mais on pourra le connoître par d'autres méthodes, (comme par exemple celles que j'ai données n°. 106 & 107), & le placer ensuite au centre de l'ouverture, de maniere que l'axe de l'objectif passe par le centre des fils. Cela fait, on n'a plus à craindre, dans un instrument tel que celui-ci, la parallaxe des fils résultant de la différence dans la longueur des vues, dans la constitution de l'atmosphere, dans la diverse réfrangibilité des rayons. Ainsi loin de désapprouver cette disposition de l'objectif, je ne suis pas éloigné de la préférer à la premiere, pour s'affranchir de la nécessité de retourner l'instrument (1).

Maniere de placer l'instrument.

127. Jusqu'ici nous avons traité de ce qui a rapport à la disposition des parties du secteur ; il faut parler maintenant de la maniere de le suspendre. Elle doit être telle, que le plan du secteur soit exactement dans le plan du méridien, qu'on puisse lui donner dans ce plan tel dégré d'inclinaison qu'on jugera à propos, & lui conserver invariablement cette position. Or pour placer l'instrument dans le plan du méridien, il faut premierement que le plan du secteur soit dans un plan vertical; en second lieu, que le limbe suive exactement la direction de la méridienne. Avant que de vérifier ces deux points, nous commencions par mettre le secteur dans la position que nous jugions à peu près la plus convenable pour l'observation, suivant que l'étoile nous paroissoit devoir plus ou moins approcher du zénith. Pour cela nous attachions le bras NOV du côté où le secteur devoit se porter par son propre poids ; nous donnions aux vis IF, I'F' une position

(1) Il semble qu'on pourroit réunir tous ces avantages en plaçant l'objectif dans une quatrieme boëte semblable à celle de la figure 12, & dont l'usage unique seroit de faire connoître le point de l'axe.

qui

qui répondît à cette inclinaiſon, & nous les avancions autant qu'il étoit néceſſaire pour mettre à peu près le ſecteur dans une ſituation verticale, & le limbe dans une direction parallele à la méridienne.

128. Nous procédions enſuite à la vérification ; & pour commencer par la direction du limbe, nous avions tracé ſur le pavé une méridienne exacte, qui paſſoit directement ſous le point de ſuſpenſion. Nous regardions par-deſſus le limbe EE′ (fig. 1.), l'œil placé à la hauteur FF′, ou environ, & nous cherchions en bornoyant, & en pouſſant ou retirant un côté du limbe, le point où le rayon viſuel, raſant le limbe, aboutit à quelque point de la méridienne. Le limbe ne paroiſſoit à l'œil que comme une ligne, & s'il ſe trouvoit dans la direction de la méridienne, cette ligne ſembloit ſe confondre avec la méridienne ; mais pour peu qu'il s'en écartât, elle la coupoit quelque part : pour lors nous avancions ou reculions une des vis IF, ſuivant le beſoin, pour détourner le limbe, juſqu'à ce qu'il ne parût faire qu'une ſeule ligne avec la méridienne. Comme le limbe occupoit ſur le pavé une partie conſidérable de la méridienne, la moindre déviation devenoit très ſenſible, & l'on y remédioit ſur le champ par le mouvement de la vis : nous examinions ordinairement l'un après l'autre ce paralléliſme, en montant ſur une chaiſe, pour pouvoir plus aiſément porter la vue ſur le limbe & ſur la méridienne.

Comparaiſon du limbe avec la méridienne.

129. La méridienne étoit tracée ſur un pavé de marbre, dans une ſalle du college romain. Il étoit facile de lui mener une parallele qui paſſât ſous le ſecteur, & l'on rendoit cette parallele plus ſenſible, en tendant par-deſſus un fil noir pendant le jour, & pendant la nuit un fil blanc, qu'on éclairoit avec des flambeaux. Dans notre obſervatoire de *Rimini*, qui ſe trouvoit placé ſous le toit de la maiſon de M. le Comte *Garampi*, nous avions tracé une méridienne avec un fil, en laiſſant paſſer dans la chambre un rayon du ſoleil, par une petite ouverture pratiquée, ſelon l'uſage, dans une lame de métal. La lame étoit placée horizontalement dans une petite lucarne, qui ſe trouva fort à propos ſur le toit, du côté du midi, & qui ſembloit faite exprès ; nous traçâmes notre

Tracer une méridienne.

méridenne par la méthode dont j'ai coutume de me servir, dans laquelle il n'est aucunement besoin de savoir l'état de la pendule, pourvu que ses heures ne different pas assez des heures solaires, pour donner lieu d'en appréhender une erreur de quelques secondes, & où un seul jour suffit pour toutes les observations nécessaires à ce sujet.

Suite. 130. Pendant le cours de la matinée nous prîmes quelques hauteurs du soleil, dans un lieu assez voisin de la maison, pour que l'observateur pût entendre compter les secondes de la pendule. Entre onze heures & midi, nous étendîmes sur le pavé de la chambre une grande feuille de papier, sur laquelle nous avions tracé plusieurs paralleles à égale distance, & nous fîmes ensorte que la ligne du milieu répondît à un fil à plomb suspendu au centre de l'ouverture de la lame. On ôta ensuite le fil à plomb, & on observa le tems auquel l'image du soleil arrivoit sur chacune des paralleles, en marquant à chaque fois l'heure qu'il étoit à la pendule. Après midi nous observâmes le tems auquel le soleil descend aux mêmes hauteurs. La moitié du tems écoulé entre des hauteurs égales, après y avoir fait, selon l'usage, la correction nécessaire pour le changement de déclinaison, nous donna l'heure de la pendule à midi; & nous trouvâmes en ceci un parfait accord entre plusieurs observations correspondantes, qui n'étoient pas fort éloignées les unes des autres, car nous avions observé avec un grand quart de cercle. On avoit aussi marqué le tems auquel les bords du disque du soleil avoient atteint chacune de ces lignes; d'où il étoit aisé de conclure en quel tems le centre y avoit passé; & l'instant du midi étant d'ailleurs connu, on voyoit entre quelles paralleles se trouvoit l'image du soleil à midi. Enfin on divisoit l'intervalle de ces paralleles à l'endroit même où l'on avoit marqué à peu près le chemin du centre, & on le divisoit en deux parties dans le rapport des deux intervalles de tems écoulés, l'un depuis l'instant où le centre avoit atteint la premiere parallele jusqu'à midi, l'autre depuis midi jusqu'à celui où il avoit atteint la seconde; & le point de la division étoit celui du midi; ce qui étoit encore confirmé par la comparaison qu'on pouvoit faire des instans auxquels le centre avoit atteint les autres paralleles.

Ce point connu, on suspendoit de nouveau le fil à plomb au centre de l'ouverture, on tendoit un fil qui rasoit le fil à plomb, passoit par le point du midi, & étoit attaché par les deux bouts avec des crochets enfoncés dans les murs opposés, sur lesquels on marquoit par de petites lignes la position exacte du fil. Les jours suivans on pouvoit tendre le fil dans la position désignée par ces lignes, & se procurer ainsi une méridienne propre à marquer l'instant précis du midi. Telle est, dis-je, la méridienne que nous traçâmes à *Rimini*, & nous lui menâmes une parallele sous le secteur.

131. Le secteur placé dans la direction de la méridienne, il s'agissoit de lui donner une situation verticale; ce qui ne souffroit aucune difficulté; car le fil à plomb CM (fig. 1.) qui pendoit librement du centre, étoit un fil de soie écrue, plus délié qu'un cheveu, tendu par un plomb fort pesant, & qu'on plongeoit dans l'eau. On montoit par une échelle placée auprès du secteur, pour examiner si le fil étoit assez près du centre, & s'il n'y avoit point quelque obstacle, comme une toile d'araignée, qui pût en empêcher l'alignement, ou quelque filament qui frotât contre la regle de fer, ou contre les lames de laiton. Après avoir remédié à tous ces inconvéniens, on examinoit si le fil à plomb effleuroit le limbe, sans y appuyer: pour peu qu'il en fût trop loin, ou trop près, on y remédioit par le mouvement des vis, en les poussant, ou les retirant également l'une & l'autre, afin de donner au secteur une situation verticale, sans rien changer à la direction du limbe; enfin on ne manquoit pas d'examiner de nouveau la position du limbe par rapport à la méridienne, pour voir si le mouvement des vis n'y avoit causé aucun changement. Placer le limbe dans le plan du méridien.

132. Pour derniere opération, il faut incliner le secteur, dans le plan même du méridien, plus ou moins, suivant la distance de l'étoile au zénith. C'est ce qui se fait, ainsi qu'il a été dit, par le moyen de la vis PE (fig. 1.), qui après lui avoir donné cette position, la lui conserve, en le soutenant de côté, & en l'empêchant de retomber vers P, où sa pente l'entraîne. En même tems les vis FI, F'I' l'empêchent de s'approcher de GG', & les poids L, L' de s'en éloigner. Du reste j'ai éprouvé que ces poids avoient moins d'effet pour De l'inclinaison du secteur.

aſſurer le ſecteur, lorſque les fils FK, F'K' étoient dans une direction perpendiculaire à GG', que lorſqu'on les plaçoit obliquement, & en tirant du côté où ſe trouvoit la vis PE'; car dans le ſecond cas, les poids attirent le ſecteur contre la vis, & l'empêchent de s'en écarter.

Maniere d'obſerver

133. Nous avons donné une deſcription détaillée de toutes les parties du ſecteur; nous avons expliqué la maniere de le vérifier & de le pointer: venons à ſon uſage, dont nous avons déja eu plus d'une fois occaſion de parler. Cet uſage conſiſte à déterminer exactement, en dégrés, minutes & ſecondes, la diſtance d'une étoile au zénith. L'inſtrument placé exactement dans le plan du méridien, l'obſervateur s'aſſeyoit proche l'ouverture H' de la lunette. Pour plus grande commodité, nous avons pris ſoin que cette ouverture ſe trouvât préciſément à la hauteur de l'œil d'un obſervateur aſſis, qui regarde contre le ciel. Le toit étoit ouvert dans l'endroit qui répondoit à la lunette, & l'on découvroit cette ouverture dans le tems de l'obſervation. Dans cette ſituation, l'obſervateur attendoit le moment où l'étoile commençoit à entrer dans le champ de la lunette. Après une ou deux obſervations, ce moment étoit indiqué par la pendule, à quelques ſecondes près, pourvu néanmoins que le ſecteur ne fût pas éloigné de la ſituation qui lui convenoit: or on avoit ſoin de changer tant ſoit peu ſon inclinaiſon, de peur que l'étoile, dès ſon entrée, ne fût couverte par le fil perpendiculaire au méridien, comme il arrive de jour. Dès que l'étoile commençoit à paroître, l'obſervateur la ramenoit ſur le fil, en pouſſant de côté le limbe avec la vis E'P, qu'il tournoit lui-même.

Du diametre apparent des étoiles.

134. Le diametre apparent des étoiles fixes eſt non ſeulement beaucoup plus petit qu'une ſeconde, comme l'a fait voir M. *Huygens* dans ſon *Coſmotheoros*, mais même qu'une tierce, comme j'ai tâché de le prouver dans une diſſertation ſur les lentilles & les lunettes. Elles devroient donc ne nous paroître que comme un point; ce qui ſeroit aſſez incommode: en effet, le fil les couvriroit de telle ſorte, qu'on ne pourroit jamais ſavoir ſi elles ſont au milieu de l'eſpace intercepté par le fil, lequel eſt de quelques ſecondes. Mais l'aberration de la lumiere, dont il a déja été fait mention plus haut, nous

les fait paroître comme de petits cercles, dont le diametre est plus ou moins grand, suivant que l'étoile a plus ou moins de lumiere, & au contraire que le ciel est moins ou plus éclairé: de-là nos deux étoiles nous paroissoient de nuit déborder notablement le fil de part & d'autre, & si le ciel étoit un peu éclairé, leur image, quoiqu'un peu obscurcie, se voyoit encore toute entiere; dans le crépuscule il s'en falloit de fort peu que l'étoile ne fût couverte par le fil. De jour l'étoile α du cygne égaloit sensiblement la largeur du fil; seulement on appercevoit quelquefois sur les bords une lumiere très foible, qui marquoit le lieu de l'étoile. Quant à l'étoile μ de la grande ourse, elle étoit entierement couverte par le fil pendant le jour; mais pour peu qu'on tournât la vis dans les deux sens opposés, elle paroissoit tantôt sur un bord, tantôt sur l'autre. Ainsi nous avions toujours un moyen sûr de faire ensorte que le milieu du fil répondît exactement au centre de l'étoile.

Passage de l'étoile au méridien.

135. Mais pour pouvoir observer le moment où l'étoile traversoit le fil parallele au plan du secteur, il étoit quelquefois nécessaire d'attendre qu'elle l'eût passé pour l'amener sur le fil horizontal. Or on le pouvoit faire en toute sûreté; car une preuve que les fils étoient parfaitement disposés, c'est que dès l'instant où l'étoile étoit arrivée au milieu du fil, elle ne le quittoit plus, & que si elle étoit couverte dès le commencement, elle l'étoit jusqu'à la fin.

Distance du fil à plomb au milieu du limbe.

136. Cette observation finie, on examinoit le point où le fil à plomb CM coupoit la ligne du milieu de la lame mobile EE′, & on déterminoit la distance de ce point au milieu du limbe, ou à l'extrémité du rayon. On voyoit d'abord le nombre d'intervalles de deux lignes compris dans cette distance, & comme le fil ne répondoit jamais exactement à aucun point de la division, on avançoit la lame mobile pour connoître en parties de micrometre de combien il s'en falloit qu'il ne répondît au point le plus voisin. On ajoutoit ensuite, ou l'on retranchoit du nombre des intervalles entiers ce nombre de parties de micrometre, suivant que le fil tomboit du côté de E′ où s'avance la lame, ou du côté opposé, le fil étant dans le premier cas plus éloigné du milieu du limbe que du



milieu de la lame mobile de cette quantité, tout au contraire de ce qui arrive dans le second cas.

Précaution à prendre en observant.

137. Pour plus de précision, nous nous servions d'une lentille très convexe, attachée au limbe d'une maniere fixe, à une distance convenable, & perpendiculairement au-dessus du fil à plomb. Et comme ce fil, pour plus de liberté, ne doit point toucher le limbe, mais seulement l'effleurer; afin de prévenir tout danger de parallaxe, nous regardions d'abord obliquement pour distinguer le fil de son image réfléchie par le limbe, ensuite nous ramenions l'œil sur le fil jusqu'à ce qu'il couvrît entierement son image. De cette sorte nous étions assurés que le rayons visuel, qui passoit par le fil, étoit perpendiculaire au limbe, & qu'on n'avoit rien à appréhender de la parallaxe. Enfin tantôt l'un de nous se contentoit d'observer la position du fil par rapport aux points de la division, tandis que l'autre poussoit par un mouvement lent & continu la lame mobile, jusqu'à ce que son compagnon l'avertît d'arrêter; tantôt l'observateur tournoit lui-même la vis jusqu'à ce qu'il eût amené le fil sur un point de la division. Nous observions cependant toujours l'un après l'autre; nous y revenions même plusieurs fois, & nous prenions un milieu entre toutes ces observations, dont la plupart s'accordoient à deux ou trois parties de micrometre près; ce qui faisoit à peine la différence d'une seconde. Souvent même nous avons prié ceux qui se trouvoient présens, d'observer à leur tour; & ils se rencontroient avec nous. Mais ce qui contribuoit encore plus à rendre l'observation exacte, c'est qu'elle se faisoit dans une chambre bien fermée de tous côtés, & où il n'entroit pas le moindre air: précaution que nous avions jugée indispensable, depuis que nous avions remarqué que le souffle même de la bouche suffit quelquefois pour déranger le fil à plomb. Du reste il nous est arrivé souvent de revenir à notre secteur plusieurs heures après l'observation, & de retrouver entre la division & le fil le même nombre de tours de vis & de parties de micrometre, tant les supports avoient de force pour lui conserver sa position.

138. Connoissant le nombre des tours de vis, dont il avoit fallu avancer la lame mobile, & la distance du milieu à chaque

division corrigée par les méthodes que nous avons expliquées, on avoit la tangente qui marquoit la distance de l'étoile au zénith, & où l'on devoit corriger l'erreur occasionnée par la déviation de l'axe comparé au rayon, laquelle se connoissoit en retournant alternativement le secteur, comme nous l'avons encore expliqué plus haut. Cette correction faite, on avoit la distance corrigée de l'étoile au zénith pour le tems de l'observation, telle que celles qu'on voit dans les tables du second livre. Il faut néanmoins y corriger encore l'erreur de la réfraction qui élève les objets plus ou moins, suivant leur distance au zénith. Dans le cas d'une petite distance, la différence est d'une seconde par degré; différence qu'on doit ajouter à la distance observée, pour avoir la vraie; mais cela peut se faire après toutes les réductions.

Correction à faire à la distance de l'étoile au zénith.

139. Cette distance au zénith pouvoit renfermer quelques erreurs résultantes de cette inclinaison de l'axe de la lunette au plan du secteur, que nous avons trouvée n°. 120 & suivans, comme aussi de la position du secteur, soit qu'il fût tant soit peu incliné au plan vertical, soit que le limbe ne suivît pas exactement la direction de la méridienne. Il faut apprécier ces erreurs pour constater d'une part que cette inclinaison de la lunette ne pouvoit produire aucune erreur sensible (& c'est pour cela que nous ne nous sommes point mis en peine de la corriger), de l'autre, que les précautions que nous avons prises pour placer le secteur dans le plan du méridien, ne permettent pas de soupçonner de l'erreur dans les observations. Nous allons les évaluer séparément.

Trois sources d'erreurs dans cette distance.

140. Si l'inclinaison de l'axe (fig. 19.) est RGF ou LGM, le secteur représente la distance ZM au zénith, déterminée par l'arc LML' d'un grand cercle, pour la distance ZO déterminée par l'arc LOL' du parallele de l'étoile dont le pôle est en P. Ainsi l'erreur est MO, qui diminue la distance lorsque l'étoile est plus éloignée du pôle que le zénith, comme dans la figure, & qui l'augmente lorsqu'elle en est plus proche. Pour trouver la valeur de MO, remarquez d'abord que PL égale à PO est la base du triangle rectangle sphérique PML; d'où il suit que MO est la différence de la base PL au côté PM; de plus, que par la trigonométrie sphérique,

Apprécier l'erreur provenant de la déviation de l'axe;

Pl. II. fig. 19.

le rayon eſt au co-ſinus du côté M L, comme le co-ſinus du côté PM eſt au co-ſinus de la baſe PL. Donc le rayon eſt à ſa différence au co-ſinus du côté ML, ou, ce qui eſt le même, donc le rayon eſt au ſinus verſe de ce côté, comme le co-ſinus de PM, ou à peu près de PL, eſt à la différence des co-ſinus.

Déterminer généralement cette erreur;

141. Or c'eſt un théorème connu, & dont a ſouvent occaſion de faire uſage dans la géométrie de l'infini, ſavoir que lorſque deux arcs different de très peu de choſe entre eux, le ſinus du plus grand eſt au rayon, comme la différence des co-ſinus eſt à la différence de ces mêmes arcs. Suppoſons par exemple (fig. 12.) que la différence des arcs *bb'*, *bt* ſoit très petite, l'angle *b'ta* différera très peu d'un angle droit, & l'angle *b'ti* ſera à peu près le complément de l'angle *zta* à 90 dégrés, & par-là même il ne différera pas ſenſiblement de l'angle *taz*. Ainſi on peut dire que le triangle *b'it* eſt ſemblable au triangle *zta*, & que *b'i* ou *dz*, différence des co-ſinus *ad*, *az* des arcs *bb'*, *bt*, eſt à *b't* différence des arcs, comme *tz*, ſinus du plus grand arc *b't*, eſt au rayon *at*. Donc le ſinus de PL (fig. 19.) eſt au rayon, comme la différence des co-ſinus de PM, PL, eſt à MO différence de ces arcs. Et comparant cette analogie avec la derniere du numéro précédent, on aura par égalité troublée la proportion ſuivante: le ſinus de PL eſt au co-ſinus de PM, ou à peu près de PL, comme le ſinus verſe de ML eſt à la différence MO. De plus, en tout arc le ſinus eſt au co-ſinus, comme le rayon à la co-tangente. Donc puiſque PL eſt la diſtance de l'étoile au pôle, dont le complément eſt la déclinaiſon de l'étoile, ayant pour tangente la co-tangente de PL, & que ML meſure l'inclinaiſon de l'axe de la lunette au plan du ſecteur, ſi l'on prend le ſinus d'un petit arc pour l'arc même, on aura le théorème qui ſuit: *le rayon eſt à la tangente de la déclinaiſon de l'étoile, comme le ſinus verſe de l'angle d'inclinaiſon de la lunette au plan du ſecteur, eſt au ſinus de l'erreur occaſionnée par cette inclinaiſon dans la détermination de la diſtance au zénith.*

142. Il s'enſuit que l'erreur eſt en raiſon compoſée de la raiſon de la tangente de la déclinaiſon de l'étoile, & de la raiſon

raison du sinus verse de l'inclinaison de la lunette. Et comme le sinus verse est en raison du carré de la corde, (car il est troisieme proportionnel au diametre, & à la corde), & que dans un petit arc on peut prendre la corde pour le sinus; il s'ensuit encore que l'erreur est en raison composée de la raison simple de la tangente de la déclinaison, & de la raison doublée du sinus de l'inclinaison de la lunette; par où l'on voit que dès qu'il n'est question d'observer que des étoiles voisines du zénith, cette erreur se réduit à rien sous l'équateur, où la déclinaison de l'étoile devient nulle, & par conséquent aussi la tangente de cette déclinaison; mais qu'à mesure qu'on se rapproche du pôle, la déclinaison pouvant augmenter jusqu'à 90°, & la tangente à l'infini, l'erreur doit devenir plus sensible. M. *Bouguer* a démontré la même chose par une autre méthode.

En quelle raison elle augmente ou diminue.

143. Pour venir à notre mesure, supposons que la lunette eût été inclinée de trois minutes, ce qui n'est jamais arrivé, & que l'étoile se fût trouvée à trois dégrés du zénith, & du côté du pôle, ce qui lui eût donné une déclinaison de 45° plus grande que celle de l'étoile α du cygne, & à plus forte raison de μ de la grande ourse; il n'est pas difficile d'évaluer l'erreur, puisque la tangente de 45° est égale au rayon. Donc le sinus de l'erreur seroit égal au sinus verse de l'inclinaison de l'axe de la lunette, c'est-à-dire de trois minutes. Or pour le rayon 10000000 le sinus verse de trois minutes est 4, & le sinus d'une seconde est 48. Ainsi dans toutes nos observations, l'erreur a toujours été au-dessous de $\frac{4}{48}$ ou de $\frac{1}{12}$ de seconde.

Elle se réduit à rien dans notre mesure.

144. Transportons-nous sous le cercle polaire; donnons à la lunette une déviation de 6 minutes, & à l'étoile une distance de quatre dégrés & demi du zénith, & du côté du pôle, ensorte que sa déclinaison soit de 68°; l'erreur n'ira pas même alors à une seconde. Car le rayon 10000000 est à 24750869 tangente de 68°, comme 16, sinus verse de 6 minutes, est à 39.6, moindre que 48, sinus d'une seconde. Or une déviation de six minutes dans un secteur de 9 pieds, feroit qu'à une extrémité de la lunette, la distance seroit plus grande de 22 lignes & demie qu'à l'autre, ce qui fait près de deux pouces de différence: erreur trop considérable pour pouvoir échapper

Elle ne seroit pas même sensible sous le cercle polaire.

à l'œil de l'ouvrier le moins attentif. Concluons donc que dans des observations de cette nature, où l'on se sert communément d'instrumens fort longs, & dans des lieux même où l'erreur devroit être plus grande, (car on n'a pas encore fait de semblables observations au-delà du cercle polaire), on ne peut raisonnablement craindre une erreur sensible. Au reste, dans de petits quarts-de-cercle, construits au hasard, où la lunette pourroit être beaucoup plus inclinée, l'erreur pourroit aussi, même dans notre latitude, monter beaucoup plus haut; de même qu'on pourroit s'exposer à commettre d'autres erreurs par le mauvais usage d'un secteur défectueux.

De l'erreur produite par l'inclinaison de l'instrument au plan vertical. Pl. II. fig. 19.

145. Nous avons parlé de l'inclinaison de l'axe, en supposant le secteur dans le plan du méridien; supposons maintenant la lunette parallele, & le secteur un peu incliné au plan vertical, sans que le limbe sorte pour cela de la direction de la méridienne; la position du limbe (fig. 19.) sera A'B' parallele à AB; mais le fil à plomb GD en sera éloigné de EI égal à RF', la ligne de mire F'G aboutira en L', & rapportant le fil à plomb perpendiculairement au point I, la tangente de l'angle du centre sera F'I égale à RE, & l'on aura pour la distance au zénith l'arc ZM, au lieu de ZO. Ainsi l'angle d'inclinaison du plan du secteur au plan du méridien sera F'GR, & l'on aura par conséquent pour cette inclinaison la même proportion que celle qu'on a eue ci-devant pour l'inclinaison de l'axe. C'est-à-dire que si notre secteur avoit été incliné de trois minutes, auquel cas le fil à plomb auroit dû s'écarter du limbe de près d'un pouce, l'erreur ne seroit pas allée à $\frac{1}{12}$ de seconde. Il n'est certainement point à craindre qu'un observateur, quelque négligent qu'on le suppose, donne à son secteur une inclinaison capable de mettre une distance de près d'un pouce, ni même d'une ligne, entre le limbe & le fil à plomb: la lui donnât-il, il n'en résulteroit aucune erreur sensible dans la distance de l'étoile au zénith. La seule chose qu'on pourroit appréhender en pareil cas, seroit la parallaxe du fil, qui, à raison de sa distance, ne pourroit que difficilement se rapporter au point précis auquel il répond perpendiculairement sur le limbe. Nous avons toujours eu attention à ne donner d'autre distance à notre fil à plomb que celle

dont il a besoin pour pendre librement, sans appuyer contre le limbe.

146. Il nous reste à examiner ce qui arriveroit dans le cas où le limbe ne suivroit pas la direction de la méridienne. Soit donc $b'd'$ le limbe du secteur rétabli dans sa *verticalité*, de sorte que le fil à plomb GD effleure le limbe en E, & que cependant ce même limbe décline de la méridienne de tout l'angle AEF'. Au lieu de la distance ZO au zénith, on aura ZL'; ou bien, si l'on imagine un arc LQL', dont le pôle soit en Z, & qui coupe le méridien en Q, on aura ZQ, & l'erreur sera OQ, qui sera la différence de MO, MQ, si l'étoile est d'un autre côté que le pôle P, comme dans la figure; mais qui seroit leur somme, si l'étoile étoit du même côté que le pôle, & qui dans l'un & l'autre cas augmente la distance au zénith.

Erreur produite par la déviation du limbe; Pl. II. fig. 19.

147. Or quelle que soit la différence des arcs PL', PZ, & la valeur de l'angle AEF', ou L'ZQ, dont le secteur est incliné sur le plan du méridien, on peut évaluer l'erreur OQ. Car étant donnés, dans le triangle PZL', les côtés PZ, PL', & l'angle en Z, complément à deux droits de la déviation L'ZQ dans le premier cas, qui est celui de la figure, & la déviation même dans le second; on connoîtra ZL', ou son égale ZQ, dont la différence à ZO, excès de PL' sur PZ dans le premier cas, sa différence par défaut dans le second, donne l'erreur cherchée OQ.

Déterminée généralement

148. Mais dans le cas où l'arc ZL', & l'angle L'ZQ sont fort petits, on peut abréger en cette maniere: soit pris L'ZQ pour une surface plane, on aura cette analogie: la distance observée ZL' est à MQ, comme le rayon au sinus verse de l'angle L'ZQ, ou de la déviation du limbe. De plus ZL' est à L'M, comme le rayon au sinus du même angle L'ZQ; & par le n°. 141, le rayon est à la tangente de la déclinaison, comme le sinus verse de l'arc L'M, au sinus de MO, qui soustrait, ou ajouté à MQ, donne l'erreur qu'on cherche.

Déterminée pour le cas présent.

149. On voit que MQ est en raison de ZL', distance au zénith, & du sinus verse de la déviation du limbe, qui est en raison doublée du sinus de cette déviation, ou, parceque ce sinus est très petit, en raison doublée de l'angle même de

Suite.

la déviation. Donc MQ est en raison composée de la distance au zénith, & de la raison doublée de la déviation du limbe. Nous trouverons avec la même facilité le rapport de MQ à MO. Soit la distance ZL′ au zénith $= d$, le sinus de la déviation du limbe $= s$, le rayon GM de la sphere $= r$, qu'on exprimera par le nombre affecté au rayon dans les tables des sinus, la tangente de la déclinaison $= t$; on aura L′M $= \frac{ds}{r}$ & le sinus verse de l'angle L′ZQ, qui est très petit, sera à peu près $= \frac{ss}{2r}$. Donc $\div\, r : \frac{ss}{2r} ::$ ZL′ (d) : MQ $= \frac{ssd}{2rr}$. Or le sinus verse de L′M (étant la troisieme proportionnelle au diametre $2r$ & à la corde de L′M) sera $\frac{ddss}{2r^3}$. Ainsi le sinus de MO sera $\frac{ddsst}{2r^4}$ (1); & parceque les petits arcs sont à peu près égaux à leurs sinus, on aura MO $= \frac{ddsst}{2r^4}$. Donc MQ : MO $:: \frac{ssd}{2rr} : \frac{ddsst}{2r^4} :: rr : dt :: \frac{rr}{t} : d$. De plus, $\frac{rr}{t}$ est la cotangente de la déclinaison, dont la tangente est t; & la cotangente de la déclinaison est la tangente de la distance de l'étoile au pôle. D'où il suit que prenant l'arc ZL′ pour sa tangente, MQ sera à MO, comme la tangente de la distance de l'étoile au pôle est à la tangente de sa distance au zénith. La démonstration de ce théorème est facile, si on regarde le petit arc MOQ comme une ligne droite, qui étant continuée, rencontre les lignes GZ, GP aussi prolongées, & détermine les tangentes des arcs ZQ, PO, ou ZL′, PL′; car on pourroit démontrer que MQ est à peu près troisieme proportionnelle au double de la premiere & à ML′, & que MO est également troisieme proportionnelle au double de la seconde & à la même ligne ML′: d'où il suit que MQ est à MO, comme la tangente de PL′, à la tangente de ZL′; ce qui fait voir que MO est très petit par rapport à MQ.

150. De-là on détermine aisément l'aberration OQ, pour

---

(1) Par le théorème du n°. 141 de ce Livre.

une distance donnée quelconque de l'étoile au zénith, & pour une déviation quelconque du limbe. Mais il faut examiner auparavant de combien le limbe pourroit être incliné à la méridienne. Si l'une de ses extrémités A rencontre la méridienne, & que l'autre extrémité B s'en écarte d'une ligne, cette distance se manifeste d'une maniere très sensible sur le pavé d'une chambre; car nous avons souvent remarqué qu'il suffisoit de donner un demi-tour à l'une des vis IF (fig. 1.) pour déranger notablement la position du limbe, quoique le pas de ces vis soit moindre qu'une ligne. Or la longueur AB du limbe (fig. 19.) est de 14 pouces, ou de 168 lignes; & faisant cette proportion: 168 est à 1, comme le rayon 100000 à un quatrieme terme, savoir 595, on a le sinus de la déviation, qui se trouve de 20 minutes. Ainsi pour peu que l'observateur soit attentif, on ne doit pas appréhender une erreur de 20′ dans la déviation du limbe.

Apprécier l'erreur de la déviation du limbe. Pl. II. fig. 19.

151. Supposons maintenant la distance de l'étoile de trois dégrés, ou de 10800 secondes, & l'angle de la déviation de 20′; on aura cette analogie: le rayon 10000000 est à 170 sinus verse de 20′, comme l'arc ZL′ de 3 d. ou 10800″ à MQ, qu'on trouve = 0.18. De plus, la tangente de 45°, qui est notre plus petite distance au pôle, est à la tangente de 3 d., ou bien 1000 est à 5, comme 0.18 à un quatrieme terme, qui ne donne pour la valeur de MO qu'une fraction insensible. Ainsi de quelque côté que soit l'étoile, l'erreur QO ne monteroit qu'à $\frac{18}{100}$ ou environ $\frac{1}{6}$ de seconde. Mais si l'on diminue la distance au zénith, & l'angle de la déviation, l'erreur se réduira presqu'à rien.

Cette erreur est ici très petite;

152. On voit cependant qu'on doit plus se précautionner contre cette erreur, que contre les deux autres; car si la méridienne est mal tracée, & que le limbe s'écarte de la direction de cette méridienne dans le même sens, l'erreur pourroit augmenter au point de n'être plus tant à mépriser; puisqu'elle seroit alors en raison doublée de l'angle de la déviation. Il suit de-là que dans une déviation triple, ou d'un dégré entier, laquelle est moins sensible dans un limbe d'environ un pied, que dans une lunette de neuf pieds de long, l'erreur (qui augmente toujours la distance au zénith) pourroit aller au-

Elle pourroit augmenter, & pourquoi.

delà d'une ſeconde. On voit encore que cette erreur devient plus ſenſible à meſure que l'étoile eſt plus éloignée du zénith : car tant que la ſurface ſphérique peut être regardée comme une ſuperficie plane, l'erreur augmente en raiſon de cette diſtance ; & dans des diſtances plus grandes encore, elle n'augmente pas à la vérité ſuivant ce rapport, mais elle augmente pourtant toujours beaucoup, au lieu qu'elle diminue conſidérablement à de moindres diſtances.

Précautions à prendre ſuivant que l'étoile eſt près ou loin du zénith.

153. De ces deux points il eſt aiſé de conclure que lorſqu'on a à obſerver des étoiles très voiſines du zénith, on doit commencer par mettre le limbe à peu près dans la direction de la méridienne, ſans attendre que l'étoile arrive ſur le fil au moment de ſa culmination ; & que quand il eſt queſtion d'étoiles fort éloignées du zénith, on doit donner ſa premiere attention à ce dernier article. En effet, il ſuffiroit de commettre une légere erreur, ſoit en déterminant par le calcul le moment de la culmination, ſoit en l'obſervant dans les étoiles voiſines du zénith, qui changent promptement d'azimut, pour produire dans la déviation du limbe une erreur beaucoup plus forte, qui produiroit elle-même une erreur conſidérable dans la diſtance de l'étoile. Au contraire, une légere erreur dans l'angle d'inclinaiſon du limbe, produiroit, à la vérité, comme nous l'avons vu, dans les étoiles plus éloignées du zénith, une erreur conſidérable ; mais elle mettroit auſſi un grand intervalle entre le moment où l'étoile arrive ſur le fil, & celui de ſon paſſage par le méridien ; par conſéquent étant connu le moment de la culmination, on peut même éviter une déviation beaucoup moindre avec toutes ſes ſuites.

Des obſervations ſimultanées.

154. Je crois avoir ſuffiſamment pourvu à ce qu'il ne ſe pût gliſſer aucune erreur dans nos obſervations aſtronomiques. Il me reſte à expoſer en peu de mots la maniere dont on doit ſe ſervir de ces ſortes d'obſervations, pour déterminer la valeur d'un dégré. Si au même inſtant, deux obſervateurs placés aux deux extrémités de l'arc, dont on doit aſſigner l'amplitude en dégrés, minutes & ſecondes, déterminent la diſtance d'une même étoile à leur zénith ; il eſt clair que la ſomme des diſtances, ſi l'étoile eſt entre les deux zéniths, & leur différence, ſi elle n'y eſt pas, eſt la meſure de l'arc céleſte

qu'on cherche. C'est ce que M. *de la Condamine*, & avec lui M. *Bouguer* ont exécuté enfin de concert; quoiqu'il eût été à propos de réitérer, pendant plusieurs nuits, ces observations simultanées, puisqu'elles étoient les seules, ainsi qu'ils en conviennent l'un & l'autre, dont ils dussent se servir pour déterminer l'amplitude de l'arc céleste, afin qu'on pût corriger les petites erreurs, en prenant un milieu entre chaque observation.

Qu'elles sont nécessaires au cas qu'on ignore les mouvemens des fixes;

155. MM. *de la Condamine* & *Bouguer* sont les premiers qui aient fait des observations simultanées; précaution absolument nécessaire au tems où ils ont opéré: on ne connoissoit point encore si exactement tous les mouvemens des étoiles fixes, & il y en avoit quelques-uns qui leur étoient alors inconnus. En effet, tandis qu'on transporte le secteur d'un poste à l'autre, l'étoile, qui a aussi son mouvement particulier, change un peu de place; d'où il s'ensuit qu'on ne pourroit sans erreur déterminer la distance d'un zénith à l'autre, par leur distance aux deux points du ciel, où l'étoile a paru successivement, à moins qu'on ne connût aussi la distance de ces points entre eux. Il doit arriver pour lors (& ils l'ont eux-mêmes éprouvé), que toute réduction faite pour ces mouvemens particuliers, & les observations rapportées à un tems commun, ou réduites à une même époque, celles qui s'accordoient le mieux, soient les plus disparates; & que celles qui s'accordoient le moins, soient précisément celles qui sont le moins éloignées de cet accord parfait.

Que hors ce cas il est mieux d'y renoncer.

156. Mais aujourd'hui qu'on connoît parfaitement tous les mouvemens des étoiles fixes, cette précaution n'auroit abouti qu'à nous mettre dans le cas d'avoir besoin d'un second secteur, & d'un plus grand nombre d'observateurs; car un homme seul n'a ni la même facilité à observer, ni la même précision dans ses observations, que lorsqu'il est aidé d'un second. Nous avons donc observé avec le même secteur à *Rome* & à *Rimini*, & nous avons réduit ces observations à une même époque; pratique aujourd'hui universellement usitée dans l'Académie royale des Sciences. Un autre avantage, c'est qu'en réduisant à une même époque toutes les observations faites à un même poste, on voit si elles s'accordent plus ou moins; ce

qu'on ne peut voir dans des obſervations ſimultanées, & non réduites.

Trois mouvemens à conſidérer dans les étoiles: préceſſion des équinoxes.

157. Or nous avons à conſidérer ici, comme je l'ai remarqué dans le premier livre, & le P. *Maire* dans le ſecond, trois mouvemens des étoiles fixes; car pour le mouvement commun & journalier, qui ſe fait parallelement à l'équateur, il ne change rien dans le lieu où l'étoile paſſe au méridien, & d'où ſe meſure, au moment de ſon paſſage, ſa diſtance au zénith, laquelle ſert à déterminer l'amplitude de l'arc céleſte. Le premier, qui eſt connu depuis long-tems en Aſtronomie, eſt celui de la préceſſion des équinoxes, par lequel les points équinoxiaux remontent chaque année dans le zodiaque de 50 ſecondes. Par ce mouvement toutes les étoiles fixes avancent en une année de 50 ſecondes à l'orient dans des cercles paralleles à l'écliptique; ce qui ne change point leur latitude, mais ſeulement leur longitude, leur aſcenſion droite, & leur déclinaiſon. Nous n'avons à examiner ici que le changement de déclinaiſon qui eſt le ſeul des trois qui change le point du méridien où paſſe l'étoile. Or étant donné le lieu de l'étoile, c'eſt-à-dire ſa longitude & ſa latitude, ou ſon aſcenſion droite & ſa déclinaiſon, on peut déterminer de combien ſon mouvement annuel de 50″ en longitude, change ſa déclinaiſon, ou de combien en un an elle s'éloigne ou ſe rapproche du pôle. Si donc on a une obſervation faite en un tems donné, & qu'il faille la réduire à un autre tems auſſi donné, on voit ce qu'il y a à retrancher ou à ajouter à la diſtance obſervée de l'étoile au zénith, ſelon que l'étoile ſe ſera approchée ou éloignée du zénith, en même tems qu'elle s'éloignoit ou s'approchoit du pôle.

Aberration de la lumiere.

158. La connoiſſance des deux autres mouvemens eſt due à l'admirable conſtance & à la ſagacité merveilleuſe de M. *Bradley*. Ses découvertes, en ce genre, ſont ſans contredit les plus belles de notre ſiecle; & la poſtérité, à laquelle il a rendu un ſi important ſervice, conſervera à jamais dans les faſtes de l'Aſtronomie la célébrité de ſon nom. L'un eſt l'aberration de la lumiere, l'autre la nutation de l'axe terreſtre. Le premier eſt le plus conſidérable, & c'eſt auſſi celui qu'on s'eſt le plus attaché à bien connoître, tant par les obſervations, que

que par la théorie. Nous n'avons plus rien à desirer à cet égard, & l'on peut déterminer avec autant de précision que de certitude la grandeur de l'aberration pour un tems quelconque donné. Indépendamment de ce qu'en a écrit l'Auteur de la découverte, plusieurs Astronomes & Physiciens l'ont mis dans le plus grand jour. Par ce mouvement chaque étoile nous paroît décrire annuellement un petit cercle parallele au plan de l'écliptique, & d'un rayon de 20 secondes. Le point du cercle occupé par l'étoile est de 90° plus oriental que celui où est le soleil dans l'écliptique par rapport à la terre, ou de 90° plus occidental que celui où est la terre par rapport au soleil. Or ce petit cercle vu obliquement de la terre, & rapporté à la surface concave du ciel, a l'apparence d'une ellipse, dont le grand axe perpendiculaire au cercle de latitude de l'étoile, & parallele au plan de l'écliptique, est de 40″, & le petit axe, qui tombe sur la circonférence même du cercle de la latitude, est au grand ou à 40″, comme le sinus de la latitude du centre est au rayon.

159. L'Astronomie fournit des méthodes pour déterminer par la construction, ou le calcul, le changement occasionné par ce mouvement circulaire, ou elliptique, dans la longitude, l'ascension droite, & la déclinaison. M. *Clairaut* de l'Académie royale des Sciences, & l'un des premiers Géometres de ce siecle, nous a donné là-dessus d'excellentes formules insérées dans les Mémoires de cette Académie de l'année 1735. Je me suis aussi essayé sur ce sujet dans ma dissertation de 1742, où je détermine les effets de la parallaxe annuelle & de l'aberration de la lumiere prises d'abord séparément, puis ensemble; ce qui fait trois cas, dans chacun desquels j'ai trouvé l'ellipse de la même forme & dans la même position, avec cette seule différence, que dans le premier & le second cas l'étoile arrive au même point de l'ellipse au bout de trois mois, & dans le troisieme cas en un tems intermédiaire, plus ou moins approchant de l'un des deux premiers, suivant que la parallaxe l'emporte sur l'aberration, ou l'aberration sur la parallaxe. Mais par l'accord des observations avec la seule théorie de la lumiere, il demeure aujourd'hui pour constant, qu'il n'y a point de parallaxe sensible,

Effets de cette aberration.

& que ce mouvement apparent est un pur effet de l'aberration de la lumiere. Or en déterminant par cette théorie le changement de déclinaison pour un tems donné, il est évident qu'on détermine par-là même la correction qui se doit faire à la distance observée, pour la réduire à un autre tems aussi donné.

Nutation de l'axe.

160 L'hypothèse de M. *Bradley* sur la nutation de l'axe se peut voir dans le Journal de *Trevoux* à l'année 1748 au mois d'octobre. Il n'est pas si aisé de déterminer avec précision ce mouvement par la théorie, qui est très sublime, & appuyée sur des principes qui n'ont pas encore été assez éclaircis; car il dépend, ainsi que la précession des équinoxes, de l'action du soleil & de la lune sur cette couche de terre qui s'éleve, depuis les pôles jusqu'à l'équateur, au-dessus de l'exacte sphéricité. Mais comme il est très petit, les connoissances que nous en avons par les observations suffisent, & au-delà, dans la matiere présente.

Deux sentimens sur cette nutation.

161. Voici une idée de ce mouvement, tel que M. *Bradley* l'a déduit de ses observations. Il suppose que le vrai pôle de l'équateur décrit un cercle, dont le rayon est de 9 secondes, autour d'un point fixe, qui est comme son point de milieu, & qu'il le parcourt en un tems égal à une révolution des nœuds de la lune, qui est d'environ 18 ans; tellement qu'il se trouve toujours plus avancé de trois signes que le nœud ascendant de la lune; répondant par exemple au premier point du cancer, lorsque le nœud de la lune est au premier point d'*aries*: ainsi lorsque le nœud de la lune retourne, il lui sert comme d'une espece de guide qui l'entraîne à sa suite, & qu'il n'abandonne jamais. M. d'*Alembert* qui a examiné par des recherches profondes, & la théorie de la précession des équinoxes, & en même tems la nutation de l'axe terrestre qui y a rapport, substitue au cercle une ellipse assez allongée; cependant les observations de M. *Bradley* nous représentent un mouvement circulaire, ou qui s'écarte très peu de cette figure.

Effet de ce mouvement;

162. Quoi qu'il en soit, pourvu qu'il n'y ait pas un trop long intervalle entre les observations, la différence entre le mouvement circulaire & le mouvement elliptique n'y sauroit produire une erreur sensible, puisque le pôle ne varie en neuf

ans que de 18 secondes, & que la diversité des hypothèses ne comporte qu'une différence d'un très petit nombre de secondes pour neuf ans. L'effet continuel de ce mouvement est d'approcher le pôle de l'équateur de plusieurs étoiles fixes, & de l'éloigner de plusieurs autres, plus ou moins, suivant la position de chaque étoile par rapport à la direction de l'arc actuellement décrit. Cet effet devient plus sensible dans les étoiles qui se trouvent placées sur le grand cercle qui touche cet arc, & il l'est moins à mesure qu'elles s'en éloignent, toutes choses égales d'ailleurs; de sorte que si elles sont au contraire sur un grand cercle, qui coupe l'arc à angles droits, il n'y a plus de différence sensible dans leur distance au pôle de l'équateur. Cette différence fait varier la déclinaison d'une étoile, & par conséquent sa distance au zénith.

Qu'on n'en doit pas tenir compte ici; mais seulement des deux premiers.

163. On voit que nous n'avions rien à craindre de ces mouvemens des étoiles fixes. Car les deux premiers sont exactement connus, & s'il reste quelque doute sur la juste valeur du troisieme, il n'en peut résulter aucune erreur dans nôtre mesure, vu qu'il n'y a pas eu deux mois entiers d'intervalle entre nos premieres observations de *Rome* & celles de *Rimini*; intervalle pendant lequel le pôle de l'équateur ne peut s'éloigner ou se rapprocher d'une étoile, dans le cas même où l'effet de son mouvement est le plus sensible, que d'une petite fraction de seconde. Un autre avantage que nous avons eu, c'est que les deux étoiles que nous avons observées se trouvoient de part & d'autre du lieu moyen du pôle, & fort proches du grand cercle perpendiculaire à l'arc qu'il décrivoit, de sorte que leur distance au pôle a presque été la même pendant tout ce tems; d'ou il suit que non seulement il n'est arrivé depuis nos premieres observations de *Rome* jusqu'à celles de *Rimini* aucun changement dans la distance, dont nous soyons obligés de tenir compte, mais encore que le changement même qui s'y est fait entre nos premieres & nos dernieres observations de *Rome*, ne va pas au-delà d'une petite fraction de seconde. C'est pour cela qu'en réduisant toutes les observations au 4 mars, le P. *Maire* a eu raison de ne faire aucune correction pour la nutation de l'axe, comme il le dit lui-même *liv. II.* n°. 43, où il est à observer que lorsqu'il dit n'avoir

eu égard dans cette réduction qu'à l'aberration de la lumiere, il ne parle que des mouvemens de M. *Bradley*, non de la précession des équinoxes à laquelle il eut égard sans doute, puisque dans ses observations réduites au 4 mars, on voit que la correction a été faite; & pour la précession des équinoxes, & pour l'aberration de la lumiere.

Utilité des étoiles qu'on a choisies dans cette mesure.

164. Ce ne sont pas là les seules raisons que nous eussions de préférer α du cygne, & μ de la grande ourse; car comme ces étoiles étoient dans une position presque entierement contraire, relativement au pôle de l'équateur & à l'écliptique, l'aberration de la lumiere & la précession des équinoxes rapprochoient la premiere du pôle, & en éloignoient la seconde: de plus, celle-ci étoit entre les deux zéniths, & celle-là plus septentrionale que l'un & l'autre; d'où il suit que c'est la somme des distances au zénith dans μ de l'ourse, & leur différence dans α du cygne qui déterminoit l'amplitude de l'arc céleste. Or l'accord qui s'est trouvé dans les résultats, entre deux témoins d'ailleurs si opposés, semble donner un nouveau poids à leur témoignage.

Accord des observations.

165. Pour voir jusqu'où va cet accord, il suffit de se rappeller ce que j'ai dit vers la fin du premier livre, où j'ai proposé plusieurs combinaisons d'observations qui déterminent la mesure de notre arc. Je les réunis dans la table suivante, sous un seul point de vue; elles sont prises de ce qui en a été dit au second livre depuis le nº. 43 jusqu'au nº. 46., en prenant un milieu entre les dernieres observations de *Rome*, après y avoir fait la correction nécessaire pour la réfraction, comme on l'a fait aux premieres.

DISTANCE AU ZÉNITH,

SUIVANT LES OBSERVATIONS	De α du cygne,			De μ de la grande ourse.		
Les premieres de *Rome*	2°	30′	20.″7	0°	50′	0.″8
Celles de *Rimini*		20	34.6	1	19	46.6
Les dernieres de *Rome*	2	30	23.4	0	49	59.4
Amplitude de l'arc, tirée des 1 & 2	2	9	46.1	2	9	47.4
Amplitude de l'arc, tirée des 2 & 3	2	9	48.8	2	9	46.0

166. Si l'on prend un milieu entre ces quatre arcs dont les deux premiers se rapportent à l'étoile α du cygne, & les autres à μ de l'ourse, on voit l'accord qui se trouve entre nos observations. Car on a pour milieu entre

On prend plusieurs milieux, & un résultat moyen.

le 1er. & le 2d.	. . . .	2°	9′	47.″4
les 1er. & 3e.	. . . .	2	9	46.7
les 1er. & 4e.	. . . .	2	9	46.0
les 2d. & 3e.	. . . .	2	9	48.2
les 2d. & 4e.	. . . .	2	9	47.4
les 3e. & 4e.	. . . .	2	9	46.7
Entre tous les arcs pris ensemble	. . . .	2	9	47.0

167. Ce dernier résultat moyen s'accorde assez bien avec les six premiers, parmi lesquels il y en a seulement deux dont il differe d'une seconde, & ce sont précisément ceux dont on devroit faire ici moins de cas, fussent-ils d'ailleurs plus conformes, à cause de la diversité des étoiles, & des tems où les observations auxquelles ils se rapportent ont été faites; tandis que les autres ont été faites dans le même tems, & sur la même étoile. Tous ces autres résultats s'accordent avec le dernier à une fraction de seconde près; ce qui confirme admirablement la théorie de M. *Bradley*, sur laquelle est appuyée cet accord, & qui prouve en même tems, & la bonté de notre secteur, & l'exactitude de nos observations.

Accord de ce résultat avec les précédens.

168. A l'égard de ces observations, ce qui en fait encore mieux voir la justesse, c'est que dans chaque suite d'observations faites à *Rimini*, ou à *Rome*, il n'arrive qu'une fois que le dernier résultat moyen differe des autres d'une seconde. Mais rien ne distingue plus notre secteur que cette lame mobile, qui donne tant de facilité pour l'observation & la vérification, & qui les rend l'une & l'autre beaucoup plus exactes, que dans toute autre espece de secteurs, également propres d'ailleurs à observer les étoiles voisines du zénith. Ajoutons que dans les secteurs où l'on adapte un micrometre à la lunette, on a deux échelles à rectifier, celle des divisions du limbe, ou de l'arc qui répond à la partie aliquote, lesquelles se comparent au rayon du secteur, & celles des parties du micrometre qui se comparent à l'axe de la lunette; au lieu que toute l'opération se termine ici à l'échelle unique des

Avantages du secteur. Justesse des observations.

parties de la lame mobile. Enfin notre maniere de ſuſpendre & de pointer le ſecteur, eſt également ſimple & sûre; & au moyen des vis de la figure 1, on peut aiſément lui donner la poſition qui lui convient, le retourner enſuite en fort peu de tems, & le rétablir dans ſa premiere poſition, qu'il conſerve invariablement par le moyen des deux poids de la même figure. Mais en voilà aſſez ſur le ſecteur, & ſur les obſervations auxquelles il a ſervi.

CHAPITRE II.

Du Quart-de-cercle.

Du quart-de-cercle.

169. JE m'étendrai un peu moins ſur ce qui regarde le quart-de-cercle, que je ne l'ai fait ſur la deſcription du ſecteur, tant parcequ'il y a moins de choſes qui le diſtinguent des quarts-de-cercle ordinaires, qu'à cauſe que les obſervations dans leſquelles on l'emploie, ſont moins délicates, les erreurs qu'on y pourroit commettre, n'étant pas à beaucoup près de la même conſéquence pour la meſure du dégré. Je ſuivrai du reſte la même méthode que pour le ſecteur, c'eſt-à-dire que je donnerai d'abord la deſcription de l'inſtrument, & de celles de ſes parties qui méritent une attention particuliere; je parlerai enſuite de ſa rectification, & des obſervations auxquelles il a ſervi : ce qui doit néanmoins comporter quelques détails.

Explication des figures.

170. Le quart-de-cercle eſt repréſenté dans la troiſieme planche : on le voit avec ſon pied dans la figure 1, & dans une poſition oblique : il y manque la petite piece dans laquelle on ſuſpend au centre le fil à plomb, dans la poſition verticale du quart-de-cercle, & où l'on attache l'alidade qui porte la lunette mobile, dans la poſition oblique ou horizontale. La figure 2 repréſente cette petite piece, avec le garde-filet. On voit dans la troiſieme le premier dégré du limbe diviſé en minutes. La quatrieme figure indique le méchaniſme par lequel on tourne le quart-de-cercle en tout ſens, avec autant de facilité que d'exactitude ; & la cinquieme, ce

quart-de-cercle avec son alidade mobile, & une espece de vérificateur ajouté à l'instrument, soit pour le rectifier & comparer entre elles les divisions du limbe, soit pour donner plus de précision aux observations.

171. Il y a quelques parties de cette machine qui me paroissent nouvelles, & d'une grande utilité; & parcequ'elles sont représentées dans la figure 5 trop en petit, pour pouvoir être apperçues distinctement, elles sont séparément exposées dans les figures 6, 7 & 8. La figure 6 représente le petit tuyau de l'oculaire, qui est brisé, & qui tourne autour de la charniere AB, pour l'écarter, & laisser appercevoir au milieu de l'alidade un verre sur lequel il y a une ligne tracée du côté qui touche le limbe, laquelle marque les minutes & les secondes. La figure 7 représente le vérificateur, qui, au moyen d'une vis, fait mouvoir l'alidade, & remplit ici la même fonction que la vis qui fait avancer dans le secteur la lame mobile. On a mis ici, comme dans le secteur, un cercle avec une aiguille, ou index, qui sert de micrometre. La figure 8 représente plus distinctement la maniere dont le vérificateur est adapté au limbe. Suite.

172. Commençons par la premiere figure: elle représente un quart de-cercle de fer, avec un limbe de cuivre soudé sur celui de fer, & divisé en dégrés, dont chacun est subdivisé en six parties de dix minutes chacune: les minutes sont marquées à l'ordinaire par des transversales & des cercles concentriques. A la regle IC, plus longue que AC, on a ajouté une lunette avec un micrometre mobile en M: il y a en C une ouverture circulaire, où s'attache l'alidade, ou la petite piece qui porte le fil à plomb. La barre EGHF sert à lier toutes les parties du quart-de-cercle, & elle porte sur son pied TVX. Pour la rendre plus ferme, on y a ajouté sur les côtés EG, HF, & à angles droits, deux autres barres, dont la derniere se voit en FH*hf*. T*t*Q est un cylindre qui s'ajuste à la barre GEFH en *t*, au moyen d'une espece de genou représenté dans la figure 4. T*tg* est reçu dans la concavité du demi-cylindre TVS auquel on le fixe par le moyen de trois lames élastiques qui l'entourent, & qu'on serre avec les vis *t*, *u*, *s*. Le demi-cylindre TVS est lié avec la piece de cuivre TV, dans laquelle Description du quart-de-cercle, Pl. III. fig. 1.

on fait entrer la tête du pied de bois TVX. Celui-ci porte à l'ordinaire sur trois traverses avec des vis YZ, dont on se sert pour l'élever, ou l'abaisser, ou l'incliner.

Dimension de plusieurs de ses parties.

173. Le rayon AC est de près de 3 pieds de roi. L'épaisseur des barres est partout de 5 lignes; mais la largeur n'est point la même : celle de AC & IC est de 30 lignes; celle de EH de 36; celle du limbe ADK de 33; celle des barres posées de champ H*hf*F de 20. Au reste, le limbe est très exactement plané, & la machine entiere n'est sujette à aucune flexion. Il est vrai qu'il y en avoit un peu en *t*, avant qu'on y eût ajouté les barres H*hf*F; mais depuis cette addition, le quart-de-cercle est solide, & ne laisse plus rien à desirer à cet égard.

Description de son pied.

174. Le pied TVX est d'un bois compacte & très dur: il a six pouces d'épaisseur. Je l'avois fait faire très solide, afin qu'on pût le transporter d'une montagne à l'autre, sans aucun accident. Les trois traverses *zz* du pied sont aussi fort épaisses, & fortement serrées, par des vis, contre le pied TXV; mais on peut, en lâchant ces vis, les séparer du corps de l'instrument pour la facilité du transport. Les vis YZ, qui sont de fer, & assez grosses, peuvent s'ôter aussi, & être transportées séparément. Chaque traverse est attachée avec le pied du quart-de-cercle par deux moyens: 1°. par un boulon à tête carrée, & taraudé par le bout, qui, entrant en *z*, & sortant en *x* au côté opposé, est serré fortement au moyen d'un écrou: 2°. par une vis qui entre dans la traverse au-dessus de *z'*, passe de part en part, & va se visser dans une espece d'oreille qui fait partie de l'anneau de fer qui serre le bas du pied. De cette sorte les traverses sont si bien liées au pied, que le tout fait un corps parfaitement solide. Nous ferons voir en détail les pieces T*t*Q, & PQR, en expliquant la figure 4.

Pourquoi la lunette est plus longue que le rayon.

175. La lunette LO, & la barre IN sont presque d'un pied plus longs que le rayon: mais je n'avois pas à craindre, vu l'épaisseur des barres, que l'instrument éprouvât dans une si courte étendue une flexion capable de rendre les angles défectueux. D'un autre côté j'avois dessein d'employer de grands triangles dans notre mesure, comme nous l'avons fait aussi; la distance du mont *Soriano* au mont de *Perouse* qui fait le côté d'un de nos triangles, étant de près de 60 milles d'Italie.

d'Italie. Or il nous falloit une lunette d'environ quatre pieds pour reconnoître plus sûrement les signaux à pareille distance. L'objectif O est attaché solidement à la barre, vers son extrémité N, de même que le micrometre en M. Le tuyau est de cuivre, & assez mince ; mais les pieces de cuivre qui portent l'objectif & le micrometre, & qui sont attachées d'une maniere fixe sur la barre, sont beaucoup plus fortes ; & il étoit à propos de les rendre telles, pour une plus grande solidité.

176. Le micrometre est étroitement attaché en M à l'une de ces pieces, avec quatre vis : il est composé de quatre fils d'argent très déliés, qui se coupent à angles de 45 dégrés. Ces fils sont placés dans l'intérieur du tuyau, dont ils suivent tous les mouvemens ; & ils sont tendus par un ressort qu'on met dans une rainure pratiquée en dehors sur la surface convexe du tube, de la même façon que je l'ai exposé n°. 45, en parlant du micrometre du secteur (pl. II. fig. 13.). Il y a encore un fil parallele à l'un des quatre premiers, & qui, au moyen d'une vis M, se meut en conservant son parallélisme ; l'index marque à l'ordinaire sur la circonférence d'un petit cercle, le nombre des parties du micrometre, comme on a tâché de l'exprimer dans la figure. Je ne crois pas devoir donner la description de ce méchanisme, parceque notre artiste, qui avoit fait toutes les autres pieces avec autant d'adresse que de simplicité, s'est servi dans celle-ci d'une méthode fort compliquée, & qu'il y a mis une vis si défectueuse, qu'elle rendoit le mouvement du fil très inégal. Nous n'avons pu trouver hors de *Rome* un ouvrier assez habile pour raccommoder cette piece, qui nous auroit été d'un si grand usage. Cependant elle n'a pas laissé de nous servir dans la rectification du quart-de-cercle, pour les hauteurs, comme nous le dirons plus bas.

Du micrometre de la lunette fixe.

177. Mais l'artiste a parfaitement réussi à faire tourner le micrometre autour de l'axe de la lunette, ensorte que nous pouvions mettre la vis dans une situation perpendiculaire, parallele, ou oblique à volonté par rapport au limbe; ce qui donne au micrometre un usage plus étendu, & rend le quart-de-cercle très utile pour plusieurs observations astronomiques,

Même sujet.

par exemple pour prendre la différence de la déclinaison d'une planette & d'une étoile; puisqu'on peut tellement disposer le micrometre, que le fil mobile soit perpendiculaire à la direction du mouvement diurne; d'où il s'ensuit que sa distance à celui des quatre autres fils, qui lui est parallele, donne la différence de la déclinaison. C'est ce que j'avois en vue lorsque je demandai que le micrometre fût tellement enchâssé dans le tuyau de la lunette, qu'on pût le faire tourner aisément sur son axe.

Second objectif & second micrometre.

178. Il y a un objectif en M proche les fils du micrometre, & un autre en O, lequel n'est point fixé à l'extrémité du tuyau, mais qui est porté par un petit tuyau séparé, qu'on fait entrer dans celui de la lunette, & qu'on peut approcher plus ou moins du micrometre M. Près de ce dernier objectif est un autre micrometre, consistant en un anneau de cuivre avec une rainure par dehors, & deux fils qui se coupent à angles droits, & qui sont tendus, comme ci-devant, par un ressort placé dans la rainure. On fait glisser cet anneau sur deux lames de cuivre, entre lesquelles on peut l'élever ou l'abaisser plus ou moins à volonté, ou le faire tourner sur son axe: on le serre ensuite avec des vis. Mais pour lui donner précisément la position qui lui convient, avant que de l'attacher, on le fait mouvoir à discrétion, au moyen de quelques autres vis placées de côté. Tout ceci est trop clair pour s'y arrêter.

Lunette double.

179. De cette sorte on a une double lunette; c'est-à-dire qu'ayant placé l'oculaire en L, on voit les objets par le moyen de l'objectif qui est au-dessous du point O, & que l'ayant porté ensuite à l'autre extrémité O, on peut voir au moyen de l'objectif qui est en M. Du reste on sait qu'un objectif ne peut nuire à l'autre; ce qui est constant par les principes d'optique. Et pour rassembler ici tout ce que nous avons à dire sur les micrometres, ajoutons que l'alidade DCEF (fig. 5.) à laquelle est appliquée une autre lunette, porte aussi au foyer de l'objectif un micrometre semblable, & attaché en F*f*, & qui consiste en un anneau, avec des fils qui se coupent à angles droits, & qui sont également tendus par un ressort.

Maniere de suspendre le fil à plomb.

180. La figure 2 représente la petite piece qui se place en C, pour suspendre au centre le fil à plomb. Elle est toute de cuivre,

LM est une vis qui tient au cylindre IKON, lequel entre dans l'ouverture C de la figure 1, & s'attache, si l'on veut, par derriere, au moyen de cette vis. GH est une lame circulaire avec une rainure à sa circonférence GH : on y suspend avec un fil le garde-filet, ou l'étui qui doit garantir du vent le fil à plomb. AF est une petite surface convexe, qui s'éleve un peu au-dessus de celle de la lame. Il y a au milieu un petit trou en C, dans lequel on fait entrer l'aiguille BC, laquelle passe dans le petit bras ADE, par une ouverture faite en B, vis-à-vis le point C. On commence par retirer l'aiguille du côté de B ; on en fait passer la pointe dans le nœud du fil à plomb, & on la repousse jusqu'en C.

181. L'artiste s'étoit distingué dans cette piece : le cylindre INOK étoit si bien tourné, & tellement proportionné à l'ouverture C (fig. 1.), qu'il pouvoit se mouvoir avec beaucoup de facilité autour de son axe, de la maniere la plus égale & la plus uniforme, & sans aucun mouvement de côté. Le petit trou C (fig. 2.), autour duquel le cylindre INOK fut tourné avant qu'on y eût attaché le petit bras ADE, répond si exactement à l'axe de ce cylindre, qu'après y avoir suspendu le fil à plomb, le quart-de-cercle placé dans une position verticale, on peut faire tourner toute cette petite piece, sans que le fil s'écarte tant soit peu du point auquel il répondoit sur le limbe. Cet article étoit d'une extrême conséquence, puisque le centre des cercles gravés sur le limbe est dans l'axe de l'ouverture C de la figure 1. Suite.

182. L'artiste avoit fait une seconde piece toute semblable, excepté qu'il n'y avoit point de bras, comme ADE (fig. 2.) : le trou en C étoit un peu plus large & plus profond, mais terminé pourtant en une pointe très aiguë, & répondant aussi fort exactement à l'axe de son cylindre INOK. On faisoit entrer dans ce trou une pointe du compas à verge, pendant que l'autre pointe répondoit aux cercles concentriques marqués sur le limbe de la figure 1 : cette petite piece pouvoit encore tourner sur son axe, sans que la pointe du compas s'écartât le moins du monde de l'arc de cercle auquel elle répondoit. L'alidade de la figure 5 a aussi un cylindre, qui n'est point exprimé dans cette figure, & qui est tout semblable au Autres pieces ; leur usage. Pl. III. fig. 2. 4.



cylindre INOK de la figure 2 : il n'est pas travaillé avec moins d'art que les autres, & dès qu'on l'a introduit dans l'ouverture C de la figure 1, l'alidade n'a plus qu'un mouvement circulaire autour du même axe, & répond toujours dans les mêmes points aux cercles du limbe; de sorte que le point d'où est suspendu le fil à plomb, & celui autour duquel l'alidade tourne, se trouvent précisément l'un & l'autre au centre des cercles concentriques. On peut encore s'assurer ici, comme on l'a fait pour le secteur n°. 53, que l'aiguille est exactement ronde vers sa pointe, puisqu'on peut la tourner sur son axe, sans rien changer à la position du fil à plomb.

Division du limbe en dégrés, Pl. III. fig. 3.

183. La figure 3 représente le premier dégré divisé en minutes par des transversales, & des cercles concentriques, selon l'usage. AB est le premier dégré du plus petit cercle, C*i* celui du plus grand. L'artiste, après avoir divisé fort exactement le grand cercle, s'en servit pour faire la division du plus petit : d'abord il porta le rayon du grand cercle sur sa circonférence, en commençant par le point qui répond au milieu de la largeur de la barre ACGB; ce qui lui donnoit un arc de 60°. Cet arc fut divisé en deux parties égales, & par ce moyen le quart-de-cercle se trouvoit divisé en trois arcs de 30° chacun. La division se fit ensuite en trois, en deux, & en cinq à l'ordinaire ; ce qui donnoit 90° auxquels l'ouvrier en ajouta deux de part & d'autre, avec quelques minutes, pour mettre à profit le reste de la longueur du limbe.

Division en minutes.

184. Il divisa ensuite chaque dégré en six parties, par exemple le premier dégré en C*a*, *ae*, *ef*, &c. ; & ayant appliqué l'alidade au centre, & aux points C, *a*, *e*, *f*, &c. il trouva les points A, E, F, G, &c. Ainsi la ligne CA continuée aboutit au centre : il en seroit de même des lignes *a*E, *e*F, *f*G, &c. si on les tiroit. Nous avons fait marquer à l'ordinaire les transversales A*a*, E*e*, F*f*, ainsi que les cercles 1*r*1′, 2*s*2′, 3*t*3′, &c. après avoir divisé par une méthode exacte la ligne AC en dix parties, suivant la proportion convenable. Les points 1, 2, 3, &c. se trouvent aisément par la Trigonométrie. Si l'on imagine deux lignes tirées des points A, & *a*, au centre, on aura un triangle, dont on pourra connoître tous les côtés au moyen d'une échelle.

L'angle du centre eſt de 1 minutes, étant meſuré par l'arc AE, ou C*a*, & on trouvera par le calcul l'angle en A. Pour avoir le point 1, imaginons un arc de cercle 1 *r* 1', qui rencontre A*a* en *r;* ſi de ce point *r* on tire une ligne au centre, on aura un triangle, dont le côté qui s'étend depuis A juſqu'au centre eſt donné; on a trouvé dans le premier triangle l'angle en A; l'angle du centre ſera d'une minute. On trouvera donc par le calcul le côté qui aboutit de *r* au centre, ou de 1 au centre, d'où l'on retranchera le rayon du petit cercle, ou la ligne tirée de A au centre, & le reſte donnera A 1, & par conſéquent le point 1. Pour avoir les points 2, 3 par les points *s*, *t*, il ſuffit de faire attention qu'on a déja le côté tiré de A au centre, avec l'angle en A, & que l'angle du centre eſt dans le premier cas de 2, dans le ſecond de 3 minutes, d'où l'on tirera la diſtance des points *s*, *t*, ou 2, 3 au centre; & l'on continuera la même opération juſqu'au point 9. Le P. *Maire* fit avec ſoin tout ce calcul: il tranſporta ſur le papier la ligne AC priſe ſur le limbe, & la donna toute diviſée à l'ouvrier pour lui ſervir de modele. Celui-ci en profita pour marquer les points 1, 2, 3, &c. & tirer en conſéquence les cercles concentriques aux deux premiers. Nous avons vérifié les intervalles de ces cercles, & la diviſion s'eſt trouvée très exacte.

185. Pour mener plus aiſément les tranſverſales, l'artiſte attacha à l'alidade une ſeconde regle inclinée ſur la premiere dans la direction de A*a*, qu'il appliqua ſucceſſivement aux points *e*, *f*, &c. en tirant de chaque point une tranſverſale avec la pointe d'une aiguille. Malgré ſes précautions, il n'a pu éviter de petites erreurs, ainſi que dans le reſte de la diviſion: où eſt l'artiſte qui puiſſe ſe flatter de les éviter toutes? Mais elles ſe ſont réduites à très peu de choſe, comme on le verra lorſque je parlerai d'une nouvelle méthode; je dis nouvelle au moins pour moi, dont nous nous ſommes ſervis pour l'examen des diviſions, au moyen d'un inſtrument que j'ai imaginé & fait conſtruire à cet effet, & dont je donnerai une deſcription détaillée. *Méthode pour trouver les tranſverſales.*

186. La figure 4 repréſente le méchaniſme par lequel on fait tourner le quart-de-cercle, & la maniere dont il tient au

Machine pour incliner le quart-de-cercle à volonté.
Pl. III. fig. 4.

pied. COVP eſt une piece de cuivre aſſez épaiſſe; il y a dans ſa partie inférieure COV un anneau ſurmonté d'une platine, ou plaque circulaire, à laquelle eſt attaché un long cylindre, qui entre dans le pied PX. On fait entrer de force le pied dans l'anneau, auquel on l'attache encore avec trois vis, dont deux ſe voient dans la figure de part & d'autre du point O. Sur la plaque inférieure il y en a une autre P, qui n'eſt pas moins ſolide, & qui a en T, & en VS, une eſpece de gouttiere, pour recevoir le cylindre TD, qu'on y attache en T, V, S par des reſſorts d'acier qui l'entourent, & qui ſont ſerrés par les vis *t*, *u*, *s* au point qu'il faut faire quelque effort pour tourner le cylindre ſur ſon axe. Le cylindre eſt attaché par ſon extrémité T à une piece de cuivre très forte, armée de trois dents à égales diſtances, qui s'engrainent dans autant d'échancrures pratiquées dans une autre piece de cuivre B, également ſolide, & attachée à la barre EGHF (la même que EGHF dans la figure 1), avec huit vis, dont on en voit quatre à droite & à gauche du point B; les quatre autres ſont cachées derriere la lettre T. Les dents ſont traverſées par un axe qui attache ſolidement le cylindre TD au quart-de-cercle, & lui donne la facilité de tourner autour de l'axe TD.

Donner au quart-de-cercle une poſition ſtable: faciliter ſes mouvemens.

187. G*ge*E, H*hf*F ſont les deux barres poſées de champ ſur celle du milieu GHFE de la figure 1, pour la garantir de toute flexion. Elles ſont liées d'eſpace en eſpace par d'autres petites barres attachées par pluſieurs vis A, A à la barre du milieu. Enfin KLM eſt un arc de fer, qui ſe meut à charniere autour du point K. La petite barre K eſt fixée avec deux vis contre la barre GEFH. L'arc KLM paſſe dans une ouverture ſituée à l'extrémité du cylindre. Il y a en I, d'un côté de cette ouverture, une vis qui preſſe l'arc LM, de maniere à le retenir & à le fixer où l'on veut. De l'autre côté il y a auſſi une vis *i*, pour y retenir l'arc, & l'empêcher de ſortir de l'ouverture, lorſqu'on deſſerre la vis I pour élever plus ou moins le quart-de-cercle.

Suite.

188. On voit par-là que le quart-de-cercle peut librement ſe mouvoir de trois façons; premierement, autour de l'axe vertical qui eſt au-deſſous de P; en ſecond lieu, autour de l'axe horizontal TD; enfin autour de l'axe qui eſt en B. Par

ce triple mouvement, il est aisé de lui donner telle position qu'on veut; & on la lui conserve avec la même facilité.

Instrument de vérification. Pl. III, fig. 5.

189. La figure 5 représente le quart-de-cercle avec les deux lunettes, l'une fixe, savoir LCN, l'autre mobile & appliquée sur l'alidade, savoir DEF*f*. La lunette est brisée en F*f*, à l'endroit où commence la division du limbe, & où se trouve le micrometre. On a attaché deux pieces à l'alidade; la premiere est GMABHE *ehbam*G; elle est de fer, & elle suit en grande partie le contour du limbe, savoir de A en M, & de B en H, de même de *a* en *m*, & de *b* en *h*, & même au-delà de ces termes; elle laisse voir les divisions du limbe, & s'étend depuis A jusqu'en *a* à plus de 45°. Cette espece de grillage est attaché à l'alidade avec quatre vis, deux desquelles sont entre E & *f*, & les deux autres entre *e* & F; mais on peut l'ôter en lâchant les vis, pour laisser l'alidade & la lunette libres. La seconde piece est dans l'intervalle I*i* du côté G; elle est également attachée avec quatre vis à l'alidade, & elle se voit en grand dans les figures 7 & 8.

De l'alidade & de sa petite fenêtre. Fig. 5.

190. On peut encore l'ôter pour laisser l'alidade libre entre F*f* & I*i*, jusqu'à l'extrémité du limbe. L'alidade a en cet endroit une fenêtre avec un verre très poli, au milieu duquel est marquée une ligne qui est dirigée au centre du quart-de-cercle. Cette fenêtre est couverte par le petit tuyau de l'oculaire: pour éviter la confusion, on n'a point représenté ici ce petit tuyau; mais il est sur la même ligne que le reste du tube DF, auquel il est attaché avec une charniere en F*f*, de sorte qu'on peut le lever & le replier sur le reste du tuyau entre F*f* & E*e*, ainsi qu'on le voit dans la figure 6, dans laquelle EF*fe* est le même tuyau que dans la figure 5: IK, HL sont les deux fils qui se coupent à angles droits; ils sont contenus dans un anneau recouvert d'une plaque mince, fixée au moyen des vis D, D, D, D au rebord BGMF du tuyau. G est une des vis avec lesquelles on arrête l'anneau dans une juste position, avant que de serrer les vis D. AB est la charniere autour de laquelle tourne le tuyau F'M'*f'*O, qui renferme en N*n* l'oculaire, & qui a en O l'ouverture où l'on applique l'œil pour observer; mais il faut auparavant faire tourner le tuyau F*f'*O sur la charniere AB, jusqu'à ce qu'il

vienne exactement s'appliquer contre l'autre tuyau, & que leur axe soit le même. L'observation finie, lorsqu'il n'est plus question que de regarder par la petite fenêtre de l'alidade, pour voir le nombre de dégrés, de minutes & de secondes désignées par la ligne du verre, entre F*f* & I*i* (fig. 5.), on leve le tuyau de l'oculaire, & on le tourne jusqu'à ce qu'il soit dans la position de la figure 6, pour laisser la fenêtre libre.

Machine pour faire mouvoir l'alidade. Pl. III. fig. 5. 7. 8.

191. Il faut maintenant décrire le vérificateur qui est entre I*i* & G, & qui se voit à peine dans la figure 5, mais qui est représenté en grand dans les figures 7 & 8, sans quoi il seroit difficile de se faire entendre. Dans la figure 7, A*ab*B est la face antérieure du limbe; BC, *bc*, *ah'* son épaisseur, qui est encore exprimée dans la figure 8 en BC, *bc*, *ah'*, avec la face postérieure C*ch'*H' du limbe. Les objets sont représentés dans l'une & l'autre figure, tels qu'ils paroîtroient à une distance infinie, & vus un peu obliquement. La projection de l'instrument est exprimée par des paralleles, comme dans les figures précédentes; mais on y a fait ici quelques légers changemens, qu'on a jugé nécessaires, pour faire connoître plus distinctement chaque partie du vérificateur.

Ses différentes pieces.

192. Les plaques TY, *ty*, sont courbées en équerre, & assemblées par une plaque de fer, qui se voit dans la figure 8 en I'L'*l'i*: on les fait tenir à l'endroit du limbe qu'on juge à propos, avec deux vis M', *m'*, qui le pressent par derriere; & l'on a couvert d'une peau leurs parties T, *t* dans toute leur largeur, de peur qu'en les serrant on ne gâtât la face antérieure du limbe. A la plaque *ty* est attaché, dans les deux figures un cercle, dans lequel on fait passer la vis *u*V, que l'on fait tourner par le moyen de sa tête Z*u*, & dont l'index *ux* marque sur la circonférence de ce cercle le nombre de parties de chaque tour de la vis. Cette vis traverse un parallélipipede de cuivre, dans lequel est un écrou, dont les filets sont exactement égaux à ceux de la vis; elle passe ensuite dans l'ouverture V d'un petit bras attaché à l'autre plaque T, puis au travers de l'anneau D, où elle est arrêtée par la vis E, de sorte que sa partie *u*V se trouve toujours entre ses deux supports V & *u*. Ce parallélipipede a deux cylindres

P, *p*

P, *p* (fig. 8.), qu'on insere dans les ouvertures de deux lames (fig. 7.), dont l'une est placée sur le devant, savoir MNOP *omn*, l'autre par derriere, où elle s'éleve jusqu'à la hauteur de L, *l*; on en voit encore un bord sur la droite en *lqrs*; mais pour exprimer dans la figure la partie *lq*, il a fallu la transporter sur l'alidade QF*fq*, qui porte la lunette mobile, & la fenêtre ED*de*, dont le verre est marqué dans son milieu d'une ligne GH: cette lame est pliée en équerre en *q*; & après avoir parcouru l'épaisseur du limbe, elle est pliée encore en équerre en *r*, mais en sens contraire, afin que le plan *rs* soit parallele au plan *mno*P, à l'alidade & au limbe, & qu'on puisse renfermer le parallélipipede entre ces deux plans paralleles, & l'y arrêter en faisant entrer de part & d'autre dans leurs ouvertures les cylindres P, *p* de la figure 8.

193. Les lames sont attachées l'une à l'autre par les vis M, *m*; celle de derriere est serrée contre l'alidade par les vis L, *l*; & elles y sont serrées toutes les deux par les vis N, *n*. D'où il arrive que si après avoir serré les vis M', *m'* de la figure 8, on tourne la vis *u*V, on fera avancer le long du limbe l'alidade FQ*qf* (fig. 7.), avec la fenêtre DE*ed*, & la ligne GH qui parcourra les divisions, tandis que l'index *ux* marquera le nombre de parties du micrometre, dont on peut compter les révolutions entieres par le nombre de fois que l'index arrive au commencement de la division. Mais pour que la vis *u*V puisse tourner, elle doit être bien droite, & le point P doit avoir un mouvement circulaire autour du centre du quart-de-cercle; d'où il suit qu'on ne peut faire servir cet instrument que pour un arc si petit, qu'il puisse être pris pour une ligne droite, tel que l'arc d'un dégré, dont la courbure, prise de part & d'autre de son point de milieu, n'éloigne pas sensiblement le point C du centre du quart-de-cercle, ou du limbe; car il ne s'en éloigne que du sinus verse de 30', qui n'est pas $\frac{4}{100000}$ du rayon. Suite.

194. Cette différence est absolument insensible; mais comme la ligne tirée du point P au centre du quart-de-cercle, change continuellement de direction, il est nécessaire, pour que le parallélipipede A'*a'* puisse changer de position par rapport à cette ligne, qu'il ne soit pas attaché immédiatement à

Mouvement de l'alidade égal à celui de l'index.



l'alidade; mais qu'au moyen des cylindres P, p de la figure 8, il soit tellement enchaſſé dans les lames de la figure 7, qu'il puiſſe tourner dans leurs ouvertures. De plus, afin que le mouvement du parallélipipede, de ſon cylindre P, de l'alidade & de la ligne du verre, répondît également au mouvement de l'index, il a fallu pourvoir à ce que les pas de la vis fuſſent bien égaux, que ſon axe *u* V fût exactement perpendiculaire au plan du cercle, que ce plan fût lui-même bien uni, & qu'il joignît bien contre la tête de la vis en *u*, de même que la vis fût arrêtée en V par des plans également perpendiculaires à ſon axe, & joignant auſſi bien entre eux. Enfin la diſtance *u*V des ouvertures, où paſſe la vis, doit être tellement proportionnée à ſa longueur, que ni la vis, ni le parallélipipede, ni l'alidade ne puiſſent avoir d'autre mouvement que celui qu'on leur communique en tournant la vis ſur ſon axe. Pour en venir à bout, notre artiſte a eu beſoin de recourir à un anneau plat D', qu'il a mis derriere l'ouverture V du bras TV, après l'avoir bien poli du côté de V; & il l'y a appliqué en faiſant avancer de force la vis FE dans ſon écrou E, autant que l'élaſticité du métal le pouvoit permettre: enſuite à force de tourner la vis, il a produit deux effets par le frottement; le premier, de polir encore davantage les faces qui touchent en D' & *u*, le ſecond, de les rendre exactement perpendiculaires à l'axe de la vis; d'où il ſuit que le mouvement de l'alidade répond parfaitement à celui de la vis.

Uſage des vis du vérificateur.

195. Il ſuffit de lâcher les vis M', *m* de la figure 8, pour pouvoir faire tourner toute cette machine, avec l'alidade & la lunette autour du quart-de-cercle: on l'attache enſuite avec les mêmes vis contre le limbe, & à l'endroit qu'on veut. Si avant que de l'attacher on venoit à tourner la vis, ce ne ſeroit plus l'alidade qu'on feroit mouvoir, mais cette machine même. En effet, l'une des plaques T, *t* s'approcheroit alors de l'alidade, & l'autre s'en éloigneroit d'autant. Mais ſi on lâche de plus les vis L, *l*, N, *n*, toute la machine ſe détache du limbe & de l'alidade, laquelle peut tourner enſuite librement avec ſa lunette, comme dans les quarts-de-cercles ordinaires.

196. Ce n'eſt que depuis mon retour à *Rome*, que j'ai fait

ajouter au quart-de-cercle les deux machines dont je viens de donner la description, savoir celle des figures 7 & 8, avec le grillage représenté dans la figure 5, n'ayant pu trouver ni à *Rimini*, ni ailleurs un ouvrier assez habile pour venir à bout de la premiere.

De sa construction.

197. Il est à présent question de la disposition des parties de l'instrument, de sa rectification, & de l'usage qu'on y peut faire des deux dernieres machines; après quoi nous en viendrons à l'usage du quart-de-cercle, & aux observations auxquelles il a servi. Pour commencer par les lunettes, on doit autant qu'il se peut les rendre paralleles au plan de l'instrument. Nous en avons assez dit sur ce parallélisme dans le chapitre précédent, en parlant de la lunette du secteur; & les moyens de le procurer sont connus des Astronomes. Notre artiste n'y avoit point mal réussi; nous verrons de plus que dans les observations faites avec ce quart-de-cercle, la déviation de la lunette, à moins qu'elle ne fût bien considérable, ne peut y produire une erreur sensible. Or pour la rendre plus aisément parallele, il ne nous a pas peu servi d'avoir rendu mobiles les fils du micrometre, en les insérant dans un anneau qui, avant que d'être serré par les vis, peut se mouvoir de côté en tout sens, jusqu'à ce que la ligne qui passe par le point de l'axe de l'objectif, & par le centre des fils, se trouve dans une position convenable.

Parallélisme des lunettes au plan de l'instrument.

198. A l'égard des fils, on verra s'ils se coupent à angles droits dans les trois micrometres, dont les deux premiers sont dans la lunette fixe, & le troisieme dans la lunette mobile, & si les autres fils de l'un des premiers micrometres font avec les précédens des angles de 45°, on pourra, dis-je, s'en convaincre par la méthode que nous avons proposée en parlant du micrometre du secteur, & qui se réduit à comparer ces fils avec des lignes tracées sur le papier, avec les mêmes angles; & l'on huilera le papier, s'il en est besoin. Or pour mesurer les angles & prendre les hauteurs, l'un de ces fils doit être parallele, l'autre perpendiculaire au plan du quart-de-cercle; & c'est ce qu'on pourra vérifier dans la lunette fixe, en plaçant le quart-de-cercle dans une situation verticale, que l'on connoîtra en faisant raser le limbe par le fil à plomb, &

Des fils du micrometre.

examinant enſuite ſi l'un des fils répond à un autre fil à plomb, qui pendra librement. Nous l'avons ſouvent vérifié dans cette lunette au rivage de la mer : nous placions le quart-de-cercle dans un plan vertical ; nous pointions enſuite la lunette ſur l'horizon de la mer, & nous examinions ſi le fil qui doit être perpendiculaire au plan de l'inſtrument répondoit dans tous ſes points à cet horizon. Quant au micrometre de l'alidade, qui ne peut s'appliquer au quart-de-cercle avec le fil à plomb, nous placions le limbe horizontalement, en y appliquant le niveau, & nous examinions ſi l'un des fils du micrometre répondoit à un fil à plomb ſuſpendu devant lui.

Même ſujet.

199. La meilleure maniere de diſpoſer les fils des micrometres de la lunette fixe, eſt de faire enſorte que les deux lignes, qui de part & d'autre paſſent par le point de l'axe de l'objectif & le centre des fils, ce que nous appellerons encore ici l'*axe de la lunette*, ſoient paralleles au dernier rayon du quart-de-cercle, c'eſt-à-dire à celui qui aboutit à la fin du 90me dégré ; & pour ce qui eſt de la lunette mobile, le meilleur eſt encore de rendre ſon axe parallele au même rayon, après avoir mis la ligne du verre de l'alidade à la fin du 90me. dégré ; c'eſt-à-dire en rendant cet axe parallele à cette ligne, qui doit elle-même être exactement dirigée au centre du quart-de-cercle.

De la ligne du verre. Pl.III. fig. 2. 3.

200. Pour connoître ſi elle a cette direction, & la lui donner ſi elle ne l'a pas, il ſuffit d'amener l'alidade au commencement de la diviſion, & de mettre la ligne du verre ſur la ligne AC (fig. 3.) tirée du centre ſur le limbe, & au commencement même de la diviſion. Or on verra ſi cette ligne eſt dirigée au centre, en ôtant l'alidade, & mettant à ſa place la petite piece du centre (fig. 2.), qui porte le fil à plomb : en effet, ſi le fil tendu de la pointe de l'aiguille au point C, paſſe par A, ce ſera une preuve que la ligne AC ſe dirige au centre : l'artiſte ne nous avoit rien laiſſé à deſirer ſur ce point. Ayant enſuite appliqué l'alidade, il faudra diſpoſer ſon verre dans la fenêtre, de maniere que ſa ligne réponde exactement à la ligne CA ; & c'eſt pour cela que la fenêtre doit être un peu plus grande que le verre, lequel doit être coupé obliquement ſur les bords, pour pouvoir, lorſqu'il eſt ajuſté dans la fenêtre, toucher le limbe. Dès que la ligne du verre répon-

dra à celle du limbe, on se servira de cire, ou de gomme, pour coller le verre sur l'alidade.

201. On peut avoir plusieurs méthodes, soit pour examiner si les axes des lunettes sont dans la direction que nous avons dit être la meilleure, soit pour la leur donner; mais elles sont si incommodes, que le plus court est de corriger dans les observations les erreurs occasionnées par la déviation de l'axe; & c'est ce que nous avons fait de la maniere que nous dirons plus bas, lorsque nous parlerons de l'usage du quart-de cercle, soit pour déterminer les angles formés par des lignes qui se dirigent à deux objets différens, soit pour connoître de combien un lieu est élevé, ou abaissé au-dessous de l'horizon. De la déviation de l'axe.

202. Nous avons vu plus haut comment on peut s'assurer que le centre autour duquel tourne l'alidade, & celui d'où est suspendu le fil à plomb, sont les mêmes que celui des cercles gravés sur le limbe. Tout cela se trouvoit dans notre quart-de-cercle, comme nous l'avons dit; d'où il suit que les cercles AEB, 1 *r* 1', &c. du limbe, sont exactement tracés. Nous avons vu encore la maniere de placer ces cercles à une juste distance les uns des autres, & d'examiner s'ils y sont. Il y a plus d'ouvrage à vérifier les autres divisions, dans lesquelles les meilleurs artistes ne peuvent se répondre d'éviter des erreurs de quelques secondes. Or il ne suffit pas de savoir en général qu'il y a quelque erreur, mais il faut voir à quoi elle se monte dans chaque division, du moins celles qui ont servi: c'est ce qu'on appelle vérifier les divisions du limbe, opération pour laquelle on a inventé plusieurs méthodes: elle ne m'a pas peu donné de peine, jusqu'à ce qu'enfin j'ai imaginé l'instrument de la figure 5, au moyen duquel elle se fait avec une entiere précision. De la vérification.

203. Pour mieux entendre ceci, il est à propos de donner un exemple de la maniere dont on détermine les angles avec l'alidade. Soit la lunette LN (fig. 5.) dirigée à un point quelconque, la lunette GCD à un autre objet, après qu'on l'aura debarrassée de tout l'appareil AB*ba*, & C le point d'intersection des axes de ces lunettes. Si les axes sont bien disposés, l'arc compris entre le dernier point de la division vers KI, & la ligne du verre, qui est entre FI & *fi*, mesurera Prendre les angles. Pl. III. fig. 5.

l'angle GCL, & par conséquent l'angle NCD qui lui est opposé au sommet. Pour lors il suffit d'examiner le nombre de dégrés qui se trouvent depuis le commencement AB de la division, jusqu'à la ligne du verre, & de le retrancher de 90°, pour avoir l'angle cherché.

Corriger le défaut du parallélisme.

204. Mais si les axes ne sont pas exactement disposés, de sorte par exemple que la ligne du verre répondant à la fin du 90me. dégré, l'un des axes s'écarte un peu du rayon qui passe par ce point; on se contentera d'avancer une fois pour toutes la lunette mobile, jusqu'au point où elle représentera au centre des fils le même objet que la lunette fixe, & d'examiner de combien il s'en faut que la ligne du verre ne réponde précisément à la fin du 90me. dégré. Cela fait, on ajoutera, ou l'on retranchera de l'angle observé cette différence, suivant que la ligne du verre se sera trouvée au-delà, ou en-deçà de ce terme.

La lunette mobile y peut suffire.

205. Si de plus la lunette fixe LN n'étoit pas parallele au plan de l'instrument, tout au contraire de la lunette mobile, auquel cas elles ne pourroient représenter ensemble le même objet au centre des fils, il suffira de disposer le quart-de-cercle ensorte que son plan passe par l'un & l'autre objet; de pointer ensuite la lunette mobile sur le premier, puis sur le second, le quart-de-cercle restant toujours dans la même position, & de prendre la différence des arcs désignés par la ligne du verre dans cette double position de la lunette mobile. Pour juger si le quart-de-cercle a été immobile, on verra si dans la lunette fixe LN on apperçoit toujours le même point d'un autre objet quelconque au centre des fils; car quoique le quart-de-cercle puisse absolument se mouvoir sans que l'axe de la lunette fixe change pour cela de place, il est cependant infiniment plus probable que l'un n'aura pas remué sans l'autre. Mais nous avions rendu les lunettes paralleles au plan de l'instrument; ainsi elles représentoient ensemble le même point de l'objet au centre des fils.

Point du limbe désigné par l'alidade.
Pl. III. fig. 3.

206. Dans tous ces cas on doit toujours examiner le nombre de dégrés, minutes & secondes, désignés par la ligne du verre; & l'on pourra s'y prendre de la maniere qui suit: soit A (fig. 3.) le commencement, & B la fin d'un dégré quel-

conque; si cette ligne passe par A ou B, on aura exactement le nombre de dégrés; si elle passe par F, comme KL, ou par G comme K″L″, on ajoutera au nombre de dégrés qu'on compte jusqu'en A, dans le premier cas, 20, dans le second, 30 minutes. Ces lignes passeront aussi par les points *e*, *f*, si les transversales sont bien tirées, & que le premier & le dernier cercles soient exactement divisés. Si elle passe entre F & G, par exemple en *x x*, comme K′L′, il faudra ajouter à 20′ le nombre de minutes & de secondes qui se comptent sur l'arc F *x*, & qu'on trouvera par les transversales. Car si elle passe par le point d'intersection de la transversale avec l'un des cercles intermédiaires, comme avec le quatrieme en Q, ou le cinquieme en R, on aura exactement le nombre de minutes qui doivent être ajoutées aux 20 premieres, savoir 4 minutes dans le premier cas, & 5 dans le second.

207. Si la ligne passe entre deux de ces points, par exemple en S, entre Q & R, on aura le nombre de secondes, qu'on doit ajouter aux minutes, par cette analogie: QR est à QS, comme 60 au nombre cherché. Cette proportion ne se voit que difficilement sur la ligne QR; mais si K′L′ rencontre le cercle supérieur en T, l'inférieur en V, & qu'on regarde avec une lentille d'une assez grande convexité les lignes QT, VR, on en découvrira aisément le rapport; & divisant le nombre 60 dans la même raison, on aura le nombre de secondes qui répond à l'arc QT. Cet arc sera par exemple de 30″, si QT est égal à VR, & de 40″, s'il en est le double. Or il y a si loin de l'égalité à la raison double, qu'on peut aisément appercevoir à la vue simple plusieurs rapports intermédiaires; & comme cette différence répond à 10″, il est clair qu'on peut connoître le nombre de secondes qui doit s'ajouter aux minutes, à peu de secondes près.

Connoître par estime le nombre des secondes.

208. Au lieu de cette méthode, on peut se servir du micrometre commun, comme je l'expliquerai plus bas; mais si l'on veut une précision entiere, on n'a qu'à appliquer le micrometre de la figure 7, & tourner la vis jusqu'à ce que la ligne du verre passe par le point Q, puis par le point R: on marquera les nombres désignés par l'index, dans les trois positions Q, S, R, & on fera cette proportion: l'intervalle de

Moyen plus exact.

la premiere à la troisieme est à l'intervalle de la premiere à la seconde, comme 60 est au nombre cherché : plus brievement encore, dès qu'on connoîtra le nombre des parties du micrometre contenu dans une minute, & qu'on aura dressé une table où on les aura réduits en secondes, selon l'usage, il suffira des deux premieres positions pour avoir le nombre de secondes de l'arc QT. Notre micrometre commun s'étoit dérangé, comme je l'ai dit; & nous n'avions personne pour le raccommoder, ni pour en faire un autre que j'avois imaginé : nous n'avons trouvé qu'à *Rome* un homme également capable & de rétablir l'ancien, & d'exécuter le nouveau.

Son application aux secondes. Pl. III. fig. 3.

209. Ainsi nous avons été obligés, pendant tout le voyage, de nous servir de la méthode du n°. 207. A la fin de chaque observation nous examinions séparément le rapport entre QT & VR, ou si le point S étoit trop près de l'un des points Q, R, entre les arcs des cercles qui sont immédiatement au-dessus & au-dessous de ce même point; nous tirions de ce rapport le nombre de secondes, nous comparions nos résultats, & nous trouvions qu'ils s'accordoient ordinairement à deux ou trois secondes près; rarement la différence est allée jusqu'à 5″, & jamais au-delà. Lorsque nous nous rencontrions d'assez près, nous prenions un milieu entre les observations: pour peu que la différence ne fût pas à négliger, nous examinions de nouveau avec la lentille, une seconde & une troisieme fois; ainsi il ne s'est pu glisser de ce côté-là que de très petites erreurs dans nos observations.

Méthode plus courte.

210. Nous nous sommes affranchis de la nécessité de revenir deux fois à cet examen, en employant une méthode qui rend la rectification du quart-de-cercle incomparablement plus facile & plus sûre. Nous examinions d'abord l'angle que formoient à peu près les axes des lunettes dirigées l'une sur un objet, l'autre sur un autre; nous faisions ensuite mouvoir l'alidade jusqu'à ce que la ligne du verre passât par le commencement du dégré le plus voisin. Cela fait, nous faisions mouvoir tout le quart-de-cercle, jusqu'à ce que le même objet reparût au centre des fils de la lunette mobile, puis le fil mobile de la lunette fixe, jusqu'à ce que l'autre objet parût au point d'intersection de ce fil avec le fil fixe auquel il est perpendiculaire,

diculaire. Du reste, afin que le fil mobile fût perpendiculaire au plan de l'instrument, nous tournions à l'ordinaire le micrometre au commencement de chaque observation, & nous avions sous les yeux un signe permanent pour pouvoir toujours reconnoître cette position. Après cela nous amenions la lunette mobile sur cet autre objet, jusqu'à ce qu'il parût au centre de ses fils, sans sortir du point d'intersection que nous avons dit; & nous remarquions sur l'arc du dernier, ou du pénultieme dégré l'endroit désigné par la ligne du verre: enfin nous marquions pour le premier objet le nombre entier de dégrés, & le nombre des dégrés, minutes & secondes pour le second.

211. On voit à quel point cela doit abréger la rectification du quart-de-cercle; en effet, il suffit alors de rectifier les 90me. & 91me. dégrés, avec le commencement & la fin des autres. Seulement pour connoître de combien un objet étoit élevé ou abaissé au-dessous de l'horizon, nous avons encore eu besoin de rectifier deux dégrés entiers, pris de part & d'autre du premier point de la division. Mais au lieu du commencement du dégré voisin, dont je n'ai parlé (n°. 210) que pour me rendre plus intelligible, & ne point trop embarrasser mon explication, nous avons pris, tant dans les observations que dans la rectification de l'instrument, le point qui termine la premiere minute de ce dégré; parceque nous avons vu par expérience, que dès qu'on emploie des transversales, il est bien plus aisé de remarquer le passage d'une ligne droite, comme du fil à plomb, ou de la ligne du verre, par le point d'intersection de deux lignes telles que A*ra*, 1*r*1′, qui est en *r*, que par le point de concours des lignes A*a*, AB, qui est en A; outre que nos transversales sont sans comparaison plus nettes & plus égales dans tous leurs points intermédiaires, qu'à leurs extrémités, où elles rencontrent le plus grand & le plus petit cercle. Ainsi nous marquions toujours pour le premier objet, un certain nombre de dégrés, avec une minute. Faciliter la vérification.

212. Je me suis un peu étendu sur cet article, pour faire connoître les moyens que nous avons jugé les plus propres à assurer le succès de nos opérations, & pour n'avoir pas Utilité de ces explications.

besoin d'y revenir dans la suite. Quelques esprits dédaigneux traiteront ceci de minuties; mais ceux qui s'exercent dans la pratique de l'Astronomie le regarderont, comme je l'espere, avec d'autres yeux, & me sauront peut-être gré de mes remarques: il seroit même fort à desirer en général que les Astronomes voulussent bien faire part au public des moyens qu'ils ont employés pour observer avec plus de précision. Pour revenir, ceci nous conduit naturellement à la rectification du quart-de-cercle.

Moyen de vérifier exactement.

213. Car ces choses étant supposées, voici la méthode la plus sûre & la plus exacte de procéder à l'examen des divisions. Dans une plaine découverte, & également de niveau, on mesure avec des perches en forme de regles, semblables à celles qu'on emploie pour la mesure des bases, ainsi que je l'ai exposé dans le premier Livre, & que je l'exposerai de nouveau dans le Chapitre quatrieme de celui-ci; on mesure, dis-je, une distance considérable, par exemple de 1000 toises: on place le centre du quart-de-cercle à l'une des extrémités, & on tire par l'autre une ligne perpendiculaire, dans laquelle on met les perches, & dans une position horizontale. Il seroit nécessaire que les perches ou regles fussent exactement d'un certain nombre de toises, comme par exemple de trois toises chacune; & que sur leurs côtés verticaux, chaque toise se trouvât divisée d'abord en dix, puis en cent parties, par des lignes numérotées: les trois premieres perches feroient déja $\frac{900}{100000}$ de la distance. Ces perches étant placées, & les lunettes disposées de telle sorte que leurs fils verticaux répondent au commencement de la premiere perche, & la ligne du verre au premier point de la division, on retiendra la lunette fixe dans cette position, & on fera mouvoir l'alidade de sorte que la ligne du verre marque successivement une, deux, trois minutes, & ainsi de suite. Ces trois premieres perches donneront déja les tangentes des petits arcs du quart-de-cercle, jusqu'à la moitié du premier dégré. On transportera la premiere perche au-delà de la troisieme, dès qu'on aura fini de s'en servir (ce que l'observateur pourroit indiquer de la main, ou avec un mouchoir blanc, à ceux qui président aux perches); & continuant sur le même pied, on pourra aller de suite

jusqu'à 1000 toises, c'est-à-dire jusqu'à la fin du 45e dégré, au-delà duquel les tangentes augmentent considérablement. Ainsi on pourroit vérifier en même tems, & de la même maniere, l'autre moitié du quart-de-cercle, & par-là on auroit immédiatement tous les arcs au-dessous de 45 dégrés, & ceux qui sont au-dessus, par l'addition de deux arcs, dont on a la valeur immédiate, sans courir le risque d'accumuler les erreurs.

214. On pourroit aisément par cette méthode éviter l'erreur d'une seconde ; car avec une lunette de deux ou trois pieds, on distingue parfaitement, à mille toises de distance, la centieme partie d'une toise, qui est un peu moindre qu'un pouce, & même la deux centieme. Or la centieme d'une toise n'entraîneroit au commencement qu'une erreur d'environ deux secondes, & à la fin que d'une seconde, comme on peut s'en convaincre par l'inspection des tables des sinus. Précision de la méthode.

215. Mais cette méthode même demande bien du travail, & nous n'avons jamais vu de plaine où l'on pût l'employer. Nous pouvions y suppléer en comparant entre elles les divisions du quart-de-cercle, & le quart-de-cercle lui-même avec les quatre parties de l'horizon. Car si on compare entre elles les deux moitiés, ou plutôt les trois tiers du quart-de-cercle, c'est-à-dire des arcs de 30 d., puis les tiers de ceux-ci, ou les arcs de 10 d., puis de 5 d., enfin de 1 d., en divisant d'abord 90 d., suivant le rapport trouvé dans les trois tiers, puis chaque tiers suivant celui qu'on a trouvé dans les arcs de 10 d., & ainsi de suite, par la méthode proposée pour le secteur, n°. 85 ; après quatre opérations, on a tous les arcs de dégrés entiers ; & dans les trois premieres on ne peut commettre qu'une erreur simple dans chaque partie de la division ; dans la quatrieme qu'une erreur double. On peut de la même maniere comparer les minutes de dix en dix, & d'une à une ; mais si l'on trouve que les transversales soient bien tirées, on pourra se dispenser de les comparer une à une ; car en comparant les dix minutes du plus grand cercle avec celles du plus petit, on verra aisément la correction qu'il y a à faire aux minutes intermédiaires. Par-là tous les arcs se trouveront corrigés, dans la supposition que l'instrument soit exactement Autres méthodes de vérification.

la quatrieme partie du cercle; & si l'on y découvre quelque différence, on la répartira sur le quart-de-cercle par cette analogie: comme un arc de 90° est à un autre arc quelconque; ainsi cette différence est à un quatrieme terme, qui sera cette partie même de la différence qu'il faudra assigner à cet arc. De cette sorte tout l'instrument sera exactement corrigé.

Même sujet. 216. Pour comparer entre elles les parties du quart-de-cercle, on place d'abord la ligne du verre au commencement de la division, puis à la fin de l'arc à comparer, par exemple de 45°, en remarquant les objets qui paroissent dans cette double position au centre des fils: on tourne ensuite l'instrument sur son centre, jusqu'à ce que le premier objet reparoisse au centre des fils; on pointe sur le second, & on examine de combien la ligne du verre est éloignée de la fin du second arc, comme ici de la fin du 90me. dégré; cette différence est celle des arcs, & c'est la même méthode pour les autres.

Erreurs qu'on y peut craindre. 217. Nous nous sommes servis de cette méthode premierement à *Rome*, dès qu'on nous eut remis notre quart-de-cercle, puis à *Rimini*; mais plusieurs difficultés contribuerent à nous en dégoûter. Car en premier lieu nous trouvions rarement au centre des fils des objets assez distincts; de plus, la largeur des fils dans l'une & l'autre lunette, quelque déliés qu'ils fussent, & plusieurs autres inconvéniens qu'on éprouve en observant avec ces instrumens, produisoient infailliblement dans chaque observation une erreur de quelques secondes; erreur qu'on ne pouvoit estimer au juste, surtout à cause du dérangement que notre micrometre avoit souffert, comme je l'ai dit n°. 176.

Méthode où l'on emploie le secteur. 218. Ayant donc renoncé à nous servir de cette méthode, je fus d'avis qu'on essayât de confronter les divisions du quart-de cercle avec celles de la lame mobile du secteur, dont nous avons vu une description détaillée au Chapitre précédent. Pour cela nous mettions le secteur & le quart-de-cercle dans une position horizontale, & dans le même plan, de sorte que le milieu de l'arc à comparer répondît exactement au rayon du secteur; & nous prenions avec le compas la distance de ce point de milieu à la ligne du milieu de la lame mobile. Malgré la petite difficulté qu'il y a à disposer ainsi les choses, nous

nous en tirions heureusement à l'aide d'un fil fort délié, & tendu de l'aiguille du quart-de-cercle au centre du secteur.

219. Cela fait, nous faisions passer le fil toujours tendu qui partoit de l'aiguille du quart-de-cercle, par le premier point d'un arc quelconque de 15 dégrés, & nous avancions la lame mobile jusqu'à ce que le fil répondît à quelqu'une de ses divisions, ce qui nous faisoit juger de sa distance au milieu du limbe du secteur. On répétoit la même opération, en faisant passer le fil à la fin du premier, puis du second dégré, & ainsi de suite, jusqu'au quinzieme, la lame mobile ayant pour cela une étendue suffisante. On comparoit ensuite de la même façon les autres arcs de 15°, en prenant toujours la précaution de placer le quart-de-cercle à la même distance de la ligne du milieu. **Suite.**

220. Cette méthode est assez exacte, surtout lorsqu'on applique la loupe; nous l'essayâmes plusieurs jours à *Rimini*, & elle nous eût réussi, si nous eussions eu une connoissance suffisante des divisions de la lame mobile, & si nous eussions pu trouver un endroit propre à notre dessein. Il n'y en avoit aucun dans tout le college de *Rimini*. Ici les chambres étoient embarrassées par les décombres d'un bâtiment neuf; là elles étoient trop obscures; plus souvent encore le plancher ne portoit que sur des poutres, au lieu d'être solidement appuyé sur une voute: ainsi nous trouvâmes des obstacles de tout côté. Les poutres en particulier étoient si foibles, que le moindre mouvement du corps s'y faisoit sentir, & qu'il suffisoit de se baisser à dessein de mieux voir les divisions, pour causer dans le pavé un trémoussement qui ne laissoit pas de déranger un peu la position du quart-de-cercle par rapport au secteur, & troubloit toute l'opération. De plus, nous ne connoissions point assez le rapport des divisions de la lame mobile, & nous avions fort à craindre d'ajouter de nouvelles erreurs à celles qu'on pourroit découvrir dans la vérification de la lame. Toutes ces raisons nous obligerent enfin de renoncer à la méthode. **Tentatives inutiles.**

221. Je ne dis rien de plusieurs autres tentatives; mais avant que d'en venir à celle qui à la fin nous a réussi, je crois devoir observer que le compas formé de deux verres, l'un **Nouvel instrument de vérification.**

fixe, l'autre mobile, dont j'ai donné la description n°. *66*, nous eût été ici d'un grand usage: nous eussions pu nous en servir pour comparer entre eux avec assez de précision les arcs observés, mais nous n'en avions point alors, & l'idée de cet instrument, & de son usage, ne m'est venue que quelque tems après. J'imaginai donc un instrument équivalent à celui-là, & qui l'emporte même de beaucoup pour l'objet que nous traitons; mais n'ayant trouvé personne ni à *Rimini*, ni dans tout le trajet, qui pût l'achever; ce n'est qu'à *Rome* que je l'ai fait finir, & que je lui ai fait donner sa derniere perfection: c'est l'ouvrage de notre artiste ordinaire M. *Rufo*, & il est représenté dans les figures 5, 7 & 8: j'en ai donné la description n°. 189 & suivans; en voici l'usage pour la rectification du quart-de-cercle; il a beaucoup de rapport avec celui de la lame mobile, destinée à la vérification du secteur.

Moyen de connoître sa vis. Pl. III. fig. 7.

222. Il n'est besoin que du petit instrument de la figure 7, pour vérifier la vis Z*u*V; car il suffit pour cela de faire parcourir à la ligne GH du verre, au moyen des pas de la vis qu'on y emploie successivement, l'intervalle de deux points marqués sur le limbe, & dont la distance réponde à un tour de cette vis; ou de faire correspondre, au moyen de la même vis, à un point unique du limbe l'intervalle de deux lignes marquées sur le verre à la même distance. A cet effet on ne serrera les vis M, *m* (fig. 8.) qu'après avoir amené la ligne du verre au commencement de l'intervalle des points du limbe, ou le point du limbe au commencement de l'intervalle des lignes du verre, l'index placé au commencement du pas de la vis; & lorsqu'après une révolution de l'index on sera arrivé à la fin de ce pas, on lâchera les vis, & on placera de telle sorte l'alidade avec le vérificateur, que le commencement de l'intervalle réponde, comme ci-devant, à la ligne ou au point: enfin on fera faire un tour à l'index pour mesurer le second pas de la vis. De cette sorte on pourra comparer tous les pas, d'abord un à un, puis deux à deux, ou trois à trois, &c. enfin les moitiés, les tiers, les quarts, &c. de chaque pas, comme nous avons dit, n°. 56 & 57, qu'on pouvoit faire pour la vérification de la vis du secteur, qui pousse la lame

mobile. Celle-ci se trouva également parfaite.

223. La vis étant vérifiée, on pourra comparer tous les dégrés entre eux, comme on a comparé les divisions de la lame mobile (nº. 61), & cela, ou en faisant parcourir à la ligne du verre GH un dégré entier quelconque, & la ramenant ensuite à sa premiere position, ou ce qui est mieux, en marquant sur le verre de l'alidade, si sa fenêtre est assez large, deux lignes à la distance d'environ un dégré, & amenant, comme ci-dessus, l'une au commencement, l'autre à la fin du dégré. Il ne sera pas même besoin pour cela d'avoir vérifié la vis; mais dès qu'elle le sera, on pourra comparer les minutes entre elles, ou du moins le commencement & la fin de chaque dixaine de minutes, ou bien, comme nous l'avons fait, la fin des premieres & le commencement des dernieres minutes de chaque dixaine, dans les points où les transversales coupent le second & le dixieme des onze cercles concentriques (fig. 3.). Car ayant remarqué combien il y a dans un dégré moyen de parties du micrometre de la figure 7, & combien il en doit revenir à chaque partie quelconque de ce dégré, l'erreur, tant du dégré que de chacune de ses parties, se manifeste d'elle-même. Tout ceci revient à ce que nous avons dit, à l'endroit cité, de la lame mobile du secteur, & de son micrometre. Comparer les dégrés.

224. Comparant donc ainsi tous les dégrés, on vérifie tout le quart-de-cercle; de même qu'on connoît toute la division de la lame mobile, en examinant chacune de ses parties. Car on connoîtra le nombre de parties de micrometre contenu dans le quart-de-cercle entier, & par-là même dans un arc quelconque, & on fera cette analogie: comme le nombre de parties de micrometre contenu dans le quart-de-cercle est au nombre de parties contenu dans un arc quelconque, ainsi 90° est à un quatrieme terme, qui, étant soustrait de cet arc, en fera connoître l'erreur; mais par-là on commettroit une erreur dans chaque opération, & ces erreurs pourroient s'accumuler jusqu'au nombre de 45, suivant le nº. 84. Corriger les arcs.

225. On peut donc, par la méthode proposée, nº. 76, pour le rayon du secteur, diminuer considérablement ce nombre d'erreurs, au moyen de l'instrument représenté dans la figure 5, Diminuer l'erreur. Pl. III. fig. 5.

depuis AB jufqu'à *ab*. On y collera avec de la cire deux verres P*p*, Q*q*, fur le revers defquels on aura marqué des lignes dirigées au centre de l'inftrument, & placées à peu près l'une au commencement de la divifion, l'autre à la fin du 45e dégré; & tournant la vis qui eft au deffous du point *i*, on fera avancer avec l'alidade toute la machine, jufqu'à ce que les lignes des verres répondent fucceffivement, l'une au commencement de la divifion, l'autre à la fin du 45e dégré; ce qui fera connoître la différence de cet arc, avec l'intervalle de ces lignes. On tranfportera enfuite toute la machine, jufqu'à ce que la ligne du premier verre foit à peu près à la fin du 45e dégré, & par conféquent celle du fecond proche la fin du 90e; & l'on trouvera la différence de cet arc à l'intervalle des lignes, & par conféquent la différence des arcs. Si l'on compare de la même maniere les arcs de 30, de 10 & de 5 dégrés, en plaçant les verres à ces intervalles, l'erreur ne pourra être au plus que quintuple de celle qu'on aura commife dans chaque opération.

Même fujet. 226. Pour trouver les angles de notre polygone, nous n'avons eu befoin, comme je l'ai dit, n°. 211, que de vérifier les minutes des 90e & 91e dégrés, avec le commencement & la fin des autres; & pour connoître de combien un objet eft élevé, ou abaiffé au-deffous de l'horizon, il a fallu y ajouter la vérification de deux dégrés pris de part & d'autre du premier point de la divifion. Toutes ces opérations demandent beaucoup de travail & de patience; mais elles font abfolument néceffaires, & nous nous y fommes appliqués férieufement depuis notre retour à *Rome*. Or il eft à obferver que fi l'on vérifie les minutes d'un même dégré par le mouvement continu d'une vis bien faite, la fomme des erreurs n'augmente point, & qu'il n'y a d'autre différence dans la grandeur de l'arc, que celle qui provient de l'erreur unique de la derniere opération, comparée à la premiere erreur; d'où il fuit que ce quintuple de l'erreur ne peut être augmenté que de cette erreur unique : mais il n'arrive jamais que les erreurs foient toutes du même côté; au contraire, elles s'effacent prefque toujours les unes les autres, du moins en partie.

227.

227. Le rayon de notre quart-de-cercle étant le tiers de celui du secteur, le mouvement de l'aiguille ou de l'index, qui, dans le secteur, répond à une seconde, répond ici à trois secondes. De même donc qu'avec un micrometre & une lentille on distingue aisément dans le secteur le tiers d'une seconde, on distinguera pareillement ici une seconde. Mais si la division se faisoit par de petits points, & qu'on se servît du microscope, je ne doute nullement qu'on ne pût distinguer les dixiemes de secondes, & même les tierces; de sorte qu'en perfectionnant cette méthode, on peut parvenir à éviter, je dis même dans la totalité de toutes les erreurs possibles, une erreur qui excede une petite fraction de seconde. Mais il seroit inutile de chercher tant de précision dans la circonstance présente, où les angles se mesurent avec les fils du micrometre; ce qui expose à des erreurs de deux, de trois, & même de cinq secondes. Ce n'est pas sans raison que j'ai préféré plus haut cette méthode à celle du compas à verres, l'un fixe & l'autre mobile, à la place desquels on peut encore mettre des microscopes; car ici le mouvement de la machine & de l'intervalle qui est entre les lignes des verres, se fait autour du centre du quart-de-cercle, suivant le mouvement même de l'alidade, dont on se sert pour prendre les angles; ce qui contribue beaucoup à donner une détermination plus exacte de ces angles, au moyen d'une division ainsi vérifiée.

Avantages du nouvel instrument de vérification.

228. Connoissant le rapport des parties du quart-de-cercle, & la correction faite en conséquence, il reste à corriger le quart-de-cercle même. Pour cela il faut, comme nous l'avons déja dit plus d'une fois, placer le quart-de-cercle dans une situation horizontale, & l'alidade d'abord au commencement de la division, puis à la fin du 90me. dégré, en remarquant les deux objets qui paroissent au centre des fils de la lunette mobile. Cela fait, on ramene l'alidade au point de zéro, & on tourne le quart-de-cercle horizontalement, jusqu'à ce que le second objet se retrouve dans l'axe de la lunette mobile, après quoi on remet l'alidade à la fin du 90me. dégré, & on remarque un troisieme objet. On répete encore l'opération jusqu'à ce qu'on soit arrivé à la quatrieme position du quart-de-cercle; & si le premier objet se retrouve alors au

Vérification du quart-de-cercle. Premiere méthode.

centre des fils, l'alidade marquant 90°, le quart-de-cercle eſt juſte : mais s'il faut, pour amener la lunette ſur cet objet, avancer l'alidade au-delà de 90°, ou la retirer en-deçà, la quatrieme partie de cette différence marque ce qui manque au quart-de-cercle dans le premier cas, & ce qu'il a de trop dans le ſecond, puiſque cette erreur ſe déduit de quatre poſitions.

Suite. 229. Or pour connoître exactement cette différence, il faut préalablement connoître cet arc ajouté ou retranché dans la quatrieme poſition; car s'il y avoit quelque erreur cachée, elle rendroit la correction vicieuſe. Mais parcequ'il eſt très rare de trouver des objets diſtincts à une telle diſtance, qu'ils paroiſſent terminer à l'horizon les arcs qui répondent au quart-de-cercle; dès qu'on aura rectifié le 90me. & le 91me. dégré, il ſuffira d'obſerver quatre objets, qui répondent à peu près à l'amplitude du quart-de-cercle, & de meſurer l'angle que fait le premier avec le ſecond, le ſecond avec le troiſieme, & ainſi de ſuite; & ſi la ſomme des quatre angles eſt au-deſſus ou au-deſſous de quatre droits, le quart de cette différence ſera l'erreur de l'inſtrument, par défaut dans le premier cas, par excès dans le ſecond. On voit que dans tous ces cas il faut choiſir des objets très éloignés, à moins de quoi on ſeroit obligé, en tournant l'inſtrument, d'en tranſporter le pied, pour remettre le centre au même point; car le pied, autour duquel ſe fait cette révolution, ne répond point au centre du quart-de-cercle; ce qui produit une parallaxe qui, à une médiocre diſtance, pourroit troubler l'opération.

Seconde méthode. 230. Si l'on eſt obligé de déterminer avec le quart-de-cercle tous les angles d'un triangle, comme il arrive dans la meſure d'un dégré, où l'on prend avec cet inſtrument tous les angles du polygone, & que la ſomme de ces angles ſoit préciſément 180°, le quart-de-cercle eſt juſte; ſinon la différence ſera le double de l'erreur. On ne peut cependant ſe promettre avec un ſeul triangle d'évaluer l'erreur, à cauſe que dans tous les angles meſurés avec un quart-de-cercle, il ſe trouve toujours une erreur de quelques ſecondes, puiſqu'avec le ſecteur, qui eſt beaucoup plus long, on ne peut éviter une erreur d'une ou deux ſecondes. Mais ſi l'on a pluſieurs triangles,

comme ceux d'un long polygone, ils donneront autant de différences, dont les unes pourront être positives, les autres négatives: on en fera une somme qu'on divisera à l'ordinaire par le nombre des triangles, pour avoir une différence moyenne, dont la moitié sera l'erreur d'autant plus approchée, que le nombre des triangles sera plus grand.

231. On trouve la même chose avec une double lunette, telle qu'étoit notre lunette fixe, n°. 179. D'abord il faut chercher avec cette lunette deux objets diamétralement opposés; ce qui est requis pour procurer le parallélisme des deux axes posés l'un sur l'autre en sens contraire: on choisit ensuite un objet moyen, & l'on mesure les deux angles avec le quart-de-cercle: si la somme des angles équivaut à 180°, le quart-de-cercle est juste; sinon la moitié de la différence est l'erreur cherchée. On ne peut se dispenser de substituer cette méthode à la premiere de celles que nous venons de proposer, lorsqu'on ne découvre d'un côté de l'horizon aucun objet distinct, comme il nous est arrivé à *Rimini*, où la mer occupoit tout le nord; ou bien lorsqu'un édifice voisin cache une bonne partie de l'horizon. Troisieme méthode.

232. Or pour trouver avec une lunette double deux objets diamétralement opposés, & le parallélisme de ses axes; le quart-de-cercle posé horizontalement, je place l'oculaire du côté du centre, comme en N (fig. 5.), & je pointe cette lunette sur quelque objet: ensuite, sans toucher au quart-de-cercle, je porte l'oculaire en L du côté du limbe, & je remarque quelque objet, sur lequel j'amene le fil mobile du micrometre, qui se trouve en cet endroit, n°. 176. Cela fait, je retourne l'instrument jusqu'à ce que la direction NL se change en LN; & je dirige tellement la lunette, qu'en visant par N du côté du centre, le second objet paroisse au centre des fils: ensuite ayant porté l'oculaire du côté du limbe en L, je vois si le premier objet est à l'intersection du fil mobile, avec le fil fixe qui le coupe à angles droits: s'il en est ainsi, les deux objets sont diamétralement opposés; s'il s'en faut de quelque chose, j'amene sur cet objet le fil mobile, dont je mesure cependant le mouvement, & que je retire ensuite jusqu'au milieu du chemin que je lui ai fait faire: le nouvel objet, Suite. Pl. III. fig. 5.

qui dans cette position paroît au centre des fils, est diamétralement opposé au second, & l'on est parvenu au parallélisme des deux axes, ou plutôt des deux lignes de foi, dont l'une passe par le point de l'axe de l'objectif en L, & le centre des fils en N, l'autre par le point de l'axe de l'objectif en N, & le point d'intersection du fil mobile en L, avec le fil qui le coupe perpendiculairement; & l'on pourra dans la suite se servir de ces deux lignes, pour trouver, dans une position quelconque du quart-de-cercle, deux objets diamétralement opposés.

Démonstration. Fig. 9.

233. Supposons en effet (fig. 9.) que dans la premiere position de la lunette, l'une des lignes de foi NL aboutisse au point A, l'autre L*n* en B, au lieu du point opposé *a*; après avoir retourné l'instrument, NL sera changée en N′L, & aboutira au second objet B, & L*n* changée en L*n*′ aboutira en A′, non en A; l'angle ALN′ sera égal à l'angle NL*n*, qui lui est opposé au sommet, & qui est le même que l'angle A′LN′. Donc l'angle A′LA, qui mesure la distance apparente de l'objet de A au point A′, est double de l'angle *n*′LN′, qui est l'angle de la déviation des lignes de foi. Donc si la ligne de foi L*n*′ parcourt la moitié de l'angle A′LA, elle retombera sur LN′, & les deux lignes de foi devenues paralleles, étant placées l'une sur l'autre en sens contraire, seront dirigées par N′L, & LN′ à des objets diamétralement opposés.

Autre moyen moins sûr. Pl III. fig. 5. 9. 10.

334. Au lieu des deux positions horizontales du quart-de-cercle, on pourroit lui en donner deux verticales, pourvu que le limbe A fût alternativement au-dessus & au-dessous de LN, & c'est la même démonstration que dans la figure 9: car dans la position verticale, il ne suffit pas de tourner l'instrument autour de son pied, par un mouvement horizontal, en laissant le limbe A au-dessous de NL, dans les deux positions; auquel cas les lignes de foi, quoique déviées, aboutiroient toujours aux mêmes objets. En effet, si dans la premiere position (fig. 10.), LN, *n*L représentent les lignes de foi, & que le quart-de-cercle tourne horizontalement autour d'un axe vertical; LN′ restera toujours au-dessus de L*n*′, comme auparavant, ainsi qu'il est marqué dans la figure;

comme au contraire il feroit au-deffous, s'il y avoit été d'abord; & donnant à N'L la direction précédente de L*n*, L*n'* prendra celle qu'avoit NL.

235. Il faut encore avoir foin, dans ces opérations, de choifir des objets fort éloignés, ou de remettre le centre du quart-de-cercle au point où il étoit dans la premiere pofition, ou du moins dans la ligne tirée d'un objet à l'autre, de crainte que la parallaxe ne caufe quelque confufion. Au refte, il eft bien plus facile de retourner l'inftrument, dans la pofition horizontale, que dans la verticale; car dans celle-là, il n'eft queftion que de mouvoir un peu le quart-de-cercle horizontalement; au lieu que dans celle-ci, il faut l'élever audeffus de la lunette fixe, qui doit toujours refter à la même hauteur. Précaution à prendre contre la parallaxe.

236. Les lignes de foi rendues paralleles, il eft aifé de marquer fur l'horizon deux points oppofés, & de prendre les angles qu'ils font avec quelque objet intermédiaire, afin de voir de combien le quart-de-cercle differe de 90°. Je viens de donner pour cela trois méthodes, dont nous nous fommes fervis à plufieurs reprifes; & par l'accord de plufieurs obfervations de toute efpece, qui ne different que d'un très petit nombre de fecondes, nous avons trouvé qu'il manque à notre quart-de-cercle 25″ pour completter les 90°. Cette erreur doit fe répartir fur tous les arcs, fuivant le rapport du quart-decercle à ces mêmes arcs; & c'eft enfin le moyen de corriger toutes les erreurs qui auroient pu fe gliffer dans la divifion du quart-de-cercle. Erreurs de l'inftrument.

237. Ayant trouvé les lignes de foi de la lunette double, il n'eft pas difficile de voir de combien il s'en faut qu'elles ne foient paralleles au dernier rayon; j'entends celui qui termine le 90me. dégré. Otons l'alidade (fig. 5.) avec l'inftrument qui y eft ajouté, & plaçons au centre C la petite piece de la figure 2, avec le fil à plomb: fi ces lignes de foi font paralleles au rayon, & qu'on vife de L par LN, ou de N par NL à quelque objet fitué à l'horizon, il eft clair que le fil à plomb doit être au commencement du premier dégré. Mais fi ce parallélifme fubfiftant, l'objet étoit au-deffus de l'horizon, ou bien L feroit plus bas que N, & pour lors le fil fe rappro- Déviation de la lunette fixe; moyen de la corriger. Pl. III. fig. 5.

cheroit du point I; ou bien N, si l'on vise par NL, seroit plus bas que L, & le fil s'écarteroit du côté opposé AB; & ces arcs seroient égaux à la hauteur de l'objet sur l'horizon. C'est pour avoir le dernier de ces arcs, qu'on a ajouté quelques dégrés entre le premier point de la division & l'extrémité AB du limbe.

Suite. 238. Si les lignes de foi ne sont pas paralleles au dernier rayon, & qu'on vise à un objet, tantôt par LN, tantôt par NL, le fil ne sera pas à la même distance du commencement de la division; & le point de milieu, entre les extrémités de ces distances, sera éloigné de 90° du point du limbe, où aboutit le rayon parallele; ainsi la distance de ce point de milieu, au commencement de la division, marquera la déviation. Or si la distance du fil au premier point de la division, est plus grande du côté de KI, lorsqu'on vise par LN, que du côté de AB, lorsqu'on vise par NL, le point du milieu tombera du côté de KI, & il tomberoit du côté de AB, si la premiere distance étoit plus petite que la seconde. Lorsqu'ensuite on mesurera la hauteur des objets au-dessus de l'horizon, en visant par LN, cette distance du point du milieu doit être retranchée dans le premier cas, & ajoutée dans le second à l'arc désigné par le fil à plomb, pour avoir la hauteur qu'on cherche, puisque selon que le point du milieu est en-delà ou en-deçà du premier point de la division, le fil est de même en-delà ou en-deçà du point, où l'on doit commencer à compter les dégrés de l'arc. Il faudroit au contraire l'ajouter dans le premier cas, & la retrancher dans le second, si l'objet étoit au-dessous de l'horizon, le fil tombant alors du côté opposé AB. On voit, sans que je le dise, que pour connoître la déviation, il suffit de retrancher la plus petite distance de la plus grande, & de prendre la moitié du reste.

Trois autres moyens. 239. Tout ceci est trop connu pour qu'il soit besoin d'en donner des exemples. On sait également qu'il y a plusieurs autres moyens de connoître la déviation, avec la lunette simple; j'en rapporterai trois principaux. Le premier consiste à viser par LN à un objet un peu élevé au-dessus de l'horizon, en remarquant de combien le fil s'éloigne, du côté de KI, du premier point de la division; & à viser ensuite à son image

peinte dans un grand vase plein d'eau, laquelle devra être abaissée au-dessous de l'horizon, en remarquant toujours la distance du fil au même point : on prend le point du milieu entre ces deux positions du fil, & la moitié de sa distance au premier point de la division est la déviation cherchée.

240. Le second moyen est de viser à cet objet par LN, le limbe A étant au-dessous de NI, en marquant, comme ci-devant, la position du fil, & de retourner l'instrument de sorte que le limbe A soit au-dessus de LN, pour lors on ôte l'aiguille d'où est suspendu le fil à plomb, & on le suspend avec la main, autour du limbe A, de sorte qu'il passe par le centre C, qui est au-dessous du limbe, en marquant encore la distance du fil au premier point de la division ; & le point du milieu, entre ces deux positions, servira encore à faire connoître la déviation. Au reste, soit qu'on emploie l'un ou l'autre de ces deux moyens, il faut avoir soin de prendre un objet très éloigné, sinon de remettre le centre du quart-de-cercle au même point, pour éviter la parallaxe. L'un & l'autre vérifie immédiatement le premier point de la division ; comme le troisieme, dont nous allons parler, vérifie immédiatement le dernier point ; d'où, connoissant l'erreur du quart-de-cercle, on tire la vérification du premier. Suite.

241. Ce troisieme moyen consiste à placer exactement le quart-de-cercle dans le plan du méridien, & à observer le passage par ce plan d'une étoile très voisine du zénith, le limbe tourné à l'occident : le lendemain on répete l'observation, le limbe tourné à l'orient, & l'on marque la position du fil dans ces deux situations de l'instrument ; le point du milieu, entre ces deux positions, est celui où aboutit le rayon parallele, & dont la distance au 90me. dégré est la déviation cherchée. Suite.

242. On a proposé ci-dessus des méthodes, pour connoître l'erreur du quart-de-cercle. Supposé qu'elle soit encore inconnue, & qu'on ait trouvé par le troisieme moyen, que nous venons d'indiquer, le point auquel devroit répondre le 90me. dégré, & par celui qu'on voudra des deux autres moyens, le point auquel devroit répondre le commencement du premier dégré, il est clair qu'on en tirera l'erreur du quart-de-cercle, Connoître l'erreur du quart-de-cercle.

dans le cas où ces deux points ne seroient pas à même distance, & du même côté, l'un du commencement, l'autre de la fin de la division.

Du fil à plomb.

243. Il reste uniquement à observer que le point du limbe est désigné de la même maniere par le fil à plomb, que par la ligne du verre, suivant la méthode proposée, n°. 206 & suivans. Car de même que cette ligne se dirige au centre, ainsi ce fil est suspendu du centre, ou passe par le centre.

Usage du quart-de-cercle pour deux sortes d'angles.

244. En voilà assez sur ce qui a rapport à la construction du quart-de-cercle, à la disposition de ses parties, & à l'examen de ses divisions : il reste à parler de son usage, & des observations auxquelles il a servi. A l'égard de son usage, la matiere est presque épuisée par ce que nous en avons dit à l'occasion de l'examen des divisions. Car cet usage se réduit à mesurer l'angle formé par deux lignes tirées d'un point donné, à deux objets vus de ce même point, & l'angle qui répond au nombre de dégrés, dont un objet est élevé, ou abaissé au-dessous de l'horizon, par rapport au point d'où il est vu. On a donné, n°. 203 & suivans, la mesure du premier; & celle du second depuis le n°. 237.

Deux méthodes pour les angles obtus.

245. Il ne reste plus qu'à mesurer les angles obtus, s'il s'en trouve. Il y a deux moyens d'y parvenir : premierement avec une lunette double, dont les lignes de foi soient paralleles entre elles, on peut avoir ces angles immédiatement, en visant à un objet par GD, à un autre par NL, & retranchant de la somme de deux droits l'angle GCL, qui seroit déterminé par cette position de l'alidade (n°. 203), si l'on visoit par LN. En second lieu, au défaut d'une lunette double, on doit prendre un objet intermédiaire, & à peu près dans le même plan que les deux autres, & mesurer les deux angles aigus, dont la somme sera la valeur de l'angle obtus.

Angles de la premiere classe.

246. Nous avons mesuré deux sortes d'angles de la premiere classe, savoir les angles du polygone, & les angles que fotmoit, à une heure donnée, une ligne tirée à l'un des signaux, avec celle qui aboutissoit au centre du soleil, le soleil étant pour lors très peu au-dessus de l'horizon. Au moyen de ces angles-ci, on détermine la position de tout le polygone, par rapport à la méridienne; & par ceux-là, les côtés mêmes

du

du polygone, ou la distance d'une station à l'autre, non encore réduite à l'horizon, ni à la direction de la méridienne; d'où il arrive qu'une base se vérifie par l'autre. Ces distances se réduisent à un plan horizontal, ou plutôt à une surface sphérique par le moyen des angles de la seconde classe, qui font connoître de combien un objet est élevé au-dessus de l'horizon, ou abaissé au-dessous; ce qu'on peut faire aisément par la méthode du Livre second (n°. 24); ensuite, l'inclinaison des côtés sur la méridienne étant connue, on les réduit à la méridienne.

247. Dans la mesure de ces angles, nous nous sommes toujours servis des transversale (n°. 206), le nouveau micrometre n'étant pas achevé, & l'ancien hors d'état de servir. Il y a déja long-tems que M. le Chevalier de *Louville* a observé qu'il est beaucoup mieux de s'en tenir à la division des dégrés entiers, en la faisant par de petits points, & de déterminer les minutes & secondes avec les fils du micrometre placés au foyer de l'objectif de la lunette fixe, ou de la lunette mobile. Je l'aurois fait volontiers, surtout pour les angles du premier genre, si lorsqu'il est question de faire parcourir au fil mobile un dégré entier, on pouvoit se fier au micrometre ordinaire. Nous avons déja remarqué, en parlant du secteur, qu'à moins que les fils ne soient au foyer de l'objectif, il en résulte une parallaxe: le fait est constant. Il est certain aussi que le foyer de l'objectif est un composé d'autant de foyers qu'il y a de sortes de couleurs, & que ces foyers sont les uns plus loin, les autres plus près. Or M. *de la Condamine* & M. *Bouguer* ont remarqué que le foyer d'une lunette est sensiblement différent pour deux observateurs qui ont la vue inégalement longue; comme aussi que ce foyer devient plus long, ou plus court, selon la différente constitution de l'atmosphere, & selon que l'oculaire est plus ou moins éloigné de l'objectif ou des fils: ils ont de plus observé que dans ces différentes circonstances, la parallaxe se fait en sens contraire, & que quoiqu'ils observassent la même étoile, & presqu'au même instant, ils trouvoient en parties de micrometre des différences de plusieurs secondes. S'il arrivoit quelque chose de semblable, dans le micrometre d'une lunette, dont le fil

Usage des transversales.

dût parcourir un si grand espace, cela produiroit nécessairement des erreurs qui ne seroient point à négliger. Rien de tout cela n'est à craindre dans le micrometre de la figure 7, qui fait tourner l'alidade avec sa lunette sur le quart-de-cercle.

Observations des hauteurs.

248. De-là j'ai cru qu'il valoit mieux ne pas se borner aux dégrés, mais pousser plus loin la division, & l'achever par des transversales, comme *Graham* l'a pratiqué dans ses quarts-de-cercle. Cela est beaucoup plus commode pour prendre les hauteurs, celles des astres surtout. En effet, s'il n'y a que les dégrés de marqués, il faut tellement placer le quart-de-cercle, que le fil à plomb réponde exactement à l'un des points de la division, & commencer là-dessus l'observation; ce qui est très incommode, outre qu'il faudroit déja connoître à peu près la hauteur.

Erreur provenant du défaut de parallélisme de la lunette mobile.

Pl. III. fig. 11.

249. Dans ce qui nous reste à dire sur l'usage du quart-de-cercle, nous avons à examiner en premier lieu à quoi peut monter l'erreur produite dans les angles par le défaut de parallélisme de la lunette mobile au plan de l'instrument. Soit ACB (fig. 11.) le plan du quart-de-cercle, & ACD, ou BCE l'angle de la déviation de cette lunette; le quart-de-cercle donnera l'angle ACB, au lieu de DCE, & les angles ACD, BCE seront égaux, ainsi que leurs sinus, qui seront perpendiculaires au plan de l'instrument, & par conséquent paralleles. Donc DE, FG sont aussi égales & paralleles entre elles; par conséquent CF est égale à CG. Les lignes FG, AB, seront encore paralleles: or DE est la corde de l'angle DCE, & AB celle de l'angle ACB, celle-là double du sinus de la moitié de l'angle observé, celle-ci double du sinus de la moitié de l'angle désigné. Donc puisque le rayon CA est à CF co-sinus de l'angle de la déviation, comme AB double du sinus de la moitié de l'angle désigné, est à FG ou DE double du sinus de la moitié de l'angle observé, on aura le théorème suivant: *le rayon est au co-sinus de la déviation de la lunette, comme le sinus de la moitié de l'angle désigné par le quart-de-cercle, est au sinus de la moitié de l'angle cherché.*

250. Dans le cas d'une petite déviation, on peut abréger:

car en soustrayant on a cette proportion : le rayon CA est à AF sinus verse de la déviation, comme le sinus de la moitié de l'angle désigné ACB, est à sa différence au sinus de la moitié de l'angle observé. Or dès qu'il n'est question que de petites différences d'angles, on a un théorème semblable à celui dont nous nous sommes servis, n°. 141, savoir que le co-sinus du plus grand angle est au rayon, comme la différence des sinus, est au sinus de la différence des angles. En effet, ti (fig. 12. pl. II.), différence des sinus tz, $b'd$, est à $b't$, qui est la corde de la différence des arcs bb', bt, laquelle équivaut ici au sinus de cette différence, comme le co-sinus az, au rayon at. Donc par égalité troublée, le co-sinus de la moitié de l'angle désigné est au sinus verse de la déviation, comme le sinus de la moitié du même angle, est au sinus de l'erreur de cette moitié; & le double de cette erreur donne l'erreur totale. Donc si l'on compare les antécédens & les conséquens, on aura ce théorème : *le co-sinus de la moitié de l'arc désigné est à son sinus*, ou, ce qui est le même, *le rayon est à la tangente de la moitié de l'arc désigné, comme le double du sinus verse de la déviation, est au sinus de l'erreur ; & l'angle désigné par le quart-de-cercle, est toujours plus grand que le vrai angle.* Théorème plus simple.

251. Par où l'on voit qu'à moins que la déviation ne fût énorme, il n'y a aucune erreur sensible dans un angle désigné qui n'excede pas de beaucoup un angle droit, tel que ceux qu'on fait entrer dans un semblable polygone. La plupart des angles y sont fort au-dessous de 90°, & pour peu qu'ils fussent trop au-dessus, on ne pourroit avec un quart-de-cercle les déterminer par cette méthode, je veux dire au moyen d'une lunette mobile, qui peut à peine aller au-delà de 90°. Ainsi puisque le rayon est égal à la tangente de 45°, il arrive presque toujours dans ces angles, que le rayon surpasse la tangente de la moitié de l'angle ; d'où il suit que le sinus de l'erreur est moindre que le double du sinus verse de la déviation. Or le sinus d'une seconde, pour un rayon 10000000, est 48, & le sinus verse de 7 minutes est 21, dont le double 42 est encore moindre que 48. Donc avec une déviation de 7 minutes, l'erreur d'un angle aigu quelconque, & même d'un angle Que cette erreur n'est point à craindre.

droit, n'est pas d'une seconde. A mesure que la déviation augmente, l'erreur augmente en raison doublée de la déviation, puisque le sinus verse augmente à peu près suivant ce rapport : mais dans les petits angles, cette erreur est bien moindre à raison de la diminution de la tangente.

Excepté dans les petits angles. Pl. III, fig. 5. 11.

252. L'erreur seroit au contraire beaucoup plus grande dans les petits angles, si (fig. 5.) on ne visoit avec la lunette mobile GD qu'à un seul objet, & à l'autre avec la lunette fixe LN, & que l'une des lunettes fût parallele, & l'autre déviée : car en ce cas le point D (fig. 11.) tomberoit en A, & on auroit un triangle sphérique rectangle ABE. Or le point A tombant sur B, AB s'évanouit, & cependant AE devient égale à BE; ainsi l'erreur est égale à la déviation. Au contraire, si AB est de 90°, l'erreur s'évanouit; car A devient le pôle d'un grand cercle BEP, & l'arc AE est de 90°, comme AB. En général, & quelque soit l'arc AB, on trouvera l'erreur par ce théorême de trigonométrie sphérique : *le rayon est au co-sinus de la déviation BE, comme le co-sinus du côté, ou de la distance désignée AB, est au co-sinus de la base, ou de la vraie distance AE.*

Autre théorème.

253. De-là on peut déduire un autre théorême, qui, dans le cas d'une petite déviation BE, donne immédiatement l'erreur cherchée : car on a par conversion de raison l'analogie suivante : le rayon est au sinus verse de la déviation BE, comme le co-sinus de AB, à la différence des co-sinus de AB, & AE. Or (n°. 141.) le sinus du plus grand angle est au rayon, comme la différence des co-sinus, à la différence des arcs, qui peut se prendre ici pour le sinus de cette différence même des arcs. Donc par égalité troublée, le sinus de la distance désignée AB, est au sinus verse de la déviation BE, comme le co sinus de AB, à la différence des arcs, ou au sinus de l'erreur : & en raison alterne, le sinus de l'angle désigné est à son co-sinus, ou, ce qui revient au même, la tangente de cet angle est au rayon, comme le sinus verse de la déviation est au sinus de l'erreur. Si l'autre lunette s'écarte, ou dans le même sens, comme de la quantité AD, ou du côté opposé, il est aisé dans tous les cas particuliers de déterminer l'erreur qui en résulte. Mais si l'angle est d'une raison-

sidable grandeur, l'erreur provenant d'une légere inclinaison des lunettes est des plus petites. D'ailleurs nous n'avons observé qu'avec la lunette mobile; & nous avions pris soin de rendre les lunettes paralleles au plan de l'instrument.

Erreur provenant du défaut de parallélisme de la lunette fixe. Pl. III, fig. 11.

254. Lorsqu'on mesure les angles verticaux au-dessus de l'horizon ou au-dessous, l'erreur est la même que celle que nous venons d'évaluer. Soit ABC le plan du quart-de-cercle, CE l'axe de la lunette répondant au point B, CA le fil à plomb; le quart-de-cercle désignera la distance ACB au zénith; mais la distance vraie est ACE, & comme son complément est la hauteur, ou la dépression au-dessous de l'horizon, il s'ensuit que l'erreur de la hauteur ou dépression, est la différence des arcs, AB, AE; différence qui, dans le cas où la déviation BE est petite, & l'arc AB peu différent d'un arc de 90°, devient elle-même très petite, & disparoît entierement à la fin du 90me. dégré: or on peut toujours l'évaluer par le théorème du n°. précédent, dans lequel prenant le premier rapport, savoir celui du sinus de AB à son co-sinus, dans le cas d'une petite hauteur, ou dépression au-dessous de l'horizon, ou, pour dire en un mot, dans le cas d'une petite distance à l'horizon, auquel cas AB est de près de 90°, le sinus de AB est presque égal au rayon, & son co-sinus est le sinus de la distance à l'horizon. Le théorème du n°. précédent se réduit donc à celui-ci: *le rayon est au sinus de la distance à l'horizon, comme le sinus verse de la déviation au sinus de l'erreur.* Cette erreur est donc comme un infiniment petit du troisieme ordre, puisqu'on suppose que la distance à l'horizon, & par conséquent son sinus, la déviation & son sinus sont très petits: d'où il suit que le sinus verse, qui est lui-même petit par rapport au sinus droit, est un infiniment petit du second ordre.

Que ces erreurs n'ont pas influé dans la mesure.

255. De tout ce que nous venons de dire sur les erreurs qui peuvent résulter de la déviation des lunettes, il est aisé de conclure que nous n'avions rien à craindre de ce côté-là. Quant à la mesure des angles des triangles du polygone, & des hauteurs ou dépressions, il se trouve heureusement que les premiers angles, où l'on demande plus d'exactitude, sont justement ceux qui se déterminent avec plus de précision.

256. Pour prendre les angles de la premiere espece, on

Moyen de prendre les angles. Pl. III. fig. 4. 1.

commence par mettre le quart-de-cercle dans le plan qui passe par les deux objets, ensorte qu'ayant visé à un objet avec la lunette mobile, qu'on suppose parallele à la lunette fixe, on puisse ensuite, l'instrument restant toujours dans la même position, amener la lunette mobile sur l'autre objet qui doit se trouver encore au centre des fils. Je n'ai jamais eu de peine à donner cette position au quart-de-cercle, moyennant le méchanisme de la figure 4, par lequel on donne à l'instrument, de quelque façon que soit posé son pied, la position que l'on veut. L'un des observateurs vise toujours à un des objets par la lunette fixe, & l'autre par la lunette mobile à l'autre objet, tandis qu'un aide tourne la vis (fig. 4.), & fait glisser le long de l'ouverture D, l'arc KLIM, pour donner plus ou moins d'élévation au quart-de cercle, jusqu'à ce qu'il soit à peu près dans la position requise. On acheve de le mettre dans cette position au moyen des vis YZ (fig. 1.), qu'on tourne tantôt dans un sens, tantôt dans l'autre, jusqu'à ce que les deux objets paroissent en même tems au centre des fils. Nous avions à peine essayé un ou deux tours de vis, que le quart-de-cercle se trouvoit exactement placé; nous n'avons jamais éprouvé l'embarras que donnent les pieds d'une construction différente, & nous n'avions pas besoin de nous assujettir à certaines regles qu'on prescrit sur la maniere de disposer les traverses; regles qui, dans des endroits montueux, pierreux & escarpés, tels que ceux de nos stations, sont presque impraticables.

Suite.

257. Le quart-de-cercle ainsi disposé, on amenoit l'alidade au premier point du dégré voisin, & on l'y retenoit, tandis qu'on retournoit un peu l'instrument, pour ramener la lunette mobile sur son objet. Cela fait, le premier observateur, sans toucher au quart-de-cercle, faisoit mouvoir le fil parallele jusqu'à ce qu'il apperçût le premier objet au point d'intersection de ce fil avec celui qui lui est perpendiculaire; enfin l'on amenoit la lunette mobile sur la lunette fixe, ensorte que le premier objet parût dans l'une & l'autre à l'intersection des fils, & l'on observoit la position de la ligne du verre par rapport aux transversales. Tout ceci s'exécutoit sans peine, malgré le tremblement que la violence des vents sur de hautes montagnes communique d'ordinaire au quart-de-cercle, en agissant sur toute sa masse, tandis qu'il ne tient que par un

endroit à son pied, sur lequel il est comme en équilibre; le vent y produisoit même toujours un petit trémoussement, qui quelquefois troubloit un peu l'opération, & la rendoit moins exacte: mais cet effet même étoit bien plus rare, dans cette position horizontale du quart-de-cercle, sur lequel d'ailleurs l'alidade étoit immobile, que lorsqu'on prenoit les hauteurs ou les dépressions.

258. En effet, ces hauteurs & ces dépressions ne se mesurent qu'avec la lunette fixe, & le fil à plomb, qui occupe alors la place de la seconde lunette, & qui en fait l'office; & on observe le point, où il répond sur le limbe, de la maniere que nous avons dit, n°. 143. S'il y a du calme, il suffit, pour arrêter le fil, de plonger le poids dans l'eau; mais si le vent est fort, le fil est tellement agité, que nous ne trouvions quelquefois point de moyen de le fixer. Nous tâchions d'y remédier en suspendant à la rainure GH (fig. 2.) le garde-filet; mais comme le fil doit raser le limbe, le garde-filet devoit être ouvert par derriere, à l'endroit qui répond au limbe, & le vent entroit par cette ouverture. De plus, le quart-de-cercle étant placé dans une situation verticale, le vent y avoit plus de prise, & y causoit un trémoussement qui se communiquoit au fil à plomb (1). De-là il est arrivé plus d'une fois, que tandis que nous regardions l'un dans la lunette, l'autre sur le limbe, le fil, par un mouvement d'oscillation, parcouroit de part & d'autre plusieurs minutes. Pour déterminer sa position, nous attendions toujours que le vent relâchât un peu, & que l'oscillation se réduisît à peu de chose, pour lors nous prenions le point du milieu de l'espace parcouru. Cependant je ne voudrois pas répondre que dans la mesure des hauteurs ou des dépressions, il n'y ait eu souvent des erreurs même de plus d'une minute; au lieu que dans les angles du premier genre, je ne crois pas qu'elles puissent monter au-delà d'un petit nombre de secondes. *Des angles de hauteur & dépression.*

259. Il se peut que dans ces angles même du premier genre, il se soit trouvé des erreurs de plusieurs secondes, provenant de diverses causes. Avec une lunette de trois ou quatre pieds, *Plusieurs sources d'erreurs.*

(1) Le moyen de se mettre à l'abri du vent, seroit d'observer sous une tente.

on ne peut discerner deux ou trois secondes. Le fil de la lunette mobile, quelque délié qu'il soit, couvre un espace de six, huit & dix secondes. L'on peut donc, dans l'une & l'autre position de cette lunette, commettre une erreur de trois secondes; surtout si l'objet est près de l'horizon, & à une assez grande distance, les vapeurs détournant alors les rayons; ce qui rend l'image de l'objet tremblante. On est exposé à la même erreur avec la lunette fixe, ensorte qu'il se pourroit que sa position ne fût pas absolument la même dans les deux positions de la lunette mobile. Cette erreur peut augmenter encore par la violence du vent qui agite le quart-de-cercle. Il est vrai qu'on pourroit remédier à ce dernier inconvénient, & conserver la lunette fixe dans sa position, tandis qu'on change celle de la lunette mobile; on le pourroit, dis-je, en donnant encore au quart-de-cercle de nouveaux supports, qui le fixeroient invariablement dans le plan qui passe par les deux objets: mais vu l'inégalité du terrein sur les montagnes, ces supports devroient être fort composés, & capables de bien des mouvemens différens: de plus, les erreurs qu'on pourroit éviter par ce moyen, ne produisent, comme nous le verrons plus bas, dans la mesure du dégré, qu'une erreur très légere, & c'est pour cela que nous n'avons pas cru devoir ajouter de nouveaux supports.

Même sujet. 260. En plaçant l'alidade sur l'une des divisions, on commet une nouvelle erreur. Nous nous y servions toujours de la loupe; mais cela n'empêche pas qu'on n'y puisse soupçonner une erreur d'une ou deux secondes, peut-être même plus grande, car elle est triple de celle qu'on commettroit en cela dans le secteur, qui est trois fois plus long. Lorsqu'on examine le point du limbe, auquel répond la ligne du verre, dans la seconde position du quart-de-cercle, on peut commettre une erreur de 3, de 4, & même de 5 secondes. Ces deux dernieres erreurs seroient beaucoup moindres, si on se servoit de mon micrometre de la figure 7, qui fait mouvoir l'alidade; car si ce mouvement est continu, suivant le n°. 58, si on applique le microscope, & que la division d'ailleurs soit faite par de petits points, on pourra éviter jusqu'à l'erreur d'une seconde; on évitera aussi l'erreur qu'on peut commettre

en

en dirigeant la lunette mobile à ſon objet. Je ne doute pas qu'en répétant pluſieurs fois l'opération, & marquant à chaque fois le nombre de parties du micrometre, on ne pût éviter une erreur d'une ſeconde. Mais nous n'avions point alors ce micrometre.

261. Si dans la vérification des diviſions on a commis des erreurs de quelques ſecondes, l'erreur ſe répand dans l'angle qu'on meſure avec le quart-de-cercle, & elle y eſt même double, à cauſe de la double poſition de l'alidade. Une autre ſource d'erreur, c'eſt la réfraction qui éleve les objets. Il eſt vrai que ce nouveau dégré d'élevation dans un plan vertical, ne met pas beaucoup de différence dans un angle qui eſt preſque horizontal ; il y en met néanmoins, & on ne peut la corriger parfaitement, à cauſe que la réfraction change d'un moment à l'autre proche l'horizon : de plus, il ſe pourroit peut-être que des vapeurs inégalement répandues détournaſſent de côté le rayon viſuel ; ce qui cauſeroit du dérangement dans l'angle horizontal. Dès qu'il eſt queſtion de petites différences, comme de quelques ſecondes, on a tout à craindre de l'influence des cauſes phyſiques ſur la préciſion géométrique. Autres ſources.

262. Ces erreurs pourroient aller aſſez loin, ſi elles ſe trouvoient toutes du même côté ; mais c'eſt un cas qui n'arrive jamais. Nous pourrions nous-mêmes en avoir commis quelquefois de 10 à 12 ſecondes, ou par un effet de la violence du vent, ou par l'aſſemblage fortuit de quelques erreurs dans la vérification du quart-de-cercle ; mais nous avons ſujet de croire que nos erreurs n'excedent pas pour la plupart cinq à ſix ſecondes. De-là la table des angles, *Liv. II*, n°. 21, ne donne pas 180 dégrés juſte pour chaque triangle, & en conſéquence il a fallu y faire une correction. Ces triangles ſont au nombre de 11, y compris ceux que forment les baſes. La ſomme des trois erreurs eſt dans le ſecond — 28 ſecondes, dans le ſeptieme + 22, dans le quatrieme + 20, dans le troiſieme + 17, dans les neuvieme & dixieme ∓ 16, dans le premier + 8, dans le cinquieme & le onzieme ∓ 6, dans le huitieme + 3, enfin dans le ſixieme — 2. Ces erreurs ſont la plupart en ſens contraires, & ſe détruiſent mutuellement, du Total d'erreurs.

moins en grande partie. Par conséquent elles influent d'autant moins dans la mesure de la méridienne. La somme des erreurs négatives n'égale pas celle des positives, parcequ'il manquoit 25″ à notre quart-de-cercle ; différence que nous avons conclue, suivant le n°. 236, tant de ces triangles, que de plusieurs autres triangles & observations, en prenant un milieu.

Erreur de réfraction.

263. La réfraction produit une plus grande erreur dans la hauteur de l'objet au-dessus de l'horizon, ou dans sa dépression ; & le changement continuel de cette réfraction, près de l'horizon, fait qu'on ne peut jamais bien évaluer l'erreur qui augmente encore davantage par la difficulté d'observer. Mais nous verrons bientôt, ainsi que je l'ai déja insinué, que cette erreur même, fût-elle beaucoup plus grande, n'en produit qu'une très petite dans la distance de l'objet, quoiqu'elle en produise une grande dans la hauteur absolue des montagnes.

Réduction au centre. Pl. I. fig. 2.

264. Pour apprécier ces erreurs, il suffit de considérer de quelle façon on déduit, des angles observés, & des bases, la mesure de la méridienne. Notre polygone se voit dans la figure 2 de la premiere planche. Suivant l'article 5 du Livre II, & la table qui s'y trouve au n°. 21. *a*L est la base de *Rimini*, *eb* celle de *Rome :* les stations A, B, C, D, E, F, G, H, I sont le dôme de *St Pierre*, & les monts *Genarro*, *Soriano*, *Fionchi*, *Tesio*, *Pennino*, *Catria*, *Carpegna*, *Luro*. Tous les angles de ces triangles ont été mesurés avec le quart-de-cercle ; & ils eussent été immédiatement & exactement connus par cette mesure, si l'observation eût été faite au centre du signal de la station. Mais parcequ'il est ordinairement bien plus commode d'observer à côté du signal, & que cela est même quelquefois absolument nécessaire, suivant l'espece de signal qu'on emploie, il y avoit toujours quelque petite correction à faire aux angles observés ; & elle se fait aisément en mesurant la distance du centre du signal au lieu de l'observation, & sa position ; au moyen de quoi on a la perpendiculaire tirée du centre du quart-de-cercle sur la ligne qui aboutit du centre du signal de la station au centre du signal observé.

265. En effet, connoissant ces angles non corrigés, & la premiere base *a*L, on aura la valeur du moins approchée de tous les côtés, premierement du triangle LH*a*; puis du triangle LHI, connoissant le côté LH; puis du triangle HGI, connoissant le côté HI; & ainsi de suite jusqu'à l'autre base *bc*, par les regles connues de la trigonométrie. Or la valeur du moins approchée de ces côtés sera connoître l'angle formé par les lignes tirées du centre du quart-de-cercle, & du signal voisin au signal observé. Soit (fig. 12. pl. III.) A le centre du signal, C le centre du quart-de-cercle, avec lequel on observe les signaux D, E; l'angle observé DCE étant connu, on demande l'angle DAE. On a déja la distance AC, & sa position par rapport aux lignes AE, AD: on aura donc aussi les perpendiculaires CI, CH; il est même ordinairement très facile de les mesurer, en déterminant à peu près les lignes AI, AH; & puisqu'on connoît d'ailleurs CD, CE, on fera cette analogie: CE ou CD est à CI ou CH, comme le rayon au sinus de l'angle CEI, ou CDH. Suite. Pl. I. fig. 2. Pl. III. fig. 12.

266. Or si les côtés CE, CD sont tous deux dans l'angle EAD, le point C se trouvant dans cet angle, les deux angles que nous venons de trouver doivent être retranchés de l'angle DCE, pour avoir l'angle DAE. Mais si C′ n'est pas dans l'angle, & qu'il soit au-delà d'un des côtés AE, l'un des côtés DC′ de l'angle observé passant dans l'angle DAE, & l'autre côté EC′ se trouvant tout entier hors de cet angle; on retranchera l'angle ADC′ du premier côté, & on ajoutera l'angle AEC′ du second. Si DC′ tomboit lui-même au-delà de DA, le point A se trouvant dans l'angle DCE, l'un & l'autre angle devroient s'ajouter à l'angle DC′E. Car si l'on prolonge EC, elle rencontrera DA en un point B: de même prolongeant EC′, elle rencontrera DA prolongée en B′; l'angle externe DCE sera égal aux deux angles internes opposés CBD, CDB, & l'angle CBD sera pareillement égal aux deux internes BAE, BEA. Donc retranchant de l'angle DCE l'angle CDB, on aura l'angle DBC; & retranchant de celui-ci l'angle BEA, ou CEA, on aura l'angle DAE; ce qu'il falloit démontrer en premier lieu. De même si de l'angle externe DC′E on retranche C′DB′, on aura DB′C′, Suite.

ou AB′E ; auquel ajoutant AEB′, ou AEC′, on aura l'angle externe DAE ; ce qu'il falloit démontrer en second lieu. La démonſtration pour le troiſieme cas approche fort de celle du premier ; car s'il faut retrancher les angles CDA, CEA de l'angle DCE, pour avoir l'angle DAE, il s'enſuit qu'il faudroit au contraire les ajouter, ſi C étoit en A, & A en C.

Moyen plus facile.

267. Mais on n'a pas même beſoin d'une meſure ſi approchée de CD, CE, non plus que de ces ſinus, pour trouver les angles en E ou D, qu'on doit ajouter ou retrancher de l'angle obſervé ; puiſque les diſtances CI, CH étant toujours très petites par rapport aux côtés CE, CD, elles ne peuvent répondre qu'à un petit nombre de ſecondes. Pour que l'angle CEI ſoit d'une ſeconde, CI doit être environ $\frac{1}{200000}$ de CE ; c'eſt-à-dire que CI étant d'un pied, CE doit être de 40 milles d'Italie : & ſi CE eſt plus grand ou plus petit, l'angle ſera au contraire plus petit ou plus grand. Donc ſi le nombre de pieds contenu dans la diſtance perpendiculaire CI, augmente autant, que CE eſt plus petite que 40 milles, ou qu'on le diminue à meſure que CE ſera plus grande que 40 milles, on aura le nombre de ſecondes qu'on doit retrancher ou ajouter ſuivant que le centre C du quart-de-cercle ſera en-deçà ou en-delà de AE. On voit qu'il ſuffit de ſavoir à peu près à combien de milles l'on eſt du ſignal obſervé, & de combien de pieds le centre du quart-de-cercle eſt éloigné de la ligne tirée du centre du ſignal voiſin au ſignal obſervé, pour ſavoir ce qu'on doit retrancher ou ajouter à l'angle.

Déterminer les côtés du polygone. Pl. I. fig. 2.

268. Les angles qu'on trouve dans la table du Livre II, ſont des angles ainſi corrigés. Il eſt clair que par leur moyen on peut avoir tous les côtés rectilignes du polygone, d'une baſe à l'autre, par ce théorême ſi connu de trigonométrie : les côtés ſont comme les ſinus des angles oppoſés. Mais pour parvenir d'une baſe à l'autre, il ſuffit de déterminer dans chaque triangle les côtés qui pourront ſervir pour le triangle ſuivant. C'eſt ce qu'a fait le P. *Maire* à l'endroit cité ; & c'eſt ainſi que de la premiere baſe L*a* (fig. 2. pl. I.) il eſt arrivé à la ſeconde *bc*, moyennant les côtés LH, HI, HG, GF, FE, FD, DC, CB, BA, B*c* ; & de la même maniere il pouvoit remonter de la ſeconde baſe *bc* à la premiere L*a*.

269. Or ces côtés rectilignes du polygone ne sont ni dans une surface réguliere de la terre, ni dans la direction de la méridienne. De-là il est besoin de deux réductions, l'une par laquelle on leur substitue les arcs qui leur répondent sur cette surface, ou qui sont terminés par des points de cette surface qui répondent perpendiculairement au-dessous des signaux, dont ils sont plus ou moins distans, à cause de l'inclinaison des côtés à l'horizon; l'autre par laquelle ayant trouvé la direction de la méridienne A*n*, qui passe par l'une des extrémités A du polygone, on réduit, au moyen des arcs B*d*, C*e*, D*f*, E*g*, F*h*, G*i*, H*l*, I*m*, L*n*, les points B, C, D, E, F, G, H, I, L aux points *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, *i*, *l*, *m*, *n* de la méridienne; ce qui donne enfin l'intervalle A*n* de la méridienne, intercepté par les deux extrémités du polygone.

Réduire les côtés du polygone à une surface réguliere de la terre.

270. La premiere réduction se fait très commodément par la méthode expliquée au même endroit par le P. *Maire*, n°. 24 & suivans. Elle consiste à réduire à l'horizon tous les angles du polygone, ou à leur substituer ceux qui leur répondent sur la surface réguliere de la terre, & qui sont compris entre les arcs terminés par les points de la surface placés directement au-dessous des signaux. Dans cette réduction on prend la surface de la terre pour une surface sphérique, & cela sans aucun danger d'erreur sensible. Car puisque la figure du globe terrestre differe très peu de celle d'une sphere, la différence de cette partie de sa surface qui répond au polygone, & plus encore de celle qui répond à chaque triangle en particulier, doit être absolument insensible.

Méthode pour cette réduction.

271. Voici pour cette même réduction une autre méthode assez analogue à la premiere. Supposons (pl. III. fig. 11.) que CD, CE soient des lignes dirigées du signal C à deux autres signaux, & qu'elles soient rencontrées en D & E par une sphere dont le centre est en C. Soit dans cette même sphere une ligne verticale CP dirigée au zénith répondant au point P, & CA, CB les intersections des plans verticaux PCD, PCE avec le plan horizontal qui passe par C, & par conséquent les angles ACD, BCE ceux qu'on a trouvés en mesurant la hauteur de D & E au-dessus de l'horizon. Si ces hauteurs,

Autre méthode par la trigonométrie sphérique.

ou du moins l'une des deux étoit nulle, les points D, E, du moins l'un des deux, tomberoient sur A & B, ou sur l'un de ces deux points; & si l'un des signaux, ou même tous les deux, au lieu d'être élevés étoient abaissés au-dessous de l'horizon, le point D ou E, ou l'un & l'autre, descendroit au-dessous de A & B, au contraire de ce qui est marqué dans la figure. Mais dans tous ces cas, connoissant les hauteurs ou les dépressions, on a PD & PE en retranchant les premieres, ou ajoutant les secondes à 90 d.

Elle se réduit à connoître un triangle sphérique.

272. Or les intersections des plans PCA, PCB avec la surface réguliere de la terre, seroient les deux arcs que nous avons dit, ou les deux côtés du polygone réduit à cette surface; & CA, CB sont perpendiculaires à l'intersection des plans de ces arcs: d'où il suit que l'angle qu'elles font entre elles est égal à l'angle sphérique de ces arcs mêmes, puisque par le n°. 57 des Elémens des solides, dans le Tome I de mes Elémens, cet angle ACB est celui que les plans de ces arcs forment entre eux, & que par le n°. 153 de mes Elémens de trigonométrie sphérique, même Tome, cet angle sphérique est celui de ces plans. Donc connoissant l'angle ACB, on a l'angle sphérique; & cet angle ACB, formé par des tangentes dans un plan horizontal, est ce qu'on appelle l'angle DCE réduit à l'horizon. Or on le trouve par la résolution du triangle sphérique DPE, dans lequel, étant données les hauteurs ou dépressions AD, BE, on a les côtés PD, PE, suivant le n°. précédent; de plus, le côté DE est la mesure de l'angle observé DCE: mais l'angle sphérique DPE est mesuré par l'arc AB, ainsi que l'angle rectiligne ACB, ou l'angle DCE réduit à l'horizon, ou l'angle du polygone réduit à une surface réguliere de la terre. Donc connoissant les hauteurs ou dépressions, & l'angle observé DCE, & par conséquent les trois côtés du triangle sphérique DPE, on a l'angle réduit DPE, qui est l'angle cherché.

Méthode facile. Cas particulier.

273. On se sert communément, pour trouver cet angle, d'une méthode de trigonométrie sphérique, aussi facile qu'elle est connue; mais celle que donne le P. *Maire*, Liv. 2, n°. 26 & suivans, est encore plus facile. Que si l'une des hauteurs ou dépressions étoit nulle, le point D tombant en A, on

devroit résoudre le triangle APE; mais on a bien plutôt fait de résoudre le triangle ABE, dans lequel, connoissant la hauteur ou dépression BE, & l'hypothénuse observée AE, on trouve le côté AB, qui mesure l'angle réduit à l'horizon, au moyen d'un triangle rectangle sphérique, dont parle le P. *Maire*, n°. 25.

Trouver les côtés du polygone réduit. Pl. 1. fig. 2.

274. Ayant donc trouvé (fig. 2. pl. I.) tous les angles du polygone réduit en arcs de grands cercles de la terre, on trouve tous les côtés, en commençant par le premier triangle, par cette analogie: le sinus de l'angle LH*a*, opposé à la base *a*L, est au sinus de l'angle HL*a*, ou H*a*L, comme la base *a*L opposée au premier angle, est au côté H*a*, ou HL opposé au second. Ce raisonnement doit s'appliquer successivement à tous les triangles de proche en proche; & par-là on aura la valeur de tous les côtés du polygone réduit, exprimés en pas ou en toises, ou autrement, suivant la mesure qu'on aura employée pour mesurer la base. Car dans tout triangle sphérique, les sinus des côtés sont comme les sinus des angles opposés. Or si les côtés sont petits par rapport à leurs cercles, ils sont à peu près dans la raison de leurs sinus, comme on peut s'en convaincre par l'inspection des tables; & le premier côté rectiligne *a*L, qui est la base actuellement mesurée, peut se prendre pour l'arc auquel il répond, puisque cet arc est à peine de 6 minutes. Ainsi après la réduction des angles, on trouve les côtés du polygone réduit à une surface sphérique, de la même maniere que les côtés rectilignes du polygone non réduit. Le P. *Maire* donne une liste de ces angles & de ces côtés, n°. 28, même Livre. Mais comme il y a eu quelques hauteurs & dépressions, qu'on n'a pu observer immédiatement avec une précision suffisante, nous verrons bientôt par quel moyen on a suppléé à ce défaut.

Trouver les segmens de la méridienne qui répondent aux côtés du polygone.

275. Après avoir trouvé par cette méthode tous les angles & les côtés du polygone réduit, il reste à trouver les segmens de la méridienne interceptés par les arcs B*d*, C*e* perpendiculaires à la méridienne. On peut avoir les arcs & les segmens par une observation du soleil, dont j'ai déja dit un mot. Le P. *Maire* traite ce point, Liv. II, art. 6, n° 30 & suivans; je le traiterai ici un peu plus au long. Premierement on doit

meſurer à une heure donnée avec le quart-de-cercle l'angle compris entre une ligne tirée d'un point donné à l'un des ſignaux, & une ligne tirée du même point au centre du ſoleil. Pour cela on dirigera l'une des lunettes ſur ce ſignal, enſorte qu'il paroiſſe au centre des fils, & l'autre ſur le ſoleil, en marquant les momens où les deux bords du limbe atteignent le fil perpendiculaire au plan du quart-de-cercle; ce qui fait connoître le moment où le centre a paſſé ſur ce fil. On examine auſſi le point du limbe auquel répond la ligne du verre dans cette poſition de l'alidade; après quoi on dirige les deux lunettes à un même objet, & l'angle compris entre ces deux poſitions de l'alidade eſt l'angle cherché.

Même ſujet.

276. Si le ſoleil décrit un arc peu incliné à l'horizon, tellement qu'il quitte le champ de la lunette avant que le bord oppoſé ait atteint le fil, ou ſi on ne veut pas attendre qu'il l'atteigne, il ſuffira de remarquer le moment où le premier bord y eſt arrivé, & d'ajouter ou retrancher de l'angle le demi-diametre du ſoleil, ſuivant que le centre du ſoleil ſera de l'autre côté, ou du même côté que le ſignal, par rapport à ce bord du limbe. Car il ne ſera pas difficile de meſurer le diametre apparent du ſoleil, & les tables aſtronomiques le donneront encore d'une maniere aſſez approchée. On eſt obligé de recourir à l'un de ces moyens près de l'équateur, où le ſoleil coupe l'horizon à angles droits.

Connoître l'angle de poſition. Pl. III. fig 11.

277. Or le moment de l'obſervation étant connu, on trouve dans les tables aſtronomiques la déclinaiſon du ſoleil; & par-là même ſa diſtance au pôle. De plus, dans un triangle ſphérique terminé au ſoleil, au zénith & au pôle, on connoît la diſtance du pôle au zénith; c'eſt le complément de la hauteur du pôle: l'on connoît auſſi l'angle au pôle, puiſque l'heure eſt donnée. On aura donc la diſtance du ſoleil au zénith, & l'angle au zénith, ou l'azimuth du ſoleil. Cette diſtance du ſoleil au zénith étant connue, on en retranchera la réfraction, qu'on trouvera dans les tables, pour avoir la diſtance apparente; & comme on connoît d'ailleurs la hauteur ou la dépreſſion du ſignal, on a tout ce qu'il faut pour réduire l'angle obſervé à l'horizon, par la méthode propoſée. Car ſi (fig. 11. pl. III.) CE eſt dirigée au ſoleil, CD

au

au signal, on aura PE; PD, avec l'angle observé DCE, & par conséquent l'angle APB, ou ACB: & parcequ'on connoît l'azimuth du soleil, ou l'angle que forme avec le méridien le cercle vertical PEB, qui passe par le soleil, on connoîtra aussi l'angle compris entre le même méridien, & le cercle vertical PDA, qui passe par le signal D; c'est-à-dire qu'on connoîtra le nombre de dégrés qui se comptent sur l'horizon depuis le point B jusqu'au nord, en tournant du nord à l'orient, jusqu'à ce qu'on arrive à ce que le P. *Maire* appelle, dans cet article, l'angle de position.

Exemple de la méthode.

278. On en voit un exemple dans le même article: de l'extrémité septentrionale de la plate-forme du college romain, nous observâmes le soleil, un peu avant son coucher, le 14 septembre 1753, & nous mesurâmes l'angle qu'il faisoit avec l'arbre qui servoit de signal sur le mont *Soriano*. Nous fîmes trois observations consécutives, qui sont marquées, n°. 31 de cet article 6, avec les angles observés, & les angles réduits. On voit, n°. 32, les trois distances du soleil au méridien, ou les trois distances du point B (fig. 11.) au midi de l'horizon: ce sont les complémens à deux droits de l'angle sphérique formé au zénith par le triangle qui se termine au soleil, au zénith & au pôle. Comme ces distances se prenoient depuis le midi, en tournant vers l'occident, & que l'arbre de *Soriano* étoit par rapport à nous dans la même direction, en tirant du couchant au nord, on les a ajoutées aux angles réduits du n°. 31; ce qui a donné trois distances de l'arbre de *Soriano* au midi de l'horizon, & la distance moyenne s'est trouvée 158°, 2', 35". Mais parceque cette déclinaison moyenne se compte depuis le midi, en tournant à l'occident, dans la même direction, suivant laquelle on tourne du nord à l'orient sur la droite, on lui ajoute les 180° qu'on compte du nord au midi, pour avoir l'angle de position, savoir 338°, 2', 35".

Autre réduction nécessaire.

279. On pourroit s'en tenir là, si l'observation avoit été faite au dôme de *St Pierre*; mais comme elle s'est faite au college romain, il faut encore une réduction pour avoir l'angle de position de cet arbre observé du dôme de *St Pierre* avec le méridien de ce dôme, ou de l'arc AC (fig. 2. pl. I.)

avec l'arc Ae, en comptant de Ae sur la droite, c'est-à-dire pour avoir le complément de l'angle eAC à quatre droits, afin d'en tirer les inclinaisons des autres côtés sur la méridienne, au moyen de quoi on pourra connoître les perpendiculaires abaissées sur la méridienne, & les segmens qu'elles y interceptent, suivant le n°. 269.

De la parallaxe du lieu de l'observation. Pl. III. fig. 13.

280 Cette réduction se voit au n°. 34, Liv. II; & l'on doit y considérer deux choses, savoir la parallaxe du lieu de l'observation par rapport à celui de la réduction, & la convergence des méridiens de ces mêmes lieux. Soit A (fig. 13. pl. III.) le dôme de *St Pierre*, C l'arbre de *Soriano*, M la plate-forme du college romain, MP le méridien de ce college, AP celui du dôme: si l'on imagine une ligne AN perpendiculaire à MP, une autre A*n* perpendiculaire à MC, & le petit arc AD parallele à MN; l'angle AC*n*, ou son alterne CAE, est ce que le P. *Maire* appelle en cet endroit la parallaxe du mont *Soriano*, & l'angle DAP est la convergence des méridiens. La perpendiculaire A*n* sert à trouver le premier angle, & AN donne le second: or supposé qu'on connoisse la distance AM, & les angles AMC, AMP, on connoîtra A*n* & AN; car on a cette proportion, AM est à A*n*, ou AN, comme le rayon au sinus de l'angle opposé AMC, ou AMP.

De la convergence des méridiens.

281. Et d'abord l'angle AC*n* se trouve par cette analogie: AC est à A*n*, comme le rayon au sinus de l'angle AC*n*; car AC, A*n* sont en raison de leurs sinus, & de petits arcs tels que ceux-ci sont comme leurs sinus. On a donc la parallaxe, que le P. *Maire* a trouvée au même endroit de 1° 53′ 28″. Pour la convergence des méridiens, il y a plusieurs moyens de l'avoir : en voici un des plus faciles. Connoissant le nombre de pas ou de toises, ou d'une autre mesure quelconque, qu'on compte sur un arc quelconque, comme sur l'arc AN, il est aisé de les convertir en minutes & secondes d'un grand cercle, d'une maniere du moins assez approchée, pour n'en avoir à craindre aucune erreur. Car on peut connoître avec assez de précision, pour le cas présent, la mesure d'un grand cercle de la terre, tant par les mesures de dégrés qui ont précédé la nôtre, que par le polygone même de la figure 2, quoiqu'imparfaitement réduit, & sans égard à la

convergence des méridiens. De-là on pourra faire cette proportion : le nombre de pas ou de toises d'un dégré, est à celui de l'arc AN comme 60′ à un quatrieme terme, qui sera le nombre de minutes de l'arc AN. Maintenant dans le triangle sphérique PNA rectangle en N, connoissant l'hypoténuse PA, complément de la hauteur du pôle, & le côté AN, on aura l'angle PAN : & parceque DA, MN étant paralleles, les angles alternes DAN, ANM sont égaux, il s'ensuit que l'angle trouvé PAN est le complément de l'angle cherché DAP, qui est l'angle de la convergence. Le P. *Maire* l'a trouvé de 1′ 7″.

Théorème pour cette convergence.

282. On peut avoir plusieurs beaux théorèmes sur cette convergence. La trigonométrie sphérique donne cette regle pour connoître un angle, étant donnée la base, avec le côté adjacent : le rayon est au co-sinus de l'angle, comme la tangente de la base à la tangente du côté adjacent. Donc puisque le sinus de la convergence cherchée PAD est le co-sinus de l'angle PAN, & que la tangente de AP est la co-tangente de la hauteur du pôle, ou de la latitude du lieu ; on n'a qu'à substituer ces noms pour avoir en raison alterne, puis en renversant, le théorème suivant : *la co-tangente de la latitude du lieu est au rayon, comme la tangente de AN est au sinus de la convergence cherchée PAD.* Ou parcequ'en tout arc le rayon est à la tangente, comme la co-tangente au rayon ; ayant réduit AN en portion de grand cercle, on aura ce théorème : *le rayon est à la tangente de la latitude du lieu A, comme la tangente de AN au sinus de la convergence PAD.* Si l'on aime mieux se servir de la différence APM des longitudes, on aura, par la sixieme regle de ma trigonométrie sphérique, en raison alterne, cette analogie : le rayon est au co-sinus de la base AP, ou au sinus de la latitude du lieu A, comme la tangente de l'angle P à la co-tangente de l'angle PAN, ou à la tangente de l'angle PAD ; d'où l'on tire ce théorème : *le rayon est au sinus de la latitude, comme la tangente de la différence des longitudes à la tangente de la convergence des méridiens.* On peut encore simplifier ce théorème pour de petits angles, en prenant les angles pour leurs tangentes ; car les petits arcs, qui mesurent ces angles, ne different pas

ſenſiblement de leurs ſinus & de leurs tangentes. Donc le rayon eſt au ſinus de la latitude du lieu, comme une petite différence de longitude eſt à la convergence des méridiens.

Autre théorème plus général.

283. Ce dernier théorème pourroit ſe démontrer immédiatement pour le cas d'une petite différence de longitude. En général, pour deux arcs de méridiens terminés au même parallele, ou à deux points pris dans la même latitude, quelle que ſoit leur différence de longitude, on a le théorème ſuivant: *le rayon eſt au ſinus de la latitude ; comme le ſinus de la moitié de la différence des longitudes eſt au ſinus de la moitié de la divergence des méridiens.* Mais en voilà aſſez ſur ces théorèmes. Obſervons ſeulement que dans les méthodes, où l'on ſe ſert de la différence des longitudes, il faut, pour réduire le nombre de toiſes ou de pas en arc parallele, premierement faire cette proportion: le rayon eſt au co-ſinus de la latitude, comme le nombre de pas ou de toiſes d'un dégré de grand cercle, au nombre de pas ou de toiſes d'un dégré du parallele; puis celle-ci, ce dernier nombre eſt au nombre propoſé, comme 60′ au nombre de minutes cherché: & l'on ne doit point craindre d'erreur ſenſible dans ce dernier terme, ſi c'eſt un petit nombre, quoiqu'on n'eût peut-être pas pris le nombre juſte de pas ou de toiſes qui ſe trouvent dans un dégré de grand cercle.

De l'angle de poſition.

284. Pour revenir au point d'où nous ſommes partis; connoiſſant les angles de parallaxe & de convergence, on a la poſition de AC par rapport au méridien AP. Car ayant mené AE parallele à MC, l'angle EAD ſera égal à l'angle CMP (1). Or nous avons vu que pour avoir la poſition de CM par rapport à MP, il falloit retrancher de quatre droits l'angle CMP égal à EAD; ici il en faut retrancher l'angle CAP; d'où il ſuit que ce qu'on retranche eſt augmenté de la convergence DAP, & diminué de la parallaxe CAE, & par une conſéquence ultérieure, que l'angle de poſition eſt augmenté de la parallaxe, & diminué de la convergence. Ainſi

(1) Il y a en cet endroit du texte latin pluſieurs fautes d'impreſſion que le P. *Boſcovich* a lui même reconnues: mais il n'avoit pu veiller par lui-même à l'impreſſion de ſon Livre.

dans l'endroit cité, le P. *Maire* retranche de la parallaxe 1°, 53', 28" la convergence 1', 7", & ajoute le reste 1°, 52', 21" à la premiere position 338°, 2', 35"; ce qui donne pour l'angle de position de *Soriano*, vu du dôme de *St Pierre*, 339°, 54', 56".

285. Cet angle fait connoître celui que forme AB (fig. 2. pl. I.) avec le même arc A*n*, c'est-à-dire l'angle de position du mont *Genarro*: car suivant la table du n°. 28, Liv. II, l'angle CAB est de 78°, 59', 11"; d'où retranchant l'angle CA*n*, complément à quatre droits de l'angle de position du point C, savoir 20° 5' 4", il reste pour l'angle de position *n*AB du point B vu de A 58°, 54', 7". Maintenant si l'on tire du point C un arc C*p* parallele à A*n*, les angles formés par C*p* & les lignes CF, CD, CB, CA, en tournant du nord à l'orient, sur la droite, sont ce que le P. *Maire* appelle les angles de position des points F, D, B, A vus du point C, sans avoir égard à la convergence des méridiens. On voit d'abord comment de l'angle de position du point C vu de A, on peut tirer l'angle de position du point A vu de C. Car dès que ce dernier point est plus occidental, comme dans le cas présent, ce qui donne à son angle de position plus de 180°, il suffit d'en ôter 180°, en prenant, comme on le peut faire ici, un arc de cercle pour une ligne droite. Au contraire, s'il étoit plus oriental, comme B, ce qui rend l'angle de position moindre que deux droits, il faudroit lui ajouter deux droits. Pour s'en assurer, il suffit de faire attention aux propriétés des paralleles. **Connoître une position réciproque. Pl. 1. fig. 2.**

286. Dans le cas présent, l'angle de position du point C, vu de A, est de 339°, 54', 56",; celui de A, vu de C, sera donc de 159°, 54', 56"; & comme celui de B, vu de A, est de 58°, 54', 7", celui de A, vu de B, seroit de 238°, 54', 7". Or connoissant l'angle de position du point A, vu de C, & les angles que font avec CA les lignes CB, CD, CF, on aura aussi leurs angles de position, en retranchant les angles qu'elles font avec CA de l'angle de position du point A, si elles s'écartent à gauche de CA par rapport au point C, & en les ajoutant si elles vont à droite. Ainsi l'angle ACB étant, suivant la table du P. *Maire*, n°. 28, de 32°, 12', 14", & se **Exemple de cette méthode.**

trouvant sur la gauche, on l'ôtera de 159°, 54′, 56″; ce qui donnera, pour l'angle de position du point B, vu de C, 127°, 42′, 42″. De même ayant retranché de celui-ci l'angle BCD qui dans cette table est de 70°, 10′, 19″, il reste pour l'angle de position de D, vu de C, 57°, 32′, 23″. Enfin ôtant de ce dernier l'angle DCF, qui se trouve dans la même table de 49°, 27′, 33″, on a 8°, 4′, 50″ pour l'angle de position du point F vu de C.

Suite. Pourquoi on a omis quelques positions.

287. On peut de même trouver les angles de position de tous les points vus de B; & remonter de l'un des points B, C au point D, comme de A on est remonté à B & C, pour en déduire les angles de position de tous les points vus de D, jusqu'à ce qu'on soit parvenu à la derniere station L du polygone. C'est ainsi qu'on a trouvé tous les angles de position marqués au n°. 34, Liv. II. Mais on n'y a pas mis la position du dôme de *St Pierre*, vu de *Soriano*, parcequ'on peut la tirer de celle de *Soriano* en retranchant de celle-ci 180°, comme nous l'avons dit. De même parmi les angles de position des points vus de *Fionchi*, on n'a point marqué celui de *Soriano*, d'où l'on a pris l'angle de position de *Fionchi*. On en a usé de la même maniere à l'égard des autres positions réciproques, parcequ'on peut toujours les avoir en ajoutant ou retranchant 180°, suivant que la position précédente est au-dessous ou au-dessus de ce nombre de dégrés. Par la même raison on a omis les positions de tous les points vus de B, ou du mont *Genarro*, dont on a marqué la position par rapport aux points A, C, D, & celles de tous les points vus de E, ou de *Pennino*, dont on a la position par rapport à D, F, G, enfin celles de tous les points vus du mont *Luro* I, dont on a déja la position par rapport aux points G, H, L. D'ailleurs les seules positions marquées à l'endroit cité, sont plus que suffisantes pour tout ce qui nous reste à dire sur la mesure du dégré.

Double avantage des angles de position.

288. On tire un double avantage de ces angles de position. Car en premier lieu, les côtés de tous ces triangles étant d'ailleurs connus de grandeur, leur position sert à déterminer les perpendiculaires C*e*, F*h*, &c. B*d*, D*f*, &c. & les segmens A*e*, A*h*, &c. A*d*, A*f*, &c. de la méridienne; de plus, on peut comparer les observations faites à *Rome*, sur la position

du polygone, avec celles de *Rimini*. Nous allons dire de quelle façon on doit s'y prendre.

289. Et d'abord dans le triangle rectangle A*e*C on a l'angle CA*e*, complément à quatre droits de l'angle de position du mont *Soriano*, vu du dôme de *St Pierre*. On connoît de plus le côté AC par le n°. 38. On trouvera donc A*e* & *e*C par les regles de la trigonométrie sphérique, qui, lorsqu'il ne s'agit comme ici que de petits arcs, lesquels sont proportionnels à leurs sinus, reviennent à celles de la trigonométrie rectiligne. On voit dans la figure de quel côté se doivent prendre ces lignes. Du reste, & ceci doit s'entendre aussi de tous les autres triangles rectangles, on déduira l'angle formé par une ligne tirée d'un signal à l'autre avec l'arc A*n*, ou un arc parallele, de la position du dernier signal vu du premier, en prenant pour cela cette position même, si elle est au-dessous de 90°; son complément à deux droits, si elle est au-dessus de 90°, & au-dessous de 180°; sa différence au demi-cercle, si elle est au-dessus de deux droits, & au-dessous de trois; & son complément à quatre droits, si elle excede trois droits. Ce triangle résolu, le côté parallele à la méridienne A*n*, sera dirigé du premier signal vers le nord, dans le premier & le quatrieme cas; & au midi dans le second & le troisieme: pour la perpendiculaire, elle se tirera de ce signal à l'orient dans les deux premiers cas, & dans les deux derniers à l'occident.

Moyen de se procurer le premier.

290. De même dans le triangle rectangle A*d*B, connoissant la position du mont *Genarro* B, vu du dôme de *St Pierre* A, on aura A*d* & *d*B. Supposons que l'arc C*q*, parallele à A*n*, soit rencontré en *p* & *q* par les perpendiculaires D*f*, *h*F: ce petit arc ressemble fort à celui d'un grand cercle, & pour la grandeur, & pour la position, & il peut être pris pour une ligne droite. Or dans les triangles C*p*D, C*q*F, connoissant les positions des points D & F, vus de C, on aura les angles en C, & par conséquent les lignes C*p*, C*q*, paralleles & égales à *ef*, *eh*, qui, ajoutées séparément à A*e*, donnent A*f* & A*h*. On trouvera de même D*p*, *q*F; & ôtant de la premiere la ligne *pf* égale à C*e*, & la seconde de *qh* égale à la même C*e*, il restera D*f*, F*h*. Pareillement si les perpendiculaires E*g*, G*i*, H*l*, rencontrent en *r*, *s*, *t* un arc tiré par le point F,

Même sujet.

& parallele à A*n*; on aura, dans les trois triangles F*r*E, F*s*G, F*t*H, les angles en F, par les positions des trois points E, G, H. Donc on aura les côtés F*r*, ou *hg*, qui, retranché de A*h*, laisse A*g*; F*s*, ou *hi*, qui, ajouté à A*h*, donne A*i*; F*t*, ou *hl*, qui, ajouté à A*h*, donne A*l*; & les côtés E*r*, G*s*, H*t*, dont les deux premiers seront diminués de *rg*, *si*, ou F*h*, & le troisieme augmenté de *tl* égal à F*h*, pour avoir E*g*, G*i*, H*l*. Enfin si l'arc décrit du point H, & parallele à A*n*, est rencontré en *u* & *x* par les perpendiculaires I*m*, L*n* prolongées; connoissant la position des points I & L, ou du mont *Luro* & de l'embouchure de l'*Ausa*, on aura H*u*, H*x*, ou *ml*, *ln*, & par-là même A*m*, A*n*; & parceque *um*, *xn* sont égales à H*l*, on aura aussi I*m*, L*n*.

Qu'un certain nombre de positions suffit.

291. On voit que les positions marquées, n°. 34, Liv. II, suffisent pour trouver les perpendiculaires abaissées sur la méridienne, & les segmens de la méridienne. On peut même se passer ici de la position des points vus de *Fionchi*, & de celle de *Genarro* vu de *Soriano*, quoiqu'elles pussent servir, si l'on s'y prenoit d'une autre façon, pour résoudre les triangles. Ces perpendiculaires & ces segmens sont marqués à la fin de l'article cité; c'est le premier avantage qu'on retire des angles de position; mais il n'est pas le seul.

Du second avantage.

292. On a par la méthode proposée n°. 287, pour l'angle de position du mont *Luro* I vu de L, embouchure de l'*Ausa*, 137°, 53′, 58″. Cet angle n'est point formé par le méridien du lieu L, mais par un cercle parallele à la méridienne A*n*. Or par la résolution de tous ces triangles, on trouve, n°. 39, Liv. II, *n*L=7139.8 pas; ce qui fait environ 7 $\frac{1}{8}$ milles d'Italie; & par la méthode exposée ci-dessus, n°. 281, on a à cette distance 5′, 34″ pour la convergence des méridiens, qui est l'angle d'inclinaison du méridien du lieu L sur la méridienne A*n* prolongée. Ainsi l'angle que forme la ligne LI avec ce méridien, est plus grand de 5′ 34″, qui, ajoutées à la premiere position, donnent pour l'angle de position du point I vu de L, par rapport au méridien du lieu L, 137°, 59′, 32″.

Moyen de se le procurer

293. Or nous avons encore le même angle par les observations de *Rimini* (n°. 36. Liv. II.), & par la méthode exposée,

n°.

n°. 284. Car des trois observations du soleil levant à l'horizon de la mer, faites dans la maison de M. *Garampi*; on déduit l'angle de position du mont *Luro* vu de cette maison, & il se trouve de 135°, 21', 51". Connoissant la distance de cette maison à l'embouchure de l'*Ausa*, & sa position par rapport à ce point, on trouve, par la méthode du n°. 280, pour la parallaxe du mont *Luro*, observée de cette montagne même, 2°, 35', 34"; c'est l'angle compris entre les lignes tirées du mont *Luro* à la maison de M. *Garampi*, & à l'embouchure de l'*Ausa*, angle qui doit être ajouté à la position du mont *Luro* vu de cette maison. On trouvera aussi, pour la convergence des méridiens, ou l'inclinaison du méridien de l'embouchure de l'*Ausa* sur celui de la maison de M. *Garampi*, qui est plus orientale, 39", qui répondent à une distance de 835 pas, & qu'il faut aussi ajouter. Ainsi l'angle de position du point I vu de L, est de 137°, 58', 4": cet angle differe de près d'une minute & demie de celui qu'on a trouvé par les observations de *Rome*; mais nous donnerons bientôt la raison de cette différence, & nous ferons voir en même tems que cela ne change point sensiblement la mesure du dégré, dont il est ici uniquement question. Finissons ce qui a rapport à l'usage des observations faites avec le quart-de-cercle.

294. Selon la table du n°. 39, Liv. II, A*n* est de 161127.9 pas, & le point *n* est déterminé par la ligne L*n*, qui équivaut à une ligne droite perpendiculaire, tirée du point L sur A*n*: mais le parallele qui passe par L, ayant son pôle dans la méridienne A*n* prolongée au-delà de *n*, de 46°, ou environ, il doit couper la méridienne en-deçà du point *n*. Il faut chercher cette différence, & la retrancher de A*n* pour avoir l'intervalle compris entre les paralleles du dôme A & de l'embouchure L de l'*Ausa*: or on la trouvera par la méthode dont nous nous sommes servis, n°. 140, pour avoir (fig. 19. pl. II.) l'erreur provenante de la déviation de la lunette du secteur. Soit en effet P le pôle, L' l'embouchure de l'*Ausa*; L'M sera la perpendiculaire tirée de cette embouchure sur la méridienne, L'O l'arc du parallele, & OM la différence qu'on doit retrancher. Or par le n°. 141, le sinus de PL' est à son co-sinus, ou sa tangente est au rayon, ou le rayon à sa

Correction pour la distance de la perpendiculaire au parallele.

co-tangente, c'est-à-dire, ou le rayon à la tangente de la latitude du lieu L', comme le sinus verse de l'arc L'M, est à MO. De plus, PL' est le complément de la déclinaison du lieu L', & le sinus verse de l'arc L'M est la troisieme proportionnelle au diametre & à la corde de cet arc. Donc, puisque L'M a été trouvée de 7139.8 pas, & que le diametre de la terre, qu'il n'est pas nécessaire ici de connoître si exactement, est d'environ 8544000, on aura pour le sinus verse de l'arc L'M 5.9, & par le théorème proposé, on trouvera pour l'arc MO 5.7.

Distance des paralleles. Pl. I. fig. 2.

295. Ayant donc retranché 5.7 pas de l'intervalle *An* (fig. 2. pl. I.) ou de 161127.9, & ayant ajouté 269 pas, dont la salle du college romain est plus méridionale que le dôme de *St Pierre*, & retranché 139.1, dont la maison de M. *Garampi* est plus méridionale que l'embouchure de l'*Ausa*; on a enfin l'intervalle des paralleles qui passent par les lieux où les observations ont été faites, savoir 161252.1 pas. Cette mesure doit être corrigée par les observations de *Rimini* sur la position du polygone, lesquelles cependant l'augmentent à peine de trois pas, comme nous le verrons bientôt. Il faut encore la réduire en toises, & c'est ce que nous ferons dans le chapitre suivant, où nous donnerons le rapport du pas à la toise. Enfin il faut comparer ce nombre de toises à l'amplitude de l'arc céleste, déterminée par le chapitre précédent, pour avoir la mesure du dégré que l'on cherche.

Pourquoi on s'est étendu sur ce sujet.

296. Telle est la suite d'opérations par laquelle les observations faites avec le quart-de-cercle, servent à déterminer la grandeur du dégré. Je me suis un peu étendu sur ce point, afin que si quelqu'un de ceux qui sont peu exercés dans ces sortes d'opérations, vouloit entreprendre quelque part une semblable mesure, il pût trouver ici la méthode d'y procéder. Cela étoit encore nécessaire pour évaluer avec plus de précision les erreurs qu'on auroit pu commettre, pour vérifier nos résultats, & discuter les observations mêmes sur lesquelles ils s'appuient, comme nous allons le faire nous-mêmes.

297. Pour commencer par la position du polygone, relativement à la méridienne; la différence de près d'une minute & demie qu'on y a trouvée (n°. 293) entre les observations

de *Rome* & celles de *Rimini*, vient de plusieurs causes. Premierement, pour déterminer, par l'observation de *Rome*, le dernier côté du polygone, il faut (n°. 287) parcourir tous les angles du polygone, dans chacun desquels on peut commettre une erreur de 10 secondes. En second lieu, il peut se trouver quelque différence dans la réduction du côté qui joint la salle du college romain avec la premiere montagne, au côté qui joint cette montagne avec le dôme de *St Pierre*, comme aussi dans la réduction de la maison de M. *Garampi* à l'embouchure de l'*Ausa*. De plus, il y a quelque erreur dans l'estimation de l'angle, dans les observations même astronomiques, &, ce qui est le principal, dans la pendule qui marque le moment de l'observation, duquel dépend l'azimuth du soleil. Pour peu que le mouvement de la pendule soit irrégulier, ou seulement s'il y avoit une augmentation ou diminution considérable dans la chaleur, cette derniere erreur pourroit aisément produire un très grand effet : car à chaque seconde de tems, le soleil parcourt 15 secondes de son parallele, qui produisent aisément dans l'azimuth une erreur de 10". J'ai quelque raison de soupçonner dans la pendule de *Rimini* une erreur de quelques secondes, à cause de la longueur du tems écoulé depuis le midi de la veille jusqu'à l'observation du soleil levant. Quoique ces erreurs s'effacent en grande partie, leur somme peut aisément monter à une minute & demie, en mettant une seconde d'erreur pour chaque observation, & un bien plus grand nombre pour la derniere.

Différence des observations pour la position du polygone.

298. Mais le point capital est qu'une erreur même beaucoup plus considérable dans la position du polygone, n'en produit qu'une très petite dans le segment de la méridienne, intercepté par les paralleles des points A & L (fig. 1. pl. I.). On trouve l'erreur produite par une minute & demie, en supposant la premiere position du *Soriano*, vu du dôme de *St Pierre*, d'une minute & demie plus petite, & faisant un nouveau calcul, par la méthode du n°. 288 & suivans, pour avoir une nouvelle valeur de An, d'où l'on retranchera l'intervalle compris entre Ln, & le parallele du lieu L. Mais dès qu'il ne s'agit, comme ici, que d'une légere différence, on peut abréger en cette maniere.

Connoître l'erreur qui en résulte. Premiere méthode.

Seconde méthode. Pl. I. fig. 2, 3. 14.

299. Les points A, *n*, L (fig. 14. pl. III.) sont les mêmes que dans la figure 2, planche I; A*n'* est une autre méridienne plus proche du point L, sur laquelle on abaisse la perpendiculaire L*n'*. Comme on fait le nombre de pas de A*n*, *n*L, & à peu près celui qui se compte sur un dégré, on pourra réduire ces deux lignes en parties de grand cercle. Ainsi dans le triangle sphérique A*n*L, rectangle en *n*, on aura l'hypoténuse AL, & l'angle *n*AL, d'où retranchant l'angle *n*A*n'*, il reste l'angle *n'*AL, au moyen duquel, & de l'hypoténuse AL, on aura A*n'* & L*n'*, en parties de grand cercle, qu'il sera aisé de réduire en pas.

Troisieme méthode.

300. Cette méthode est générale, de quelque grandeur que soient ces triangles: mais s'ils ne s'étendent pas au-delà d'un ou deux dégrés, on peut encore abréger par la trigonométrie rectiligne. Car connoissant A*n*, *n*L, on trouve l'angle *n*AL par cette analogie: A*n* est à *n*L, comme le rayon à la tangente de cet angle. Cet angle connu, on en retranche l'angle *n*A*n'* pour avoir l'angle *n'*AL; ensuite de quoi on trouve A*n'* par cette analogie: le co-sinus de l'angle *n*AL est à celui de l'angle *n'*AL pour le rayon commun AL, comme A*n* est à A*n'*.

Quatrieme méthode.

301. Enfin si l'angle *n*A*n'* est petit, on abrégera encore davantage en cette sorte: soit I le point d'intersection de A*n'* & L*n*; A*n* pourra s'égaler à AI, en prenant *n*I pour un arc de cercle décrit du point A comme centre. Or l'angle *n'*LI est égal à l'angle *n*AI, & L*n'* est à peu près égale à L*n*. On a donc cette proportion: le rayon est au sinus de l'angle *n'*LI, ou *n*AI, comme L*n'* ou L*n* à I*n'*. Or I*n'* est la différence de A*n* à A*n'*; & parceque le petit intervalle intercepté par la perpendiculaire L*n* ou L*n'* & l'arc du parallele dont nous avons parlé (n°. 294) est sensiblement le même de part & d'autre, comme on le peut déduire du théorème proposé là même, il suit que cette petite ligne I*n'* est la différence de deux arcs de méridien, aboutissans d'une extrémité du polygone à l'autre, provenant de la différence d'inclinaison du méridien sur la ligne AL.

Théorème général.

302. De-là on tire le théorème suivant: *le rayon est au sinus de la différence d'inclinaison du méridien, comme la distance de*

l'extrémité du polygone à la méridienne, déterminée par la premiere position, est à la différence des arcs du méridien, compris, en conséquence de ces suppositions, entre les paralleles qui passent par les extrémités des lignes inclinées; différence qu'on doit ajouter à l'arc qui forme le plus grand angle avec la ligne qui joint ces deux extrémités. Dans le cas présent, la différence d'inclinaison est 1′ 28″, dont le sinus est 4266, pour le rayon 10000000; & par le n°. 292, la distance L*n* est de 7139.8 pas. On a donc cette proportion 10000000 est à 4266, comme 7139.8 à un quatrieme terme, qui se trouve 3.0; & si l'on doit avoir égard à cette différence, on l'ajoutera à l'arc A*n*, qui, par le n°. 294, est de 161127.9 pas, suivant les observations de *Rome*, pour avoir, suivant celles de *Rimini*, 161130.9, mêmes nombres que ceux qui sont marqués Liv. II, n°. 37: & prenant un milieu, on aura 161129.4; d'où l'on déduit, par la méthode du n°. 295 pour l'arc du méridien intercepté par les deux observatoires, l'espace de 161253.6 pas, d'un pas & demi plus grand que le premier résultat. Ce qui n'ajoute pas une demi-toise à la mesure du dégré: différence insensible, comme je l'ai dit plus haut.

303. Voyons maintenant l'erreur que peuvent produire dans cette mesure les angles du polygone, qui servent à déterminer les côtés rectilignes inclinés à l'horizon, & ces côtés mêmes réduits à une surface réguliere de la terre, quoiqu'encore inclinés sur la méridienne, enfin ces côtés réduits à la méridienne, ou à l'arc intercepté par les paralleles des lieux où se sont faites les observations astronomiques. Et d'abord voyons quelle erreur peut produire, dans la réduction du polygone à une surface réguliere de la terre, l'erreur qu'on auroit commise dans l'observation des hauteurs ou des dépressions. De l'erreur des angles.

304. Dans la figure 15, planche III, les points A, D, P, E, B sont les mêmes que dans la figure 11, suivant le n°. 271; c'est-à-dire que PD, PE sont les complémens des hauteurs ou dépressions des signaux D, E, l'arc DE la mesure de l'angle observé, AB celle de l'angle réduit à l'horizon; & comme nous l'avons vu au même endroit, l'angle DPE sera la mesure du côté DE réduit à une surface réguliere de la terre. Supposons maintenant qu'il se soit glissé quelque erreur dans Théorème de M. *Cotes*. Pl. III. fig. 15.

la mesure de la hauteur ou de la dépression, ensorte qu'au lieu du triangle DEP on ait le triangle DE'P, dans lequel le côté PD est absolument le même, le côté DE' égal à DE, & le côté PE' differe de PE de la valeur de IE, l'arc E'I ayant pour pôle le point P; & à cause que cet arc est très petit, on peut le regarder comme étant perpendiculaire à EI. De plus, les arcs DE, DE' étant égaux, l'arc EE' aura pour pôle le point D, & pourra de même se prendre pour un arc perpendiculaire à l'arc DE. Ainsi l'angle IEE' sera le complément de l'angle DEP; EI sera l'erreur commise dans l'observation de la hauteur ou de la dépression; & BB' l'erreur qui en résulte dans l'angle réduit. Or dans le triangle rectangle EIE', le rayon est à la tangente de l'angle IEE', ou à la co-tangente de l'angle DEP, comme EI est à IE'. De plus, le sinus de PE' est au sinus de PB', ou au rayon, comme IE' est à BB'. Donc, par égalité troublée, le sinus de PE', ou, ce qui est à peu près le même, le sinus de PE est à la co-tangente de l'angle DEP, comme EI est à BB'. Cette évaluation est de M. *Cotes*, dans l'ouvrage qui a pour titre, *Æstimatio errorum in mixta mathesi.*

Evaluation de l'erreur.

305. Connoissant donc les côtés du triangle DPE, on aura le rapport de EI, ou de l'erreur commise dans la mesure de la hauteur ou de la dépression, à BB', ou à l'erreur qui en résulte dans l'angle réduit. Car ayant cet angle, on trouve l'angle DEP par cette analogie: le sinus de DE est au sinus de DP, comme le sinus de l'angle DPE, qu'on a déja trouvé, au sinus de l'angle DEP; & cet angle étant connu, on aura sa co-tangente, & par conséquent le rapport du sinus de PE à cette co-tangente.

Que cette erreur est petite; & pourquoi.

306. Si l'angle DEP est droit, l'erreur s'évanouit, puisque la co-tangente d'un angle droit est nulle. Et parceque AD, BE étant fort petits, l'angle DEP approche fort de l'angle droit ABP, il est évident qu'il ne peut y avoir qu'une très petite erreur dans l'angle réduit. Car puisque le sinus de PE est presque égal au rayon, si l'angle DEP est moindre d'un dégré qu'un angle droit, sa co-tangente sera la tangente d'un dégré; & puisque le rayon est à peu près à la tangente d'un dégré, comme 57 est à 1, il s'ensuit que pour chaque minute

d'erreur dans la mesure de la hauteur, il se trouvera à peine une seconde d'erreur dans l'angle réduit.

Autre preuve

307. Pour se convaincre de la petitesse de cette erreur, il suffit de comparer la table du n°. 28, Liv. II, où sont les angles réduits, avec celle du n°. 21, même Livre, où sont les angles observés: on verra qu'ils ne sont pas fort différens les uns des autres. Dans les trois premiers triangles la différence va à peine au-delà d'une minute: il n'y a qu'un cas où elle approche de deux minutes; dans presque tous les autres elle est au-dessous d'une minute, très souvent même elle se réduit à un petit nombre de secondes. Or en consultant la table qui est à la fin du même Livre, on verra que les hauteurs & les dépressions étoient souvent de plus d'un dégré, très souvent de plus de 30′, ordinairement de plusieurs minutes, & que lorsqu'elles n'étoient que de quelques minutes, la réduction ne produisoit dans l'angle qu'une différence d'un très petit nombre de secondes. Il demeure donc pour constant qu'une erreur de deux, ou même de trois minutes dans l'observation de la hauteur, produit rarement une erreur d'une seconde dans l'angle réduit, presque jamais une erreur de deux ou trois secondes; ainsi quoiqu'on n'ait pas pris les hauteurs & les dépressions avec autant de précision que les angles du polygone, on n'en doit cependant craindre aucune erreur notable en ce qui a rapport à la mesure du dégré.

Observations des hauteurs & dépressions.

308. La plupart des observations des hauteurs & des dépressions se trouvent dans cette table. Il en manque quelques-unes; mais fort peu de celles dont nous avons fait usage dans la réduction. Celles qui manquent sont celles du mont *Tesio* & du dôme de *St Pierre*, vus de *Soriano*, celle de *Tesio* vu de *Fionchi*, celles de *Soriano* & de *Fionchi* vu de *Tesio*, & celle du mont *Luro* vu de *Catria*. Nous n'avons pu faire ces observations: tantôt un nuage nous déroboit la vue des signaux; tantôt nous étions surpris par la nuit. Car comme ces observations ne demandent pas une exactitude si scrupuleuse, & qu'on peut même y suppléer aisément; dès que nous étions arrivés sur une montagne, nous commencions par prendre les angles du polygone, & nous prenions ensuite les hauteurs. Or il nous est souvent arrivé de trouver toutes les montagnes

enveloppées de nuages; ce qui nous a quelquefois obligés, comme je l'ai marqué au Livre I, de monter jusqu'à dix fois sur la même montagne, & sans aucun fruit. Lorsque le ciel nous étoit un peu plus favorable, nous avions quelquefois peine à voir sortir un signal d'un nuage, encore n'étoit-ce que pour y rentrer bientôt après; d'autres fois, au défaut d'un nuage, c'étoit un brouillard qui nous en déroboit la vue, ou bien des observations plus importantes emportoient tout notre tems, & ne nous laissoient plus de jour pour celles-ci. Mais il étoit aisé, comme je viens de le dire, de suppléer à ce défaut, ou par les observations précédentes, ou par les suivantes, & d'une maniere assez approchée, pour n'en avoir à craindre aucune erreur sensible dans la mesure du dégré; & c'est pour cela que nous n'avons pas jugé à propos d'entreprendre de nouveaux voyages, dont le succès eût été d'ailleurs incertain, & qui n'auroient abouti qu'à nous donner une peine inutile, & à nous faire perdre du tems.

Moyens de suppléer à ces observations. Pl. III. fig. 16.

309. Qu'on puisse suppléer à ces observations, rien de plus évident. Car dès qu'on a la hauteur ou la dépression d'un signal par rapport à un autre, on a par-là même la dépression ou la hauteur de celui-ci vu du premier. Soient A, B (fig. 16) deux signaux, & les deux lignes verticales réunies au centre C d'une surface réguliere dans cet intervalle des signaux, dont l'arc soit rencontré en D & E par les lignes CA, CB. Connoissant dans le polygone non réduit la distance AB, qui sera à peu près égale à l'arc DE, & la mesure de quelque dégré, on aura à peu près le nombre de minutes qui se comptent sur l'arc DE, ou dans l'angle ACB. De plus, si du point A on observe la hauteur ou dépression du point B, on n'aura qu'à l'ajouter ou la retrancher de 90°, pour avoir l'angle CAB, dont on retranchera pour la réfraction la dix-huitieme partie de l'angle ACB. Car suivant la remarque du P. *Maire* (Liv. II. n°. 56 & suiv.), la somme des deux réfractions est ordinairement la neuvieme partie de l'angle ACB; ce qui est constant, & par nos observations, & par plusieurs autres observations antérieures. On n'a plus qu'à retrancher de 180° les angles CAB, ACB pour avoir l'angle CBA corrigé; auquel ajoutant la dix-huitieme partie de l'angle ACB, on aura l'angle qu'auroit donné

donné l'obſervation, & dont la différence à 90° donne la hauteur ou la dépreſſion du point A, telle qu'on l'auroit eue immédiatement en l'obſervant du point B. On trouve par la même méthode la hauteur ou la dépreſſion du dôme de *St Pierre*, vue de *Soriano*, & celle du mont *Luro*, vue de *Catria*, puiſqu'on a celle de *Soriano*, vue du dôme de *St Pierre*, & celle de *Catria*, vue du mont *Luro*.

310. Il reſte à ſuppléer aux obſervations des hauteurs ou abaiſſemens reſpectifs du *Soriano* & du *Teſio*, vus du *Teſio* & du *Fionchi*, dont aucune ne ſe trouve dans la table; & c'eſt ce qu'on fait ſans peine au moyen de deux problêmes dont l'un eſt l'inverſe de l'autre. Le premier eſt conçu en ces termes: étant donnée la diſtance AB des ſignaux, avec l'angle CAB, trouver la différence des hauteurs DA, EB. Pour le réſoudre, il faut connoître, du moins à peu près, la meſure d'un dégré du méridien, d'où l'on tire, comme ci-deſſus (n°. 294) le demi-diametre CD ou CA, qu'il ſuffit d'avoir d'une maniere approchée. Enſuite dans le triangle CAB, connoiſſant les côtés CA, AB, & l'angle A, on trouve le côté CB, dont la différence au côté CA eſt la différence cherchée de la hauteur; & il eſt aiſé de démontrer qu'une erreur aſſez conſidérable dans le demi-diametre CD ou CA, ne produit dans cette hauteur aucune différence ſenſible. On y ſuppléc par deux problêmes. Solution du premier. Pl. III. fig. 16.

311. On peut abréger en cette maniere: connoiſſant la diſtance AB, & à peu près la meſure d'un dégré, on en tirera l'angle C; & comme l'angle A eſt auſſi connu, on aura l'angle B avec cette proportion: le ſinus de l'angle B eſt à ſa différence au ſinus de l'angle A, comme le demi-diametre de la terre CD, ou CA à la différence cherchée des côtés CA, CB. Autre ſolution plus courte.

312. Le ſecond problême ſe propoſe ainſi: connoiſſant la différence des hauteurs de A & B, & la diſtance AB, trouver les angles A & B. Ayant aſſigné à CA la grandeur qui lui convient, ou à peu près, on lui ajoutera ou l'on en retranchera cette différence pour avoir CB. Ainſi connoiſſant tous les côtés du triangle CAB, on aura les angles cherchés A & B; ou bien ayant déduit l'angle ACB de la diſtance AB, & connoiſſant les côtés CA, CB avec l'angle compris, on aura les autres angles A & B. Solution du ſecond.

Hauteurs & dépressions par le premier problême.

313. Ces problêmes levent toute la difficulté. Car en commençant par l'embouchure de l'*Ausa*, on tire des observations qui y ont été faites au niveau de la mer, par le premier problême, la hauteur de *Carpegna* & celle du mont *Luro*, qui sont connues d'ailleurs, parcequ'on avoit observé de ces montagnes mêmes, & leur hauteur ou dépression respectives, & la dépression de l'*Ausa*. Ensuite de la hauteur des monts *Luro* & *Carpegna* on tire celle de *Catria*, déja connue par l'observation de celle de *Carpegna*, vue de *Catria* : ainsi on a de trois façons sa hauteur absolue. Il en est de même de la hauteur de *Tesio*, qu'on trouve par celles de *Carpegna* & de *Catria*, & qu'on avoit déja par celle de *Catria*, vue de *Carpegna*. Celle du *Pennino*, déja connue par celles de *Catria* & de *Tesio* observées de ce point, se connoît encore par les hauteurs absolues des mêmes *Catria* & *Tesio*, & par conséquent de quatre manieres. Celle de *Pennino* donne celle de *Fionchi*, d'où l'on a encore observé celle de *Pennino*. Celle de *Fionchi* donne celles de *Soriano* & de *Genarro*, d'où l'on a observé celle de *Fionchi*. De celle de *Soriano* on tire encore celle de *Genarro*, & de celle-ci la hauteur du dôme de *St Pierre*, déja connue par celles de *Genarro* & de *Soriano*, vues de ce point. Cette hauteur de l'endroit de ce dôme, où nous avons observé, est à peu près la même que celle dont on sait d'ailleurs qu'il est élevé au-dessus du pavé de l'Eglise *St Pierre* ; & nous savons à peu près de combien ce pavé est élevé au-dessus du Tibre, & le Tibre au-dessus de la mer. C'est ainsi qu'en allant de l'un à l'autre, on a tiré de la comparaison des observations, de celles surtout qui nous paroissoient mériter la préférence, la table du n°. 57, Liv. II.

Par le second problême.

314. Connoissant ces hauteurs, on trouve par le second problême les hauteurs & dépressions respectives qui n'ont point été observées, savoir celles de *Tesio* & de *Fionchi*, celles de *Tesio* & de *Soriano*. Celles-ci eussent été déterminées avec moins de précision par des observations immédiates, à cause de la distance qui est de 60 milles, & de l'irrégularité de la réfraction. Car ayant les hauteurs absolues de A & B (fig. 16. pl. III.), on aura leur différence, au moyen de laquelle, connoissant d'ailleurs le côté AB du polygone non réduit, on

trouvera les angles A & B; celui-ci augmenté de la réfraction, & soustrait ensuite de 90°, donnera la hauteur ou dépression qu'on cherchoit.

Qu'il n'est pas nécessaire de les observer toutes.

315. C'est ainsi qu'on a suppléé aux observations qui manquoient, & qu'on a corrigé celles qu'on avoit faites, afin de pouvoir confronter les résultats, & en prendre le milieu; ce qui suffit, & au-delà, pour les angles du polygone, dans lesquels les erreurs de ces observations eussent à peine pu produire une erreur d'une ou deux secondes. On voit qu'inutilement nous eussions cherché à tout résoudre par des observations immédiates, qui ne devoient aboutir qu'à nous faire perdre du tems, & à nous donner bien de la peine.

Erreurs des côtés provenantes d'autres côtés.

316. Je me suis assez étendu sur la réduction des angles du polygone, & du polygone même à une superficie réguliere de la terre: il faut maintenant parler de l'erreur que peuvent occasionner les erreurs des angles non réduits; erreurs qui, suivant le n°. 262, auroient pu quelquefois se monter à dix secondes. Premierement, en tout triangle, connoissant les angles & un côté, on a celui des autres côtés que l'on veut, par cette analogie: le sinus de l'angle opposé au côté connu, est au sinus de l'angle opposé au côté que l'on cherche, comme le côté connu au côté cherché. C'est pourquoi l'erreur du côté cherché peut venir de trois sources, de l'erreur du côté donné, de l'erreur de l'angle opposé au côté cherché, & de celle de l'angle opposé au côté donné: & parceque l'erreur du côté donné, ou celle du premier angle fait varier le côté cherché dans leur raison directe, & que l'erreur du second angle le fait varier dans sa raison inverse, il s'ensuit, en mettant les sinus à la place de ces angles, que dans les deux premiers cas, le côté cherché sera toujours exactement à sa variation, & dans le dernier à peu près, la variation étant petite, comme le côté donné, ou l'un des deux sinus de ces angles à sa propre variation (1).

(1) Si deux quantités variables sont en raison directe, la différence de la premiere sera à celle de la seconde exactement dans la même raison que la premiere quantité à la seconde. Soient les deux états de la premiere quantité a & $a \pm x$; ceux de la seconde b & $b \pm y$; on aura (hyp.) $a : a \pm x :: b : b \pm y$. Donc $ab \pm ay = ab \pm bx$, &

Erreurs produites par les variations des angles.

317. Maintenant si l'angle varie de 10 secondes, & qu'il approche d'un angle droit, son sinus n'éprouvera aucune différence sensible, comme on le peut voir dans les tables des sinus : mais plus cet angle deviendra aigu, plus la différence du sinus sera grande par rapport au sinus même : si l'angle est de 60 d., la différence sera au-dessous de $\frac{1}{36000}$ du tout ; s'il est de 30 d., elle sera au-dessous de $\frac{1}{12000}$; s'il est de 19 d., au-dessous de $\frac{1}{7000}$. Or il est aisé de démontrer généralement par la seule inspection de la figure, que dans le cas d'une légere différence des arcs, la variation du sinus est au sinus, comme la corde de la variation de l'arc, ou ce petit arc même, ou son sinus (car ils peuvent se prendre l'un pour l'autre) à la tangente (1). D'où il s'ensuit que dès qu'on aura trouvé ce rapport pour un seul cas, on pourra l'appliquer à tous les autres ; & qu'on trouvera l'erreur qui en résulte pour un côté quelconque, par cette analogie : comme la tangente de l'angle est au sinus de son erreur, ainsi le côté en question est à l'erreur de ce côté ; erreur par conséquent qui sera dans la raison directe de l'erreur de l'angle, & de ce côté même, & dans la raison inverse de la tangente de cet angle : & supposant une erreur constante dans l'angle, l'erreur de ce côté sera seulement en raison inverse de cette tangente, ou en raison directe de la co-tangente de l'angle.

Des angles trop aigus.

318. C'est pour cela qu'on doit, autant qu'il se peut, ne faire entrer aucun angle trop aigu dans le polygone, de crainte que sa tangente ne soit trop petite, & que l'erreur, qui est en raison inverse de cette tangente, ne soit d'autant plus grande. Or on le peut ordinairement ; mais on excepte les angles opposés aux bases, lesquels doivent être petits, pour ne pas donner trop de longueur à la base. Ils se trouvent de 19 à 20 dégrés dans les tables du Livre II : tous les autres angles sont au-dessus de 30°, la plupart au dessus de 60 ; ce

---

$\pm ay = \pm bx$; d'où l'on tire $a : b :: x : y$; & $a : b :: -x : -y$; rapport exact. Mais si l'une des deux quantités est en raison inverse de l'autre, on aura $a : a \pm x :: b \pm y : b$. Donc $ab = ab \pm bx \pm ay + xy$, & $\pm ay + xy = \pm bx$. D'où l'on tire $x : y :: a + x : b$; & $x : y :: -a + x : -b$; rapport approché.

(1) Cette figure consiste en deux arcs qui different peu : on mene leurs sinus & la tangente ; & par l'extrémité du petit arc, on mene une perpendiculaire au sinus du plus grand.

qui diminue considérablement les erreurs. Les angles opposés aux bases sont ceux qui ont été mesurés avec plus de soin : nous avons répété plusieurs fois l'opération : & pour ce qui regarde en particulier l'angle opposé à la base de *Rimini*, qui est la plus exactement mesurée, il a été pris en présence de M. le Comte *Garampi* ; & le suffrage d'un témoin si éclairé a assuré l'accord de nos observations. On peut supposer dans les angles opposés aux bases, une erreur moindre de moitié.

319. Malgré cela, si nous supposons dans tous les autres angles une erreur de cette nature, l'erreur des côtés pourroit aller plus loin, puisque les erreurs des côtés précédens produisent dans les suivans, qu'ils déterminent, une nouvelle erreur. Mais lorsqu'il s'agit d'une légere différence, il est aisé de démontrer le théorème suivant, dans lequel on regarde comme nulle l'erreur de la premiere base ; aussi bien ne peut-il y avoir une erreur sensible : *on trouvera la différence d'un côté quelconque par cette analogie ; la tangente de chacun des angles employés dans les triangles précédens, pour trouver ce côté, est au sinus de l'erreur de cet angle, comme ce côté, à sa propre erreur :* & l'on prendra la somme de toutes ces différences ou erreurs. En effet, l'erreur produite dans le côté, par celle d'un angle précédent, est à ce côté, comme l'erreur du sinus de l'angle, au sinus de l'angle ; ensuite l'erreur de ce côté en produit une autre dans le côté suivant, laquelle est à ce même côté, comme l'erreur du côté précédent au côté précédent, ou comme l'erreur de ce sinus à ce sinus. Donc puisque la même chose arrive dans tous les triangles qui suivent, l'erreur du dernier côté est à ce côté, comme l'erreur du sinus de l'angle ci-dessus au sinus de cet angle, c'est-à-dire comme la corde, ou le sinus de l'erreur de l'angle, à la tangente de l'angle. Et parceque l'erreur de chaque angle produit le même effet, il suit qu'on a dans le dernier côté la somme de toutes les erreurs.

Somme des erreurs dans les côtés.

320. Dans la table du n°. 21, Liv. II, la seconde base *bx* se déduit de la premiere *La* par une suite de 11 triangles, dans chacun desquels on a fait servir deux angles ; & si toutes ces erreurs se rassembloient dans la seconde base, il y en auroit 22. On trouve par le théorème du n°. 317, l'erreur

Méthode plus courte.

produite dans cette base par l'erreur de l'un de ces angles; & supposant dans les autres angles une erreur égale, qui soit à cette erreur produite, comme la tangente du second angle à la tangente du premier, ou comme la co-tangente du premier à la co-tangente du second, on aura l'erreur produite par l'erreur du second angle; & de cette sorte, si toutes les erreurs étoient du même côté, leur somme donneroit l'erreur totale. Pour avoir plutôt fait, on cherchera l'erreur provenante d'un angle de 45°, dont la co-tangente est égale au rayon. Cette erreur multipliée par la somme des co-tangentes des autres angles, pour le rayon 1, donnera le total des autres erreurs. Or l'erreur provenant de 10 secondes d'erreur dans un angle de 45°, est, pour une base de huit milles, d'environ 0,388.

Que les erreurs s'effacent.

321. On met 5 secondes d'erreur pour les angles opposés aux bases, & 10 secondes pour les autres; & supposant que toutes ces erreurs soient du même côté, on trouve par le calcul une erreur de $6\frac{1}{2}$ pas dans la derniere base &c. Cependant cette erreur passe à peine un pas, comme on peut le voir Liv. II, n°. 32; & la raison est, comme je l'ai insinué plus haut, que les erreurs ne sont pas toutes du même côté, mais qu'elles s'effacent en grande partie, les unes étant dans un sens, les autres dans un autre.

Moyen de les diminuer. Pl. I, fig. 2.

322. On trouveroit de la même maniere les erreurs des côtés LH, HF, FC, CA: il y en auroit deux en LH; huit en HF, qui se trouve par les 4 triangles LH*a*, LHI, IHG, HGF; 14 en FC, qu'on trouve par 7 triangles; & 18 en CA, qu'on trouve par 9 triangles. Il y auroit encore d'autres erreurs dans la réduction de ces côtés à la méridienne; mais comme l'un des angles est droit, & l'autre presque droit, ces erreurs seroient absolument insensibles. Les premieres seroient assez considérables; mais on pourroit les diminuer, en arrivant à HF par la base de *Rimini*, & à CF par celle de *Rome*; & ce qui les diminue encore davantage, c'est qu'elles ne peuvent être toutes du même côté, & qu'elles se détruisent pour la plupart les unes les autres. L'erreur qu'on peut raisonnablement craindre dans la méridienne, est à la juste valeur de la méridienne, comme l'erreur de la base, à la base: & puisque notre base est la vingtieme partie de la méridienne, il s'ensuit

que l'erreur de la méridienne devroit être d'environ 20 pas ; ce qui se réduiroit dans le dégré à une erreur de 9 pas, moindre que 7 toises, & prenant un milieu, moindre que 5 ½ toises ; erreur presque insensible, en comparaison de la différence qu'on a trouvée entre divers dégrés.

323. Nous arrivons d'une base à l'autre (n°. 21, Liv. II.) par les angles non réduits du polygone ; & nous trouvons, (n°. 28.) par les angles réduits, tous les côtés du polygone réduit à une surface réguliere de la terre. On pourroit réduire immédiatement ces côtés, connoissant un côté quelconque, & la hauteur ou dépression respective des points qui le terminent. J'apporterai pour exemple le côté AB (fig. 2. pl. I.) terminé par le dôme de *St Pierre* & le mont *Genarro*. La dépression du point A vu de B, est de 2°, 1', 40"; & la hauteur du point B vu de A, est de 1°, 45', 15": la différence est 16', 25"; dont la dix-huitieme partie est 49", qu'il faut ajouter pour la réfraction à 2°, 1', 40", pour avoir 2°, 2', 29" & retrancher de 1°, 45', 15", pour avoir 1°, 44', 26". Ainsi l'angle CBA (fig. 16. pl. III.) est de 87°, 57', 31", CAB de 91°, 44', 26": leur somme retranchée de 180°, laisse pour l'angle ACB 17', 53". Soit CF égal à CA, la différence de chacun des angles CAF, CFA à un angle droit, sera la moitié de l'angle C, ou 8', 55". Donc CFA est d'environ 89°, 51'. Réduction immédiate des côtés. Pl. I. fig. 2. 3. 16.

324. Cela supposé, on a (n°. 21. Liv. II.) AB égal à 22954 pas ; de plus, le sinus de l'angle F, ou de 89°, 51', est 9999966 ; celui de l'angle B, ou de 87°, 57', 31", est 9993653 ; leur différence 6313 : on aura donc la réduction de AB par cette analogie : le sinus de F, ou 9999966, est à la différence au sinus de B, ou 6313, comme AB, ou 22954 pas, est à sa différence à AF, qui se trouve 14.49. Ensuite comme AD est d'environ 80 pas (n°. 58. Liv. II.), & que le demi-diametre de la terre CD est d'environ 4272000, qui font aussi à peu près la valeur de CA, on aura cette analogie : CA, ou 4272000, est à DA, ou 80 pas, comme AF, ou 22940, à 0.43, différence de AF & DE, qui, ajoutée à 14.49, différence de AB & AF, donne pour la différence de AB & DE, 14.92 pas, ou environ 15 pas, qui, retranchés de AB, ou de 22954.30, laisse pour DE 22939.3. Or on ne Sa différence à la réduction médiate.

lui a trouvé, n°. 28, Liv. 2, par les angles réduits, que 22935.6, ce qui fait 3.6 pas de moins; différence à peu près égale à celle que le P. *Maire* lui assigne au n°. suivant, & qu'il attribue aux erreurs provenantes de la réduction des angles à l'horizon, & de l'inégalité de la réfraction. Il y a eu égard dans la détermination du dégré, n°. 47.

De l'usage des éclipses par rapport aux longitudes.
Pl. I. fig. 2.

325. Je me suis plus étendu que je ne me l'étois d'abord proposé, tant sur la description & l'usage du quart-de-cercle, que sur les observations où il a été employé. Il ne reste plus qu'à observer que la position de notre polygone se détermine beaucoup plus exactement par la méthode dont nous nous sommes servis, que si on cherchoit, par les observations des éclipses, la différence de longitude de ses deux extrémités. En effet, au lieu d'observer l'azimuth du soleil à *Rome* & à *Rimini*, nous pouvions nous servir du polygone (fig. 2. pl. I.) pour connoître la distance AL; ce qui se fait en menant AD, AE, AG, AI, AL, & en cherchant AD dans le triangle ABD, dont on connoît deux côtés, avec l'angle compris; de même AE dans le triangle ADE, & ainsi de suite. Et si l'on observoit de plus, au moyen de quelque éclipse, la différence de longitude des points A & L, on auroit dans le triangle sphérique terminé à *n*, à L, & au pôle, l'angle en *n*, qui est droit, l'angle au pôle, & l'arc compris entre L & le pôle, savoir le complément de la latitude du lieu L. On auroit donc l'arc L*n*, par lequel, & par la distance LA, on connoîtroit A*n*.

Qu'il est ici inutile.

326. Mais cette méthode peut induire en de grandes erreurs: en effet, une erreur de 4 secondes sur le tems de l'éclipse, produit une erreur d'une minute sur le parallele, & une différence d'un mille, ou environ, dans la distance L*n* prise sur le parallele de l'embouchure L de l'*Ausa*; tandis que quatre secondes d'erreur, sur le moment où le soleil arrive à l'azimuth donné, ne produit pas à beaucoup près, dans l'angle LA*n*, une erreur d'une minute, & n'apporte pas dans la distance L*n*, une différence de 41 pas, comme on peut le déduire du n°. 302, Liv. IV. Concluons que ce n'est pas ici le lieu d'avoir recours aux observations des éclipses.

327. J'ai expliqué ce qui a rapport à la construction du grand

grand quart-de-cercle, à son usage, & aux observations, pour lesquelles il a servi, dans la mesure du dégré: il est tems de dire un mot de notre petit quart-de-cercle, & de l'usage que nous en avons fait, pour corriger la carte géographique. Cet instrument n'a rien de particulier: il y avoit deux lunettes, l'une fixe & double, l'autre mobile & appliquée sur l'alidade; & au moyen des transversales, on y distinguoit aisément les minutes; ce qui suffit, & au-delà, pour corriger des cartes de géographie. Nous nous en servions pour prendre les angles, de la même maniere que nous avons pris, avec le grand quart-de-cercle, les angles du polygone; & de même que par une chaîne de triangles non interrompue, nous sommes arrivés du dôme de *St Pierre* à *Rimini*; ainsi avec notre petit quart-de-cercle nous avons parcouru tous les états du Pape, & nous avons lié presque toutes les villes, & un grand nombre de châteaux, bourgs & villages à notre polygone.

Du petit quart-de-cercle.

328. Il y auroit quelque chose à dire sur les méthodes qui nous ont servi, ou qui peuvent être de quelque utilité dans cette espece d'opération; mais ce chapitre est déja plus long que je n'aurois voulu; ainsi je me contente de toucher légerement un ou deux points.

Ce qu'on omet ici; & pourquoi.

329. On trouve, Liv. III, n. 17 & suiv., un moyen de connoître la position d'un lieu, d'où l'on voit trois autres lieux connus, quoiqu'on ne le découvre lui-même d'aucun de ces points. On peut sans calcul résoudre ce problême, avec beaucoup plus de facilité, & sans craindre aucune erreur sensible, par une construction qui est en usage dans la construction des cartes. En effet, puisque ces trois lieux sont connus, on pourra mener de celui du milieu aux deux autres deux lignes droites, sur lesquelles on décrira deux segmens de cercle, qui répondent aux angles sous lesquels ces lignes ont paru du lieu de l'observation; & le point d'intersection des circonférences de ces segmens, sera le lieu de l'observation, qui par-là sera connu dans la construction même; d'où il sera aisé de le transporter sur la carte.

Connoître un lieu qui n'est vu d'aucun autre.

330. Cette méthode est d'un grand usage, lorsqu'on a à

En quel cas cette méthode est très utile.

observer sur une montagne, où il n'y a aucun terme fixe, aucun objet distinct, qu'on puisse prendre pour signal. Car on peut alors par cette méthode même trouver la position du lieu où se fait l'observation ; d'où tirant des lignes à tous les objets qu'on découvre de ce point, on a d'abord une direction de ces objets par rapport à ce point, laquelle, ajoutée à quelqu'autre direction relative à un autre point quelconque connu, détermine la position de ces objets mêmes.

Connoître un lieu vu de deux lieux connus.

331. La maniere ordinaire de déterminer la position des lieux, conforme à celle dont on s'est servi dans le polygone pour aller d'un triangle à l'autre, consiste à observer un lieu inconnu de deux lieux connus, qui servent à déterminer les lignes qui passent par ces mêmes lieux. On abrege encore ici par la construction ; mais le calcul est bien plus exact : & il n'est pas difficile de trouver la position par rapport à la méridienne, par deux observations de cette espece, soit qu'on cherche la distance d'un objet à une méridienne exacte donnée ; ce qui donne la différence de la longitude de ce lieu à celle de quelques autres lieux connus, soit qu'on cherche le point de la méridienne auquel il répond, ce qui donne la différence de sa latitude. C'est ce qu'on peut faire par la méthode dont on s'est servi pour réduire les côtés du polygone en segmens de la méridienne, & si les hauteurs ou dépressions du moins respectives des objets, sont peu considérables, on pourra se dispenser de réduire les angles à l'horizon, ces petites différences de hauteurs ou dépressions n'apportant dans ces angles, comme dans ceux du polygone, qu'une différence de quelques secondes, très rarement de quelques minutes ou dégrés.

Que la boussole induit souvent en erreur.

332. Il y a plusieurs moyens de suppléer au défaut de cette direction. On se sert communément pour cela d'une boussole qui marque en dégrés & minutes la différence de direction de deux lieux. Mais cette méthode en impose souvent au commun des Arpenteurs. Car la déclinaison de la boussole ne varie pas seulement d'année en année, ou de mois en mois, mais quelquefois même de jours en jours, & d'une heure à l'autre. Il lui arrive souvent de varier en un seul jour de

plusieurs minutes (1), ce qui ne peut manquer de troubler l'observation, & de jetter des erreurs dans les résultats, surtout lorsqu'on met un long intervalle de tems entre les observations de divers postes. C'est pour cela que nous ne nous sommes point servis de boussole, & nous avons toujours pris avec le quart-de-cercle l'une & l'autre direction.

333. Nous avons souvent suppléé à la position des lieux d'où nous avions observé, en mesurant au coucher du soleil, ou à une heure donnée quelconque où l'on a l'azimuth du soleil, & du lieu même dont nous cherchions la position, l'angle formé par une ligne dirigée à quelque lieu connu, avec la ligne qui aboutissoit au soleil, ou au côté opposé désigné par l'ombre. Car on en tire d'abord l'angle de position de l'objet connu vu de l'inconnu, au moyen de quoi on a ensuite, par la méthode du n°. 277, l'angle de position du lieu cherché vu du connu, & par conséquent la droite qui joint le lieu connu à ce même lieu, de la même maniere que deux lignes déterminent dans leur point d'intersection la position de ce lieu. On y supplée par les observations du soleil.

334. L'observation faite au lieu inconnu peut suppléer à celle d'un des lieux connus. Car si l'on imagine un triangle terminé à deux lieux connus & à un inconnu, & qu'on mesure l'angle formé à un des lieux connus, & ensuite l'angle formé au lieu inconnu, on aura le troisieme angle formé à l'autre lieu connu, & par-là même la seconde direction, dont l'intersection avec la premiere déterminera la position du lieu. De cette sorte la cime d'une montagne, quelque escarpée, quelque inaccessible qu'elle soit, n'en sera pas moins utile: il suffira pour cela d'en faire le tour, & de la joindre successivement par des lignes à tous les lieux circonvoisins, qu'on De l'observation faite à un lieu inconnu.

---

(1) Il paroît bien par des observations très exactes de feu M. *Graham*, que l'aiguille de boussole varie dans un jour, ou qu'elle a des especes de balancemens: mais les variations dont parle ici le P. *Boscovich* viennent plutôt de l'imperfection des boussoles dont les Arpenteurs se servent, ces boussoles n'étant point assez exactes, ni leur aiguille assez mobile pour ne donner que des différences semblables à celles que M. *Graham* a observées.

joindra eux-mêmes à quelqu'un des précédens.

Signaux des lieux inaccessibles.

335. Si deux contrées se trouvent séparées par une haute montagne, comme la Campanie l'est de la côte maritime du pays latin, on peut d'ordinaire y choisir deux pointes qui puissent s'appercevoir des deux côtés, & les joindre de part & d'autre à deux lieux par des observations faites dans ces lieux mêmes; après quoi il ne sera pas difficile de lier les deux premiers lieux aux deux derniers. L'usage donne plusieurs autres moyens d'abréger; mais je ne me suis pas proposé d'épuiser la matiere.

CHAPITRE III.

Des Instrumens employés à la mesure de la base.

Sujet de ce chapitre.

336. JE traite dans ce chapitre de la construction & de l'usage des instrumens qui ont rapport à la mesure de la base. Il y en a plusieurs; mais il y a peu de choses à dire sur chacun. J'en ai déja parlé au Liv. I, n°. 110 & suiv., où je me suis un peu étendu sur ce qui concerne ces instrumens, & la maniere de s'en servir. Je mettrai ici des figures pour éclaircir ce qui m'en reste à dire, & je tâcherai de n'être pas moins exact que dans les deux chapitres précédens, à marquer tout ce qui me paroîtra mériter attention.

Description des tables à trois pieds. Pl. III. fig. 17.

337. La figure 17, planche III, (ce nombre est marqué au commencement & à la fin de la figure qui occupe toute la longueur de la planche) représente les supports ou trépieds & les perches employées à mesurer la base. Nous avons parlé des supports (Liv. I, n°. 111.): leur construction se voit dans la figure. Dans le premier support, CD est une tringle de bois quarrée, qui passe dans des ouvertures presque égales A & B pratiquées dans deux plans horizontaux, & à travers lesquelles elle glisse librement, pour qu'on puisse l'élever ou l'abaisser à volonté. Elle porte en C une table horizontale Ee, & elle est serrée en A par une vis de fer placée sur un côté de

cette ouverture, & qui l'applique contre le côté opposé, tandis que les côtés de l'ouverture B la tiennent en respect, & l'empêchent de s'incliner de part ni d'autre. Ainsi l'on a jugé qu'il falloit deux plans horizontaux dans le support pour arrêter la tringle CD, & la table E*e* à la hauteur qui leur convient, & les fixer invariablement dans cette position.

338. La table E*e* a un pied en longueur, un peu moins en largeur, & un pouce d'épaisseur. La hauteur de la tringle CD, & de tout le support est d'environ trois pieds. L'intervalle AB est d'un demi-pied seulement, afin qu'on puisse élever de deux pieds la table E*e* au-dessus du plan B, & l'arrêter en même tems avec la vis qui est en A, & que les deux observateurs, ou du moins le plus grand puisse voir le côté supérieur de la perche. La tringle a un peu plus de deux pouces d'épaisseur; mais ces dimensions sont arbitraires. Les pieds sont armés à leur extrémité d'une longue pointe de fer, qui est surtout commode au rivage de la mer, pour les enfoncer plus ou moins dans le sable, & placer la table E*e* dans une situation horizontale. Lorsque dans la base de *Rome* nous rencontrions quelque terrein pierreux, nous mettions des coins sous les pointes, pour leur donner le dégré d'élévation qui convenoit. Dimensions de chaque partie.

339. FG est une des perches dont il est parlé, n°. 110, Liv. I; elle a trois pouces de hauteur, deux d'épaisseur, & 27 palmes en longueur. F, H, I, G sont les quatre lames de cuivre dont il est fait mention au même endroit: sur celles du milieu I, H, étoient marqués de petits points qui partageoient la longueur de la perche en trois intervalles de 9 palmes. Nous nous étions d'abord proposé de faire joindre les têtes des perches, en C″; mais dès le premier essai que nous fîmes à la maison, il nous parut qu'il falloit beaucoup de tems pour les joindre exactement, & d'une main assez légere pour ne pas craindre de déranger le moins du monde la premiere perche: ainsi nous marquâmes aussi sur les lames G, F de petits points, d'où nous transportâmes sur celles du milieu les intervalles de 9 palmes. Nous avons plusieurs fois mesuré ces intervalles de deux points avec beaucoup d'attention, en nous servant d'une loupe, pour nous assurer, à la plus petite différence près, de leur longueur précise. Des perches.

De l'intervalle des perches.

340. Les perches placées de la maniere que je l'ai expliqué (Liv. I, n°. 112.), c'est-à-dire dans la direction de la base, & dans une position horizontale, nous prenions, avec les petites pointes d'un compas, l'intervalle des points G, F', que nous transportions sur une petite échelle, & d'où nous retranchions les intervalles des deux points de la lame I, & des deux points de la lame H, déterminés par la même échelle, parceque ces intervalles étoient les complémens des intervalles du point de la lame G, au point de la lame I le plus voisin, & du point de la lame F' au point le plus voisin de la lame H': le reste étoit l'excès de l'intervalle IH' sur deux intervalles de 9 palmes. La même chose se pratiquoit toujours d'une perche à l'autre; ce qui donnoit autant de restes, qu'on portoit sur le régistre, & dont on faisoit une somme qui devoit être ajoutée au nombre entier de mesures, de perches & de palmes, qui s'étoit trouvé dans la mesure de la base.

Remarque sur l'intervalle des perches.

341. Le moyen de s'épargner la peine d'écrire & de soustraire tant de nombres, est de faire toucher les têtes des perches, & c'est l'unique parti qu'eût à prendre un observateur, s'il étoit sujet à se tromper, en écrivant des nombres; mais dans ce cas-là, je ne lui conseillerois pas de s'engager dans de pareilles opérations, où l'on ne peut éviter d'avoir une multitude de nombres à écrire. Pour nous, nous avons apporté une attention scrupuleuse à éviter toute erreur, tant dans la construction de nôtre régistre, que dans l'addition des restes. Nous nous fussions encore épargné une partie de la peine & de l'ennui, en donnant un peu plus de longueur aux perches, pour n'avoir pas besoin de doubler les points dans les lames du milieu, ni d'en soustraire les intervalles, & pour pouvoir graver sur chaque lame des points uniques à égales distances: car il est bien plus facile de prendre avec les petites pointes d'un compas la distance d'un de ces points à l'autre, que celle qui se trouve entre les bords de deux lames: c'est ce que nous avons éprouvé plus d'une fois, & c'est pour cela que nous avons aussi marqué sur les lames G, F de petits points, dont nous avons mesuré les distances, & non point la distance entre les extrémités des lames. Ces lames étoient déja placées de sorte, que le bord extérieur de la lame G étoit

éloigné précisément de 9 palmes du point du milieu de la lame I : il n'étoit donc plus possible de marquer sur les lames G, F' des points qui fussent à cette distance de ces points du milieu.

342. Malgré l'inégalité du terrein, on pouvoit ordinairement mettre les tables Ee, $E'e'$, $E''e''$ de niveau, en les élevant à proportion que le terrein s'abaissoit, comme on le voit dans la figure, où il y a une descente sur la droite, & où la troisieme table est plus élevée sur son support que la seconde, & celle-ci plus que la premiere. Mais lorsque le terrein s'abaisse au point que la longueur de la tringle qui soutient la table, ne peut plus y suffire, pour lors on n'appuie plus les têtes des perches sur le milieu des tables, mais on les place en avant, comme en I & L ; & parceque le point L étoit plus bas que le point I, nous suspendions un fil à plomb très délié IK, qui effleuroit l'extrémité I de la lame, & sur lequel nous amenions la perche suivante, jusqu'à ce qu'il la touchât, auquel cas nous marquions dans le régistre *o* : plus souvent encore, pour éviter l'embarras d'amener cette perche précisément à ce point de contact, nous prenions la distance du point de sa premiere lame, au côté du fil qui regardoit la perche précédente, pour y faire entrer jusqu'à l'épaisseur du fil, tout délié qu'il étoit ; & l'excès de cet intervalle sur celui des deux points de la lame Z, étoit consigné dans le régistre. Dans les montées, la nouvelle table étoit au contraire plus élevée que la précédente, comme si, dans la même figure, on alloit de droite à gauche. Remédier à l'inégalité du terrein.

343. J'en ai dit assez, au Liv. I, sur les moyens de placer les perches dans la direction de la base, & dans une position horizontale ; il reste à parler des erreurs que peut produire ce défaut de position & de direction. Mais je dirai auparavant ce qui a rapport à la vérification des perches, à commencer par celle des intervalles de 9 palmes, qui sont au nombre de trois dans chaque perche. Nous avons eu soin dès le commencement de les rendre égaux à 9 palmes romains, pris sur l'étalon du Capitole, qui consiste en dix palmes gravés sur la pierre ; & nous avons marqué cette distance par de petits points sur une verge de fer, que nous portions toujours avec De l'allongement & raccourcissement des perches.

nous, & auprès de laquelle nous mettions un thermometre de M. de *Reaumur*. Quoique les perches fussent prises d'un vieux bois, qui avoit long-tems servi de mât, la chaleur ou le froid, & l'humidité changeoient ces intervalles ; & j'ai peine à croire qu'il y ait des bois dans qui la chaleur & l'humidité ne fassent aucun changement. Ainsi nous examinions, trois ou quatre fois le jour, l'état des perches.

Moyen de les évaluer.

344. Nous avions un compas à verge, qui consistoit en une regle & deux pointes, l'une desquelles est mobile à volonté. S'il y avoit eu une vis pour faire avancer cette pointe, avec un index, pour marquer le mouvement, rien n'eût été plus facile que cet examen. Les pointes du compas placées à la distance des points de la verge de fer, & la pointe immobile appliquée à l'une des extrémités des intervalles FG, HI ou IG, nous eussions amené avec la vis l'autre pointe à l'autre extrémité, & le mouvement de l'index eût donné la différence. Que s'il y avoit eu de part & d'autre de l'un des points de la verge de fer une échelle avec des transversales, on auroit pu y porter avec ce compas tous les intervalles de chaque perche, & en remarquer la différence au moyen de cette échelle. Mais comme nous n'avions rien de tout cela, je m'y suis pris d'une autre maniere, qui n'est ni moins aisée, ni moins précise.

Moyen dont on s'est servi. Pl. III. fig. 17. 18.

345. TV (fig. 18.) représente une lame, les points H, I sont les mêmes que dans la figure 17. Du point I, comme centre, & avec le rayon IH, je décris sur la lame l'arc RQ. Ensuite ayant placé une pointe du compas au milieu de cet arc en H, je prends avec l'autre pointe le point *i*, à une distance donnée de I ; & du point *i*, comme centre, je décris avec la même ouverture de compas l'arc *r*H*q* : je fais la même chose sur les points des autres lames. Cela supposé, nous prenions avec ce même compas sur la verge de fer l'intervalle de 9 palmes, & comme les deux instrumens étoient de même métal, & qu'ils recevoient par conséquent les mêmes impressions de la chaleur, dès que le compas étoit à cette ouverture, il la conservoit long-tems : ensuite appliquant l'une des pointes du compas sur l'une des extrémités de l'intervalle que nous voulions vérifier, comme en I, l'autre pointe

pouvoit

pouvoit parcourir tout l'arc RHQ, dans le cas où cet intervalle n'eût point changé : pour peu qu'il y eût de changement, cette pointe devoit couper l'arc *r*H*q*, en-delà ou en-deçà de l'arc RHQ, comme en *s* ou *s'*, du côté de *i*, ou du côté opposé, selon que l'intervalle étoit raccourci ou allongé. On prenoit avec un compas & une petite échelle l'intervalle H*s*, au moyen de quoi on déterminoit la diminution ou augmentation de l'intervalle IH de la maniere suivante.

346. D'abord la ligne I*s* ou I*s'* rencontrant l'arc RHQ en S ou S'; S*s* ou S'*s'* sera la diminution ou augmentation de l'intervalle. Or les tangentes au point H des arcs RHQ, *r*H*q*, étant perpendiculaires aux rayons HI, H*i*, elles doivent être autant inclinées l'une sur l'autre que ces rayons. De plus, les cordes des arcs HS, H*s*, ou HS', H*s'* étant à peu près égales, elles feront avec les tangentes des angles égaux; d'où il suit qu'elles seront autant inclinées l'une sur l'autre que les tangentes, c'est-à-dire autant que les rayons. Ainsi les angles SH*s*, S'H*s'* sont à peu près égaux à l'angle IH*i*, & les triangles SH*s*, S'H*s'* semblables au triangle isocele IH*i*. Donc IH est à I*i*, comme H*s* ou H*s'* à S*s* ou S'*s'*. Or il suit de-là premierement, que connoissant les trois premiers termes, on a le quatrieme qui est la valeur cherchée : secondement, qu'en faisant I*i* très petite en comparaison de HI, la valeur cherchée S*s* ou S'*s'* est très petite par rapport à H*s* ou H*s'*, que par conséquent on aura une grande échelle pour les plus petites différences : troisiemement, que HI & I*i* étant constantes, S*s* ou S'*s'* est en raison de H*s* ou H*s'*; d'où il suit que connoissant S*s* ou S'*s'* pour une distance donnée H*s* ou H*s'*, on trouvera les différences pour toutes les autres distances, & qu'on en pourra dresser des tables. C'est ce que nous avons fait; & de-là nous n'avions pas besoin de beaucoup de tems pour vérifier les 9 intervalles, & pour connoître ce qu'il falloit en conséquence ajouter ou retrancher de la mesure. Suite.

347. Or il est arrivé à ce sujet ce que j'ai déja remarqué (n°. 156. Liv. I.), savoir que parmi les différentes parties d'une même perche, ou les différens intervalles de ses points, l'un s'allongeoit tandis que l'autre se raccourcissoit. J'en Variations bizarres. Pl. I. fig. 1.

donnerai pour exemple les différences que nous trouvâmes le 15 décembre en mesurant la base de *Rimini*. Je les désignerai ici par des nombres qui expriment les distances H*s'* ou H*s*, proportionnelles à leur raccourcissement ou allongement, & qui sont affectées du signe — dans le premier cas, du signe + dans le second. A la premiere vérification de la premiere perche, ces trois intervalles furent trouvés + 8, o, + 4, à la seconde o, — 8, + 1 ; jusqu'ici tous avoient diminué, le troisieme moins que les précédens ; mais à la troisieme on trouva + 4, — 11 ½, + 1 : voilà maintenant le premier intervalle qui augmente ; le second va toujours en décroissant ; le troisieme reste dans le même état. La premiere vérification de la seconde perche donna + 7, + 4, + 8, la seconde + 4, + 3, — 7 ; la troisieme + 2, o, + 5 : d'abord tous les intervalles ont décrû, mais fort inégalement ; ensuite les deux premiers ont continué à décroître toujours inégalement, tandis que le troisieme s'est considérablement accrû : il en est arrivé autant le même jour dans la troisieme perche ; & les autres jours nous ne manquâmes pas d'exemples d'une telle bigarrure.

Rectification de la courbure des perches. Pl. III. fig. 17. 19.

348. Venons maintenant à la rectification de la courbure des perches. Pour la connoître nous tendions un fil de F en G (fig. 17), & nous prenions les distances horizontales des points H & I, au plan vertical, qui passoit par le fil & la perche, & les distances verticales du fil au plan de la perche. Les points F, H, I, G (fig. 19.) sont les mêmes que dans la figure 17, FG le fil tendu, divisé également par les points *h*, *i*, auxquels répondent perpendiculairement, sur le plan de la perche, les points T, V éloignés horizontalement des points H, I. Ayant placé horizontalement une échelle sur la premiere perche, nous observions du point O, beaucoup plus élevé au-dessus du fil qu'il ne paroît dans la figure, la distance horizontale HT ; ensuite nous placions l'échelle verticalement pour observer la distance T*h* du fil à la perche : nous mesurions de même les distances IV, *i*V. Cela fait, nous en tirions l'excès de FH, HI, IG, sur FT, TV, VG, & de FT, TV, VG, sur F*h*, *hi*, *i*G, de la façon que nous allons dire.

349. La géométrie de l'infini donne un théorème qu'on

peut appliquer ſurement à de petites quantités, ſavoir qu'*en tout triangle rectangle, dont l'un des angles eſt infiniment petit, on trouve la différence de l'hypoténuſe au grand côté, en diviſant le quarré du petit par le double de l'hypoténuſe.* Soit (fig. 20.) le triangle rectangle FT*h*, dont l'angle en F ſoit infiniment petit, ou très petit; du point F comme centre, & avec le rayon F*h*, je décris un demi-cercle qui coupe FT prolongé dans les points X, *x*; TX eſt la différence de l'hypoténuſe F*h*, ou FX, au grand côté FT, & le petit côté T*h* eſt moyen proportionnel entre *x*T & TX. Donc on aura TX en diviſant le quarré de T*h* par *x*T, ou, ce qui eſt à peu près le même, par *x*X double de FX, ou F*h*. C. Q. F. D. Théorème général.

350. Cela poſé, pour avoir (fig. 19.) la différence de FT à F*h*, il ſuffit de diviſer le quarré de T*h* par le double de FT, ou, ce qui eſt à peu près le même, par le double de FH, c'eſt-à-dire par 18 palmes: de même pour avoir la différence de FH à FT, il ſuffit de diviſer le quarré de HT par la même quantité. Les quarrés de VI, & V*i* diviſés par 18 palmes, donneront également les différences de GV à G*i*, & de GI à GV; & ſi du point T on tire des paralleles à HI, *hi*, qui rencontrent V*i*, VI en *a* & *b*, enſorte que V*a* ſoit la différence de V*i* & T*h*, & que V*b* ſoit la différence de VI & TH, lorſqu'ils ſont du même côté du fil, comme dans la figure, & leur ſomme, lorſqu'ils ſont d'un côté oppoſé; les quarrés de V*a*, V*b* diviſés par 18 palmes, donneront encore les différences de TV à T*a*, ou *hi*, & de T*b*, ou HI à TV. Son uſage. Pl. III. fig. 19.

351. Il ſuffira donc de diviſer par 18 palmes la ſomme des quarrés de toutes les lignes, telles que TH, T*h*, VI, V*i*, V*b*, V*a*, pour avoir tout d'un coup la différence de toutes les perches, provénante de la courbure. Pour cela il eſt à propos de conſtruire une table des différences relatives à diverſes grandeurs de TH, T*h*, &c. ce qui ſe fait en cherchant une troiſieme proportionnelle à 18 palmes, & à une valeur déterminée quelconque, plus grande que ne peuvent être des lignes telles que TH, T*h*, &c. & en diminuant cette proportionnelle, pour les autres différences, en raiſon doublée de ces mêmes lignes. C'eſt ce que nous avons fait auſſi. Nous euſſions encore abrégé de moitié pour les intervalles FH, GI, Somme des corrections. Autre méthode.

en prenant immédiatement les distances des points H, I au fil FG, & en divisant leurs quarrés par 18 palmes : en effet, ces distances sont des perpendiculaires au fil FG, terminées à deux points de ce fil, comme en *h* & *i*; d'où il s'ensuit que F*h*H, G*i*I sont des triangles rectangles. Mais à l'égard de l'intervalle HI, cette méthode ne peut avoir lieu, parceque les lignes H*h*, I*i* ne sont point dans le même plan, & qu'elles ont des directions fort différentes, surtout lorsque H & I ne sont pas du même côté du fil ; d'où il s'ensuit que si l'on tiroit du point H une parallele à *hi*, elle ne rencontreroit point I*i*.

Total de ces divers effets.

352. On prenoit le milieu entre deux vérifications des intervalles de 9 palmes, & on l'ajoutoit ou retranchoit de chacune des mesures qui se trouvoient de l'une à l'autre. Le changement étoit fréquent & assez considérable dans les intervalles de 9 palmes : celui de la courbure étoit moins bizarre & plus léger. Dans la premiere mesure de la base de *Rimini*, le raccourcissement total excédoit à peine un palme, & l'allongement total fut d'un palme, & un peu plus d'un tiers. Dans la seconde mesure, le raccourcissement fut d'un peu plus de deux palmes, sans allongement. La rectification de la courbure des perches dans l'une & l'autre mesure, donna un peu plus d'un demi-palme, savoir dans la premiere $\frac{51}{100}$, & dans la seconde $\frac{57}{100}$. Cette différence doit être retranchée du nombre de palmes qu'on a comptés dans la mesure de la base, puisque le raccourcissement des perches fait qu'on y en compte plus qu'il n'y en a.

Correction des erreurs.

353. Nous avons encore vérifié, dans la base de *Rome*, les intervalles de 9 palmes; mais nous n'y avons pas tenu compte de la courbure, qui ne devoit produire qu'une très légere différence. En effet, le demi-palme que nous trouvâmes à *Rimini*, ne produit pas dans le dégré une différence de 5 palmes, ou 4 pieds, cette base faisant plus de la dixieme partie d'un dégré. Il y eut sans doute aussi quelque différence de courbure dans la base de *Rome*; mais elle n'étoit pas de conséquence.

354. Une correction bien plus importante que celle de la courbure, ou de l'allongement & raccourcissement des perches,

c'est celle qu'on doit faire pour les différens dégrés de chaleur. La verge de fer à laquelle nous rapportons les intervalles des perches, est dilatée par la chaleur, & condensée par le froid.] Par conséquent le nombre des mesures prises sur la verge de fer, doit être, dans la même base, plus petit, ou plus grand, suivant que la chaleur est plus ou moins forte. Le mieux est de prendre d'abord un certain dégré de chaleur moyenne, par exemple le quatorzieme dégré du thermometre de M. de *Reaumur;* c'est celui qu'a presque toujours trouvé M. de *Thury*, dans les cinq mesures de la base principale, d'où il a tiré les dégrés de France, mesures dont le parfait accord prouve la justesse; c'est encore à peu près celui des environs de Quito, où MM. *Bouguer* & de la *Condamine* ont mesuré une de leurs bases; & l'on ajoutera ou l'on retranchera la différence relative au dégré de chaleur, selon que ce dégré sera au-dessus ou au-dessous du quatorzieme.

Dilatation de la regle de fer par la chaleur.

355. Rien de mieux imaginé que le moyen dont se sert M. de la *Condamine* pour mesurer l'effet de la chaleur sur les métaux. Cette méthode, aussi ingénieuse qu'elle est exacte, consiste à suspendre une verge de fer de la longueur d'une toise, & à compter le nombre d'oscillations qui répond en 24 heures aux divers dégrés du thermometre de M. de *Reaumur;* d'où il est aisé de déduire la différence de hauteur du centre d'oscillation & l'allongement de la toise. Or M. de la *Condamine* a trouvé qu'à chaque dégré de ce thermometre répond $\frac{1}{87}$ de ligne; ou bien, la toise contenant 6×144, ou 864 lignes, qu'à chaque dégré répond $\frac{1}{87 \times 864}$, ou $\frac{1}{75168}$ du tout. De-là prenant un milieu entre deux nombres de dégrés observés le même jour, on aura cette proportion : 75168 est à ce nombre moyen, comme le nombre de palmes, ou de pieds & de toises, qu'on a trouvé dans cet intervalle de tems, à un quatrieme terme, qui fera connoître la différence qu'on cherche, & qu'il faudra ajouter ou retrancher du total des palmes ou des toises, suivant que ce nombre moyen sera au-dessus ou au-dessous de 14 dégrés. Nous avons mesuré la base de *Rome* au printems, & nous avons presque toujours eu plus de 14 dégrés de chaleur, & le dégré moyen étoit 17. Celle de *Rimini*

Méthode ingénieuse de M. *de la Condamine.*

a été mesurée en hyver; aussi nous avons eu beaucoup moins de dégrés: le dégré moyen étoit 5, & il a été si constant, qu'à peine a-t-il augmenté ou diminué de deux dégrés. La différence qui en est résultée pour la base de *Rome*, alloit à peine au-delà de deux palmes, qu'il a fallu ajouter; & celle de *Rimini* excédoit à peine 6 palmes qu'il a fallu retrancher.

Apprécier l'erreur de la base.

356. Voyons maintenent à quoi peuvent monter les erreurs d'une base mesurée avec ces instrumens. Nous trouvâmes dans la premiere base de *Rome*, toute correction faite, la valeur de 8034.67 pas, dans la seconde de *Rimini* 7901.14, la premiere contenant 656 $\frac{2}{3}$ de mesures composées de trois perches chacune, ou de 9 intervalles de 9 palmes, & la seconde de 646 $\frac{1}{3}$, c'est-à-dire que ni l'une ni l'autre n'alloit à 2000 perches. Or il a pu se glisser quelque erreur dans la rectification de la longueur & de la direction; mais ce ne peut être qu'une erreur très légere, cette rectification ne s'étant point faite immédiatement, mais au moyen d'une échelle qui augmente considérablement les objets, & diminue d'autant plus les erreurs; de sorte qu'il seroit aisé de démontrer que la somme de toutes les erreurs possibles, dans toute la longueur de la base, est presque absolument insensible. La correction pour la chaleur ne peut être non plus sujette à une erreur de conséquence, puisque cette correction même ne donne en total qu'une valeur légere; & qu'il n'y a rien de plus facile que d'observer le dégré de la chaleur. Ajoutons que ces erreurs ne sont pas toutes à beaucoup près du même côté, & qu'elles s'effacent mutuellement; ce qui rend incomparablement moindre l'erreur totale.

De l'erreur dans la distance des perches;

357. Comme nous ne faisons pas joindre les têtes des perches, on pourroit encore se tromper de quelque chose dans la mesure des intervalles qui les séparent; & ces erreurs pourroient s'accumuler. Mais au moyen d'un compas, dont les pointes sont très déliées, & d'une échelle petite, & en même tems distincte, on évite sans peine une erreur de $\frac{1}{100}$ de pouce, en supposant le palme divisé en 12 pouces romains, & à plus forte raison de $\frac{1}{2000}$ de palme. Or le nombre de ces intervalles ne va pas en tout à 2000, puisqu'il est égal à celui des perches, moins un. Donc quand même les erreurs seroient

toutes du même côté, on pourroit facilement éviter l'erreur d'un palme.

Dans la position du fil à plomb ;

358. Le vent peut causer quelque dérangement dans le fil à plomb, dont on se sert quand on veut interrompre & reprendre l'ouvrage, ou lorsqu'on doit élever ou abaisser les perches. Mais outre que ces erreurs sont en très petit nombre, & qu'elles s'effacent en grande partie ; avec un peu d'attention on les réduira presqu'à rien. Je ne mettrois pas ici un pouce d'erreur sur toute la base.

Dans la position des perches.

359. Les erreurs provenantes de l'inclinaison des perches au plan horizontal, ou à la direction de la base, semblent d'abord tirer plus à conséquence, parcequ'elles sont toutes du même côté, & qu'elles augmentent le nombre des mesures, puisqu'une perche inclinée sur une base rectiligne est plus longue que le segment de la base auquel elle répond : voyons donc à quoi elles peuvent aller. Soit (fig. 20) Fh une perche placée obliquement, hT la distance à la juste position ; on aura ici, comme au n°. 349, TX troisieme proportionnelle à xT, qui est à peu près double de Fh, & à cette distance Th. De plus, chaque perche est de 27 palmes, qui font 324 pouces romains, ou douziemes de palme. Or il est très aisé, dans la position de la perche, de distinguer une différence d'un tiers de pouce. On aura donc cette analogie : 648 pouces, ou le double de Fh, est à $\frac{1}{3}$, comme $\frac{1}{3}$ est à l'erreur, qui se trouve $\frac{1}{5832}$. Cela supposé, le nombre des positions des perches est au-dessous de 2000, & comme en chaque position on peut commettre une double erreur, le nombre des erreurs ne montera pas à 4000. Ainsi le total de l'erreur, dans la base, n'ira pas à un palme, & parceque la base est plus de la dixieme partie du dégré, l'erreur du dégré ne sera pas de dix palmes, ni même d'une toise.

Effet de cette erreur. Accord des mesures.

360. Ajoutons que cette erreur même augmente la mesure de l'intervalle qui sert à déterminer la valeur du dégré, & que si l'on veut y avoir égard, notre dégré en sera un peu plus petit. Or il est déja moindre que le plus méridional de France, mesuré par M. *Cassini*, & dans la même latitude. Tout ceci prouve ce que j'ai avancé (Liv. 1, n°. 157) : & pour peu qu'on fasse d'attention à ce que nous venons de dire, on ne

ſera pas ſurpris de l'accord parfait qui s'eſt trouvé entre les deux meſures de cette baſe. Car cette derniere erreur augmente l'une & l'autre baſe ; & toutes les autres erreurs dont nous avons fait mention, ſans parler de celles qui pourroient provenir de la négligence d'un obſervateur peu attentif, peuvent augmenter la meſure d'une baſe & diminuer celle de l'autre, mais de ſi peu de choſe, qu'à moins que l'obſervateur ne ſe néglige trop, on y trouvera à peine quelque différence.

De l'erreur dans la largeur d'une riviere.

361. Il y a dans notre baſe de *Rimini* deux autres ſources d'une erreur qu'on ne pourroit découvrir, quelque grande qu'elle fût, par la comparaiſon des deux meſures de cette baſe, parce-qu'elle affecte également les deux meſures. La premiere ſource d'erreur, c'eſt la riviere qui ſe trouve ſur ce paſſage. Nous n'avons pu meſurer immédiatement cet intervalle ; mais nous l'avons déterminé par un triangle preſque équilatéral, dont nous avons meſuré les angles & un côté preſque égal à l'intervalle cherché. L'erreur que nous avons pu commettre dans la meſure de ce côté, eſt la même que celle qui ſe ſeroit gliſſée dans la meſure de l'intervalle même. Quant à l'erreur des angles, elle ne peut apporter dans la diſtance une différence d'un demi-pouce, ni même de trois lignes. Car dans une ſi petite diſtance, la différence d'un demi-pouce paroiſſoit dans la lunette de notre petit quart-de-cercle, une différence énorme ; & nous avons eu grand ſoin de placer le centre de l'inſtrument dans les deux points qui terminent le côté que nous avions choiſi & meſuré, pour en tirer la meſure de cet intervalle.

Moyens de l'éviter.

362. Nous avons meſuré ce côté avec une ſcrupuleuſe attention ; les angles ont été pris à diverſes repriſes, & toujours avec une conformité entiere ; nous avons laiſſé pour marque, des bois enfoncés dans la terre, que nous avons trouvés au retour à la même place ; & la même meſure nous a ſervi dans l'aller & le retour.

De l'erreur produite par le coude de la baſe.
Pl. I, fig. 1.

363. L'autre ſource d'erreur eſt le coude que fait notre baſe (Liv. 1, n°. 155, & Liv. 2, n°. 18.), & qui eſt repréſenté dans la figure 1, planche I. Mais ce n'eſt pas-là de ces erreurs dont on ſoit obligé de tenir compte. Car nous avons meſuré fort exactement avec le grand quart-de-cercle les angles A &

& C. Nous avons placé perpendiculairement de groſſes pieces de bois aux points A, B, C, ſur leſquelles étoient poſées en travers, & dans un plan vertical, de petites planchettes enduites de chaux, & qui nous ſervoient de but. Nous avons pris avec ſoin la diſtance du centre du quart-de-cercle aux points A & C, pour corriger la petite erreur qui en réſulte, & nous avons trouvé que les ſinus de ces angles étoient exactement proportionnels aux côtés oppoſés BC, AB, que nous avions meſurés immédiatement : enfin nous avons trouvé les ſegmens AD, DC, par cette analogie : le rayon eſt au coſinus de l'angle A, ou de l'angle C, comme AB, ou BC, à AD, ou CD.

364. Suppoſons maintenant, ce qui n'eſt certainement pas à préſumer, qu'il y ait une erreur de 20″ dans l'angle A, on trouve le ſegment AD par cette analogie : le rayon eſt au ſinus de l'angle ABD, comme AB à AD. Ainſi le rayon & le côté AB étant le même, & l'angle ABD changeant auſſi de 20″, on aura par le nº. 317 cette proportion : la tangente de l'angle ABD, ou la co-tangente de l'angle A eſt au ſinus de 20″, comme AD eſt à l'erreur de ce ſegment. Or l'angle ABD eſt le complément de l'angle A, qui, nº. 18, Liv. 2, eſt de 4°, 10′, 45″, & dont la co-tangente eſt moindre que 1378206, pour le rayon 100000, qui donne 10 pour le ſinus de 20″. Donc l'erreur de ce ſegment n'eſt pas $\frac{10}{1378206}$ du tout. Ce ſegment a été trouvé par le calcul de 28569.6 palmes ; l'erreur eſt donc moindre que $\frac{285696}{1378206}$, c'eſt-à-dire moindre qu'un quart de palme, & l'erreur du ſegment CD ſeroit à peu près la même ; d'où il s'enſuit que l'erreur de toute la baſe ſeroit bien au-deſſous d'un demi-palme, & celle du dégré bien au-deſſous de 5 palmes, au-deſſous même d'une demi-toiſe ; & à meſure qu'on diminue l'erreur de l'angle, celle du dégré diminue à peu près dans la même raiſon, & par-là elle devient preſque abſolument inſenſible.

Cette erreur n'eſt pas ſenſible.

365. Il y a une autre petite erreur dans la baſe de *Rome*, mais ſi petite, qu'elle ne mérite pas d'être comptée. Cette erreur vient de ce que la baſe n'eſt pas toute ſur une ſeule ligne, ni dans un ſeul plan horizontal, mais qu'elle eſt tantôt plus haute, tantôt plus baſſe. Nous avons toujours gardé le

Autre erreur dont on ne doit pas tenir compte.

niveau, en obſervant de placer les perches, tantôt plus haut, tantôt plus bas, & en nous ſervant pour cela d'un fil à plomb. On ſait que l'intervalle de deux fils à plomb eſt plus ou moins grand, ſuivant qu'il eſt plus ou moins élevé au-deſſus du niveau de la mer. Mais le terrein, fût-il fort inégal, l'erreur n'eſt jamais ſenſible; & dans le cas préſent, où le terrein étoit aſſez uni, on peut la regarder comme nulle.

Autre erreur inſenſible.

366. On ne doit pas plus tenir compte de l'erreur qu'on auroit pu commettre en réduiſant la baſe de la direction horizontale à l'oblique, les points extrêmes n'étant pas de niveau. Cette réduction n'a pas lieu dans la baſe de *Rimini*, dont les deux extrémités ſont au bord de la mer, & par conſéquent à même hauteur. Mais dans la baſe de *Rome* il y avoit un demi-dégré de différence. Ainſi pour réduire la baſe horizontale à l'oblique, il faut ſe ſervir de cette analogie : le ſinus du complément d'un demi-dégré eſt au rayon, ou bien le rayon eſt à la ſécante d'un demi-dégré, comme la baſe horizontale eſt à l'oblique; d'où il ſuit que le rayon eſt à l'excès de la ſécante ſur le rayon, ou que 1000000 eſt à 38, comme la baſe horizontale, qui, ſuivant le n°. 19 du Liv. II, eſt de 8034.37 pas, eſt à la quantité qui lui doit être ajoutée pour la réduire à l'oblique, & qu'on trouvera 0.30. Donc la baſe oblique eſt 8034.67; c'eſt la valeur qu'on lui aſſigne à l'endroit cité. Or eût-on commis dans cet angle une erreur de trois minutes, il n'en réſulteroit pas dans la baſe une différence de $\frac{1}{10}$ de pas. Car ſi l'angle n'eût été que de 27′, l'excès de la ſécante eût été 31, & la réduction 0.25, qui ne differe de la premiere que de 0.05. Par où l'on voit qu'il n'y a rien à craindre du tout de ces ſortes d'erreurs.

De la meſure qu'on a employée.

367. De cette ſorte on a la meſure des baſes en palmes romains, dont nous en avons pris 9 ſur l'étalon du Capitole, & qu'il eſt aiſé de réduire en pas. Car chaque pas contient cinq pieds; & chaque pied, (j'entends ceux qui compoſent aujourd'hui les milles d'Italie, & dont on ſe ſert pour placer les pierres à cette diſtance ſur les chemins publics), contient ſeize douziemes de palmes, de ſorte qu'il y a dans un mille 6666 $\frac{2}{3}$ palmes. Comme nous n'avions pas encore reçu la toiſe qu'on nous envoyoit de *Paris*, & que nous voulions

une mesure fixe, & qui fût en usage du moins à *Rome*, nous avons pris pour cela un intervalle de 9 palmes, qui ne surpasse la toise que d'environ deux pouces; le pied-de-roi contenant près d'un palme & demi.

Comparaison de cette mesure à la toise.

368. Nous reçûmes enfin la toise de M. *de Mairan*, & nous la comparâmes à notre mesure. D'abord avec un compas à verge nous avons pris l'intervalle de la toise, & nons l'avons transporté sur la verge de fer, où nous avions marqué avec de petits points l'intervalle de 9 palmes, en plaçant l'une des pointes du compas sur l'un de ces points, & en marquant avec l'autre pointe sur un papier collé en cet endroit, un autre point sur la même ligne; ce que nous connoissions en tendant un fil d'une extrémité de l'intervalle de 9 palmes à l'autre. La toise s'est trouvée un peu plus petite. Nous avons cherché de plusieurs façons ce rapport, d'où dépendent tous les autres.

Rapport de la toise à neuf palmes.

369. Premierement nous avons porté cette différence sur l'échelle que le sieur *Langlois* avoit gravée sur cette même toise; & après avoir répété plusieurs fois cette opération, qui nous donnoit constamment la même valeur, nous l'avons trouvé de 2 pouces, 3.31 lignes. Ensuite portant cette même différence sur notre mesure, en suivant la direction du fil, nous avons trouvé qu'elle y étoit contenue trente-deux fois, & qu'il restoit outre cela un segment qui, transporté sur l'échelle du sieur *Langlois*, s'est trouvé de 1 pouce 6.06 lignes. Nous avons aussi répété plusieurs fois cette opération qui donnoit toujours le même résultat. Comme la toise contient 72 pouces, ou 864 lignes, & que, suivant la premiere opération, notre mesure a 27.31 lignes de plus; cette mesure comprend 891.31 lignes. A l'égard de la seconde opération, si l'on retranche de la toise le segment qui est resté, savoir 18.06 lignes, il reste pour les 31 parties égales 845.94 lignes, la 32$^{me.}$ partie étant l'excès de notre mesure sur la toise. Ayant donc divisé 845.94 par 31, on a 27.29, pour cette différence qu'on avoit trouvée immédiatement de 27.31 lignes, à cause de quelque petite erreur dans l'opération, jointe à quelque erreur semblable de la division du sieur *Langlois*. Prenant donc un milieu, notre mesure de 9 palmes se trouvera de 891.30 lignes, & le rapport de la toise à notre mesure sera celui de 86400 à 89130, ou de 8640 à 8913.

De l'erreur qui en peut résulter.

370. Nous nous sommes servis, dans le premier & le second Livre, de cette réduction, que nous ne croyons pas s'écarter de la vraie de $\frac{1}{86400}$ du total ; soit parceque les résultats des deux opérations ne different pas plus du résultat moyen, soit parceque les autres méthodes que nous avons employées pour trouver ce rapport, nous donnoient à peu près la même chose. Or une erreur de cette nature ne peut produire dans le dégré, qui est au-dessous de 57000 toises, une erreur d'une toise. On voit que de ce premier rapport suivent aisément tous les autres.

Le pied-de-roi comparé à l'ancien & au nouveau pied romain.

371. Car en premier lieu le palme contient $\frac{891.30}{9}$, ou $99\frac{1}{30}$ lignes de pied de *Paris* ; & comme le pied romain, en usage aujourd'hui, contient $\frac{16}{12}$ de palme, on aura cette proportion : 3 est à 4, comme $99\frac{1}{30}$ à un quatrieme terme qui se trouve $132\frac{2}{45}$, & qui excede d'environ une ligne l'ancien pied romain. Nous en avons quatre modeles au Capitole : le Statilien, le Colutien, l'Ebusien & le Capponien. Le P. Ab. *Revillas* les a exactement réduits en pieds de *Paris*, comme on le peut voir dans les Dissertations de *Cortone*, Tom. 3, Dissert. 4. Il leur a trouvé en dixiemes de ligne $1310\frac{5}{6}$, $1307\frac{1}{2}$, $1314\frac{1}{8}$, $1309\frac{5}{12}$; & prenant un milieu, on a $1310\frac{1}{2}$; ce qui revient, à très peuprès à la valeur qui lui est assignée dans une lettre de M. *Stuart*, imprimée à la fin de l'ouvrage du P. *Bandini*, sur l'obélisque nouvellement découvert au champ de Mars. Après le départ de M. *Stuart* pour la Grece, je tirai cette lettre de quelques papiers qu'il avoit laissés ici (à Rome) : je la rédigeai, je la mis en italien & en latin, avec des notes propres à éclaircir le texte, ou à confirmer les heureuses découvertes de cet habile homme. On y voit la mesure du pied romain tirée de la dimension de cet obélisque, & d'un passage de *Pline* qui en marque la hauteur : cette mesure est de 131 lignes, ou à peu près ; ce qui s'accorde très bien, & à une très petite différence près, avec celle du P. *Revillas*.

Accord de deux mesures. L'ancien pied comparé au nouveau.

372. Il s'ensuit que notre pied romain d'aujourd'hui, peu différent de l'ancien, est tant soit peu plus long ; & le P. *Revillas* l'a trouvé tel : cependant cet Auteur fait le mille de 6680 palmes, c'est-à-dire plus long que le nôtre de $3\frac{1}{3}$ palmes. Malgré cela il trouve le même rapport que nous entre

le pied de *Paris* & le palme, qu'il a pris ſur l'étalon de dix palmes du Capitole; car il donne au palme en dixiemes de ligne 990 $\frac{3}{10}$, & nous lui en donnons 990 $\frac{3}{9}$, ce qui fait pour lui 99 $\frac{3}{100}$ lignes, & pour nous 99 $\frac{1}{30}$: la différence eſt $\frac{1}{300}$ de ligne; différence qui ne peut être apperçue par obſervation. Il eſt étonnant qu'avec un étalon terminé par des angles & par des arrêtes auſſi groſſierement tracés, on puiſſe ſe rencontrer de ſi près. Du reſte, on ne doit pas trouver extraordinaire que le pied antique ſoit plus court: ce n'eſt pas d'aujourd'hui qu'on a remarqué que les meſures deviennent plus longues à meſure qu'on les prend ſucceſſivement les unes ſur les autres, ſoit parceque la rouille ajoute une petite croute aux métaux dont elles ſont compoſées pour la plupart, ſoit parceque les ouvriers les font plutôt trop longues que trop courtes, à cauſe qu'il leur eſt aiſé avec une lime de les raccourcir, au lieu que ſi elles ſont trop courtes, il n'y a plus de remede.

Rapport des meſures de *Rome* à celles de *Paris*.

373. Quoi qu'il en ſoit, l'objet de notre recherche n'en ſouffre point. Car pour pouvoir comparer notre dégré avec les autres, il ſuffit d'avoir le rapport de la toiſe qui a ſervi à meſurer les autres dégrés, à la meſure dont nous nous ſommes nous-mêmes ſervis; & il n'importe que cette meſure contienne exactement, ou non, un certain nombre de palmes, ou de pieds romains. Or ayant reçu la toiſe que M. de *Mairan* a comparée ſi exactement avec la ſienne, d'où le même artiſte (le ſieur *Langlois*) avoit déja tiré les toiſes qui ont ſervi dans la meſure des autres dégrés, il ne nous étoit pas difficile de la comparer à notre meſure; & c'eſt ce que nous avons fait avec une telle préciſion, que la plus grande erreur poſſible n'apporteroit pas dans le dégré entier une différence d'une toiſe. En prenant donc pour le palme & le pied romain les valeurs que nous leur avons trouvées, ſavoir pour le palme 99 $\frac{1}{30}$ lignes, & pour le pied 132 $\frac{2}{45}$, on trouve par le calcul les rapports ſuivans des meſures de *Rome* à celles de France.

Mesures romaines	Au pied de *Paris*,	A la toise.
Le palme	Comme 2971 à 4320	Comme 2971 à 25920
Le pied	Comme 2971 à 3240	Comme 2971 à 19440
Le pas	Comme 2971 à 648	Comme 2971 à 3888

Plusieurs mesures exprimées en toises.

374. De-là par le calcul des nombres ou de leurs logarithmes, toutes les mesures énoncées en pas ou en palmes dans le Livre second, peuvent aisément se réduire en toises. La base de *Rimini* (n°. 19, Liv. 2.) est de 52674.3 palmes, qui, multipliés par $\frac{3}{4}$, donnent le nombre de pieds romains, & multipliés par $\frac{3}{4\times5}$, ou $\frac{3}{20}$, ou 0.15 donnent 7901.14 pas, qu'on réduira en toises par cette analogie: 3888 est à 2971, comme 7901.14 à un quatrieme terme qui se trouve 6037.62. Ce nombre est celui des toises comprises dans cette base. De même on a trouvé à la base de *Rome* 8034.67 pas qui se réduisent à 6139.66 toises.

Déterminer les côtés & la longueur du polygone.

375. Des bases ainsi réduites, on tire tous les côtés du polygone; & connoissant les côtés & la position du polygone, on en déduit l'intervalle intercepté par les paralleles qui passent par les lieux où se sont faites les observations astronomiques, c'est-à-dire par la salle du college romain, & par la maison de M. *Garampi* à *Rimini*. Nous avons suivi cet ordre dans le chapitre II, & nous avons donné (n°. 268) une méthode pour déduire de-là même tous les côtés rectilignes du polygone. Le P. *Maire* a donné (Liv. II, n°. 21,) une liste de ces côtés, tels qu'on les tire de la base de *Rimini*; & à la fin de cette table, la base de *Rome* se trouve de 8033.4 pas, ou d'un pas trop courte. Si on avoit commencé le calcul par cette base, chaque côté du polygone, & chaque portion du méridien, celle surtout qu'on a trouvée, toute réduction faite, entre le dôme de *St Pierre* & l'embouchure de l'*Ausa*, eussent été plus grands en raison de 8034.67 à 8033.4. Donc pour connoître ce qui résulte de la base de *Rome*, il suffit, après toutes les réductions, d'augmenter cet intervalle suivant ce rapport,

376. Or cet intervalle même, après les deux sortes de réductions qu'on y a faites (n°. 294 & 295), est, suivant les observations de *Rome* sur la position du polygone, la différence de 5.7 pas à 161127.9, c'est-à-dire 161122.2 pas; suivant celles de *Rimini*, il est de trois pas plus long, par le n°. 302; ce qui donne 161125.2: & si l'on veut prendre un milieu, il vient 161123.7. La base de *Rome* eût donné un intervalle plus long dans la raison de 803467 à 803340. Distances des paralleles du polygone.

377. Cet intervalle sera égal (n°. 295) à celui qui est intercepté par les paralleles de la salle du college romain & de la maison de M. *Garampi*, si on lui ajoute 269 pas, & qu'on en retranche 139.1, ou ce qui revient au même, si on y ajoute la différence de ces deux nombres, savoir 129.9. De-là l'intervalle de 161123.7, provenant de la base de *Rimini*, devient 161253.6 pas, qui, par le rapport que nous avons trouvé entre le pas & la toise, se réduisent à 123221.3 toises, comme il est dit, n°. 204, Liv. I. La base de *Rome* l'eût fait plus long suivant le même rapport des bases, non pas absolument, à cause qu'il a fallu ajouter près de 130 pas qui ne dépendent nullement de ces bases, mais à très peu près, puisque la différence de la base déduite à la base actuellement mesurée, n'apporte pas dans ce nombre même de 130 une différence de $\frac{1}{10}$ de pas. Ainsi dès qu'on aura déduit le dégré de la base de *Rimini*, il suffira, pour avoir celui que donneroit la base de *Rome*, de l'augmenter dans la raison que nous avons dite. Distances des paralleles des observations.

378. Or par le n°. 166, Liv. IV, on a pour résultat moyen de six déterminations moyennes de l'arc céleste intercepté par les zéniths de la salle du college romain & de la maison de M. *Garampi*, 2°, 9′, 47″, ou 7787″, qui differe à peine d'une seconde de chaque détermination. On aura donc cette analogie: 7787″ est à 3600″, que comprend le dégré, comme 123221.3 toises à un quatrieme terme, savoir 56966.3, qui est le nombre de toises du dégré moyen de cet intervalle. C'est la valeur qu'on lui a déja trouvée, Liv. I, n°. 204. Valeur du dégré.

379. Cette mesure est plutôt trop longue que trop courte, puisqu'elle est tirée de la position du polygone, déterminée par les observations de *Rome* & de *Rimini*, au lieu qu'on doit Des corrections à faire au dégré.

faire plus de fond sur celles de *Rome*, qui ont donné un intervalle plus petit; mais comme la correction faite aux observations de *Rome* par celles de *Rimini*, n'ajoute à l'intervalle entier, qui est de plus de deux dégrés, qu'une différence d'un pas & demi, il n'en revient pas à chaque dégré la valeur d'une demi-toise. Mais nous avons donné quelque chose de plus à notre dégré pour trois raisons que nous avons dites, Liv. I, n. 204.

Premiere correction.

380. La premiere est la différence de la base de *Rome*, qui est un peu plus grande que celle qu'on tire par le calcul de la base de *Rimini*. La base de *Rome*, actuellement mesurée, donne un dégré plus grand que celle de *Rimini*, en raison de 8034.67, à 8033.4; ce qui donne cette analogie: 8033.4, est à 1.27, différence de ces nombres, comme 56966.3 toises, qu'on a trouvées dans le dégré à un quatrieme terme, savoir 9.0 toises dont ce dégré est augmenté par la base de *Rome*.

Seconde correction.

381. La seconde raison est la différence du côté du polygone terminé au dôme de *St Pierre* & au mont *Genarro*. La réduction des angles (n°. 324) fait monter ce côté à 22935.6 pas, & par une réduction immédiate, il s'est trouvé plus grand de 3.6 pas. Si l'erreur des autres côtés étoit dans la même raison, le dégré augmenteroit d'une quantité qu'on trouve par cette analogie: 22935.6 est à 3.6, comme 56966.3 toises qu'on a trouvées dans le dégré, à 8.9 toises qu'il faudroit ajouter dans cette supposition.

Troisieme correction.

382. La troisieme est que dans la mesure de l'arc céleste on doit faire plus de fond sur les premieres observations de *Rome* de l'étoile α du cygne, comparées à celles de *Rimini*. Il en résulteroit (n°. 165, Liv. IV,) pour l'arc céleste 2°, 9′, 46″, ou 7786″.1, au lieu que toutes les observations ensemble lui donnent 2°, 9′, 47″. Ainsi le dégré augmenteroit en raison de 7787 à 7786.1, & on auroit cette différence par cette analogie: 7786.1 est à 0.9, différence de ces nombres, comme 56966.3 toises, qu'on a trouvé au dégré, à 6.6 toises qu'il faudroit lui ajouter.

Le dégré corrigé.

383. Si nous voulons ne nous en rapporter qu'à cette seule étoile, & retenir le total de l'augmentation 6.6 avec le tiers de celle qui provient de la différence des bases, celle de *Rome* n'ayant

n'ayant été mesurée qu'une fois, & celle de *Rimini* deux fois, & le tiers de celle qui provient de la réduction des côtés, car le côté en question est le dernier, & l'erreur des précédens doit être moindre, étant formée par l'assemblage d'un plus petit nombre d'erreurs; nous aurons par les bases 3.0, par les côtés 3.0, par l'étoile 6.6; le total est 12.6, qui, ajouté à 56966.3 toises, qu'on a déja trouvé dans le dégré, le fait monter à 56979, mesure à peu près exacte.

384. Je dis à peu près, car je suis persuadé qu'on en devroit retrancher quelques toises. La base de *Rimini* est sur un terrein bien plus égal; elle a été mesurée deux fois, & le parfait accord de ces mesures en prouve la justesse: j'y compte deux fois plus que sur celle de *Rome*, pour le moins. J'ai quelque soupçon sur cette hauteur du mont *Genarro*, vu du dôme de *St Pierre*, & je lui attribue la meilleure partie de la différence de ce côté: & ce qui est le principal, j'aimerois beaucoup mieux prendre un milieu entre un si grand nombre de mesures de l'arc céleste, que de m'en rapporter à une seule mesure & à une seule étoile; & si on prend ce milieu, selon l'usage, il arrive que du nombre de toises qu'on voudroit ajouter, on en retranche d'un seul coup près de sept.

Qu'il péche plutôt par trop de longueur.

385. On ne peut soupçonner dans ce dégré, de la part des observations astronomiques, une erreur plus grande que celle qu'y produiroit une erreur d'une seconde qu'on auroit commise dans ces observations, laquelle s'évalue à 7 toises; ni de la part de la base une erreur de plus d'un ou deux pieds, y ayant à peine entre les deux mesures de la base de *Rimini* une différence de deux pouces, & cette base étant plus de la dixieme partie du dégré; d'où il s'ensuit que l'erreur du dégré n'est pas dix fois l'erreur de la base. Du côté des angles du polygone, on n'a pas lieu de craindre une erreur plus grande que celle qui provient de la différence de la base de *Rome* calculée, à cette même base actuellement mesurée; & nous avons vu que cette erreur est au plus de 8.5 toises. Enfin la réduction du polygone à un plan horizontal, ne peut produire dans le dégré une erreur plus grande que la différence qu'y apporte la réduction immédiate du dernier côté, savoir 8.9 toises; & l'erreur commise dans la position du polygone, ne produit

Limites des erreurs.

dans le dégré qu'une erreur d'une toise; je ne dis rien de ces autres petites erreurs dont nous avons traité au long, & qui sont à peine sensibles, par exemple l'erreur provenante de la courbure de la base de *Rome* (n°. 353) qui ne diminueroit pas le dégré de $\frac{2}{3}$ de toise, & autres erreurs semblables. Bien plus, les erreurs ci-dessus mentionnées n'influent qu'en partie dans la mesure du dégré, & on en a tenu compte presqu'en entier dans la correction qu'on vient de faire; & dans cette correction même, on a plutôt donné plus que moins à la mesure du dégré. Tout cela prouve du moins que notre dégré n'est pas au-dessus de 56979 toises, & qu'il en approche assez.

386. On peut réduire ces toises en pas, suivant le rapport du n°. 374, en multipliant par 3888, & divisant par 2971, ce qui donne 74565; c'est-à-dire que ce dégré a un peu plus de 74 $\frac{1}{2}$ milles d'Italie. Or les milles géographiques sont de 60 au dégré, beaucoup plus grands par conséquent que ceux d'Italie, jusques-là qu'il faut près de 5 milles d'Italie pour faire 4 milles géographiques. Quant aux lieues de France qui sont de 25 au dégré, on voit qu'elles sont à peu près de 3 milles d'Italie. Or on peut tirer de-là la valeur approchée du diametre de la terre pour s'en servir aux fins que nous avons dit n°. 295. Car en multipliant le dégré par 180, on aura pour la moitié de la circonférence 13421700 pas; & l'on trouvera le demi-diametre par cette proportion : 355 est à 113, comme ce nombre de pas à un quatrieme terme qui se trouve 4272260. Donc le diametre est 8544520; diametre véritablement approché, ou moyen, puisqu'il est déduit d'un moyen dégré (1).

Le mille romain.

Diametre de la terre.

Addition sur les instrumens.

387. En voilà assez sur la mesure du dégré dont nous ne parlons ici qu'à l'occasion des instrumens qui nous ont servi, & dont l'usage devoit se terminer à cette mesure. A l'égard de leur construction, quoique j'aie suggéré plusieurs choses

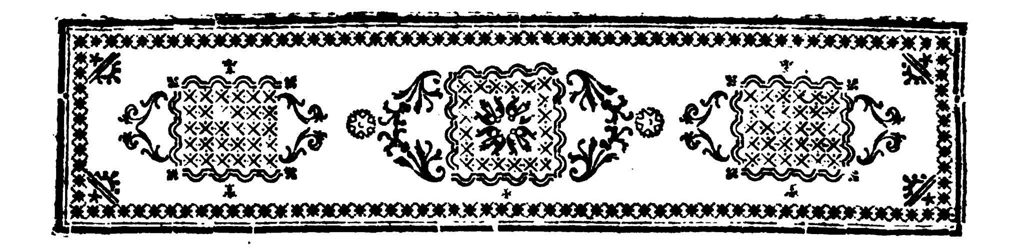
(1) On approcheroit encore davantage du diametre moyen, en prenant un milieu entre les dégrés qui ont été mesurés dans la latitude d'environ 45 dégrés. Voyez la note sur le n°. 65, Liv. I.

à notre artiste M. *Rufo*, & que je lui aie toujours donné une idée de ce que je souhaitois qu'il fît, il a lui-même imaginé avec sagacité beaucoup de choses, surtout en ce qui concerne le pied du quart-de-cercle, & la facilité de le mouvoir en tout sens. J'espere que d'autres ajouteront beaucoup à la perfection de ces instrumens, & qu'ils les rendront très utiles en astronomie.

388. Je finis en observant que, pour dresser la carte géographique, nous avons souvent mesuré d'autres bases, mais par une méthode beaucoup plus simple & plus que suffisante à cet égard. Elle consistoit à marcher d'un pas modéré, en comptant jusqu'à deux milles pas. Nous savions qu'à un très petit nombre de pas près, ce nombre de nos pas revenoit à un mille d'Italie: & ayant pris les angles avec un petit instrument de bois, aux deux extrémités de cette base, nous déterminions d'une maniere assez juste la position des lieux voisins. J'ai touché ce point à l'occasion des bases: il est tems de passer au cinquieme Livre.

Addition sur la carte geographique.

Fin du Livre IV.



LIVRE CINQUIEME.

Recherches sur la figure de la Terre, déterminée par les loix de l'équilibre, & par la mesure des dégrés.

Sujet de ce Livre.

1. TOUS nos travaux ont eu pour objet principal la mesure exacte du dégré du méridien. Cette mesure, comme je l'ai suffisamment expliqué dans le premier Livre, a pour but la détermination de la figure de la Terre; & c'est la recherche de cette même figure qui a donné lieu à toutes ces sortes d'opérations. Je traiterai donc ici de la figure de la Terre, en tant qu'on la peut déduire, ou des loix de l'équilibre des fluides, ou de la mesure même des dégrés.

Sa matiere & sa méthode.

2. Ce sujet fourniroit la matiere d'un long traité. Le volume le plus ample pourroit à peine contenir tout ce que les plus savans Auteurs ont découvert & publié sur cette matiere, quand je ne ferois que le recueillir, sans y rien ajouter du mien. Mais sans m'arrêter à plusieurs spéculations, qui sont de peu d'usage, je ne m'attacherai qu'à quelques points principaux qui ont plus de rapport à mon sujet; & je tâcherai de résoudre par la simple géométrie des difficultés qui sembleroient ne pouvoir être éclaircies qu'avec le secours du calcul intégral.

Sa division en deux parties.

3. L'ouvrage est divisé en deux chapitres. Le premier comprend ce qui a rapport à l'équilibre, & le second, ce qu'on peut déduire de la mesure des dégrés. On trouvera dans l'un & dans l'autre quelques constructions & quelques réflexions

que j'inſérai il y a pluſieurs années dans d'autres diſſertations que j'ai données au public. Mais comme on n'en avoit imprimé qu'un très petit nombre d'exemplaires, qui même ſe ſont égarés pour la plupart, ayant été diſtribués à l'occaſion d'un exercice public vers la fin de l'année ſcholaſtique; il ne ſera pas inutile de les rappeller ici.

4. Dans le premier chapitre je détermine la figure requiſe pour conſerver l'équilibre dans la Terre, ſoit immobile, ſoit tournant ſur ſon axe, dès là que les forces ſe dirigent à un centre commun, quelque variation qu'on ſuppoſe dans les forces, dans les diſtances, & ſuivant une loi donnée quelconque: problême beaucoup plus général que celui qui eſt propoſé par M. *Huygens*, pour déterminer la figure de la Terre, dans l'hypotheſe de *Galilée*, d'une gravité croiſſante ou décroiſſante en raiſon quelconque directe ou inverſe doublée, triplée &c. des diſtances au centre. J'indiquerai en même tems la figure qui réſulte d'une gravité dirigée à deux centres, puis d'une gravité dirigée ſuivant des lignes données, à un point donné; & après avoir paſſé légerement ſur ces deux articles, je traiterai enfin de la figure que donne non plus une gravité dirigée à un centre commun, mais celle qui réſulte de la gravité mutuelle de toutes les particules du globe agiſſantes les unes ſur les autres, en raiſon inverſe des quarrés de leurs diſtances reſpectives; gravité que *Newton* a ſi heureuſement déduite de l'accord parfait qu'il lui a trouvé avec tant de phénomenes céleſtes, & d'où il a conclu tant d'autres choſes qui s'accordent parfaitement avec les nouveaux phénomenes. J'expliquerai ce qui concerne cette loi de gravité dans l'hypotheſe de l'homogénéité de la Terre, ſujet qui a déja été manié heureuſement par M. *Mac-Laurin*; dans celle d'une denſité variable, ſuivant la différence des diſtances, & dans cette partie j'abandonne d'illuſtres Auteurs de notre ſiecle, dont les calculs me paroiſſent défectueux, puiſqu'en prenant la ſimple géométrie pour guide, j'arrive à des conſéquences entierement oppoſées aux leurs. Je toucherai au même endroit quelques points qui ont rapport à l'irrégularité du tiſſu des parties. Sujet du chapitre I.

5. Voilà pour ce qui regarde l'équilibre & la matiere du

Sujet du chapitre II. premier chapitre. Dans le second j'expose les conséquences qui suivent de la mesure des dégrés : j'y détermine ce qui résulte de la comparaison de deux dégrés, soit d'un méridien, soit d'un parallele quelconque, premierement dans l'hypothese d'un sphéroïde elliptique, & ensecond lieu dans la supposition que la Terre soit tellement applatie, que non seulement ses méridiens, mais ses paralleles mêmes s'écartent de la figure circulaire. Enfin j'examine la figure & la grandeur qu'on peut donner à la Terre, connoissant tous les dégrés d'un méridien, & faisant abstraction de toute hypothese. Ces problêmes amenent naturellement d'autres considérations de même genre, que je développerai dans l'occasion. Entrons en matiere.

CHAPITRE PREMIER.

De la figure de la Terre, déduite des loix de l'équilibre.

Qu'on peut chercher la figure de la terre par l'équilibre.

6. SI notre globe n'étoit composé que de parties solides, ou si les parties fluides de sa surface n'avoient entre elles aucune communication, on ne pourroit connoître sa figure par l'équilibre : j'entends cet équilibre qui ne dépend que de la gravité. Car de quelque maniere que les parties de la matiere agissent les unes sur les autres, & quelque soit le lien qui les unit, tout solide est en équilibre. Mais puisqu'une grande partie de la surface de la Terre est couverte d'un fluide qui suit librement sa pente, de quelque côté que la gravité détermine son cours ; & que plusieurs portions de ce fluide s'insinuent en tout sens dans l'intérieur de la terre, & communiquent entre elles par des canaux souterreins ; de là vient que son équilibre doit lui donner une certaine figure qui doit être à peu près celle de la Terre, puisque les parties solides qui s'élevent au-dessus de sa surface, & les montagnes mêmes, eu égard à la grandeur du globe, sont très peu au-dessus de son niveau.

Deux méthodes pour cela.

7. Or la figure qui résulte de l'équilibre peut se trouver de deux manieres ; premierement par la direction des graves à

la surface du fluide, direction qui doit toujours être perpendiculaire à cette surface : car s'il en étoit autrement, & si la direction prolongée au-dessous de la superficie faisoit avec elle un angle aigu, le fluide emporté par sa pente naturelle couleroit du même côté, comme sur un plan incliné. La seconde maniere est de considérer deux canaux continués dans l'intérieur de la terre, remplis d'un fluide qui communique de l'un à l'autre, & tellement en équilibre, que le point le plus bas soit chargé de part & d'autre d'un poids égal.

8. Il est reconnu aujourd'hui qu'il y a telle hypothese de gravité, dans laquelle, quoique les canaux puissent être comme en équilibre, les directions des graves ne seroient point perpendiculaires à la surface ; auquel cas le fluide ne seroit point en repos, ou dans un état permanent, mais dans une perpétuelle agitation. Ceci n'arrive néanmoins que dans les hypotheses où la gravité dépend non seulement de la distance, mais encore de la position. Car dans celle où les graves sont dirigés à un centre unique, ou à un nombre de centres quelconques, les deux méthodes s'accordent parfaitement. Suite.

9. Je ne m'arrêterai point à démontrer ce théorème. Je n'emploirai cependant pas l'une & l'autre méthode par la simple géométrie, mais seulement celle des canaux terminés au centre, pour ces hypotheses de gravité, qui dirigent les graves à un centre unique, puis à deux ; & je n'emploirai que celle de la direction perpendiculaire à la superficie, pour l'hypothese d'une gravité dirigée par les tangentes d'une courbe donnée. Car je ne crois pas devoir m'étendre beaucoup sur des hypotheses qui n'ont aucun fondement dans la nature : fussent-elles réelles, il ne s'agit ici que de la figure de la Terre, qui est toute en équilibre ; car on doit compter pour rien le dérangement causé dans l'équilibre par de petits mouvemens, tels que le flux & le reflux de la mer, & les courans qu'on y voit en quelques endroits, mouvemens qui se rapportent même à des causes extérieures qu'il est aisé d'appercevoir. Il suffira donc d'une seule méthode. Car s'il y a équilibre, il doit se trouver, & dans le poids des canaux, & dans la direction de la perpendiculaire à la superficie. Ainsi en établissant ce qui est requis pour l'un ou l'autre de ces deux points, on devra

De la méthode qu'on emploie ici pour une gravité tendante à un centre donné, ou à une courbe aussi donnée.

en appliquer le résultat à la figure de la Terre. Cependant comme l'analyse fournit, pour une gravité tendante à un centre donné, une solution très simple qui s'accorde parfaitement avec celle qu'on tire des canaux par la simple géométrie, je proposerai aussi cette solution.

De la gravité neutonienne,

10. Mais dès qu'il s'agira de la gravité mutuelle, par laquelle toutes les parties de la matiere pesent les unes sur les autres, en raison inverse des quarrés des distances, pour lors je démontrerai en général, du moins pour l'hypothese des parties homogênes, qu'il y a équilibre en tout sens. Je ferai voir de plus qu'il suffit de démontrer en général que les canaux rectilignes, terminés à un point quelconque pris dans l'intérieur de la masse, pesent également sur ce point, quelque direction qu'on leur suppose, pour démontrer par-là même que cela doit arriver dans les canaux courbes, & qu'à l'extrémité supérieure de tous ces canaux, la direction de la gravité est perpendiculaire à la superficie.

Du mouvement de la terre. Théorie de l'Auteur.

11. Il faut maintenant considérer la Terre, premierement comme immobile, ensuite avec son mouvement diurne, ou même, si l'on veut, son mouvement annuel, afin de déterminer dans l'un & l'autre cas la figure qui résulte de l'équilibre. Or quand je dis une Terre immobile, ou en mouvement, je parle d'un mouvement ou d'un repos relatif à un certain espace dans lequel nous sommes renfermés avec tous les corps qui tombent sous nos sens. Je conçois dans tous les corps, relativement à cet espace, une force d'inertie, ou une détermination à demeurer dans le repos, ou à être mûs uniformement en ligne droite; soit que cet espace soit immobile, soit qu'il soit transporté par un mouvement quelconque. S'il est immobile, la Terre & tous les corps qu'il contient seront en mouvement. S'il a un mouvement contraire & égal au mouvement de la Terre, ou de Jupiter, ou de quelqu'autre portion de matiere, cette portion de matiere, ou Jupiter, ou la Terre seront immobiles; tous les autres corps auront un mouvement composé du mouvement de l'espace, & du mouvement qu'ils ont dans cet espace (1). Mais s'il a un mouvement

(1) Voici de quoi rassurer ceux qui appréhendent que le double contraire

contraire à ceux de tous les corps qu'il renferme, tous ces corps auront un mouvement composé de leur mouvement propre dans l'espace, & du mouvement commun de cet espace. Dans tous ces cas, les mouvemens des corps renfermés dans cet espace, seront toujours les mêmes relativement à l'espace; & comme nous y sommes nous-mêmes renfermés, il nous est impossible de connoître par aucun phénomene, ni par aucun raisonnement humain, ce qu'on doit penser du repos ou du mouvement de l'espace.

12. Je commençai à faire part au public de cette théorie en 1748, dans une Dissertation sur le flux & le reflux de la mer. Je l'ai proposée & confirmée par de nouvelles preuves dans d'autres ouvrages. Mais je l'ai mise depuis peu dans un plus grand jour, dans les supplémens du Livre premier de la Philosophie composée en vers par M. *Benoit Stay*, ouvrage digne de l'immortalité. C'est là que traitant de la force d'inertie, j'ai expliqué cette théorie dans une Dissertation d'une juste longueur, où je crois avoir bien prouvé en particulier qu'on ne peut démontrer par aucun phénomene, ni par aucun principe métaphysique, l'existence d'une force absolue d'inertie, en vertu de laquelle toutes les portions de la matiere seroient déterminées à rester dans le repos, ou à se mouvoir uniformement en ligne droite, par rapport à un espace absolu, infini & immobile, & qu'on ne peut supposer qu'une force relative d'inertie, par rapport à l'espace où nous sommes renfermés. Car cette force supposée, on explique sans peine tous les phénomenes connus, & on en prédit d'autres avec succès: ce qui est, en tout genre de systême, la preuve la plus convaincante. Mais il me suffit ici d'avoir proposé sommairement mon opinion. Dans la suite je paroîtrai si peu m'écarter du sentiment commun des Philosophes de notre tems, que j'adopterai jusqu'à leur langage & à leurs expressions.

Fondement de cette théorie.

13. Or si la Terre est immobile & homogêne, elle doit

---

mouvement de la terre, dans les systêmes de *Copernic* & de *Newton*, ne soit opposé au sens littéral de l'Ecriture sainte. Rien ne les empêche de supposer la terre immobile, sans rien déranger à l'économie de ces systêmes.

Figure d'une terre immobile & homogêne.

être dans un équilibre parfait, soit que la gravité se dirige au centre, & quel que soit le rapport de la gravité à la distance, soit que toutes les parties de la matiere pesent les unes sur les autres, en raison quelconque directe ou inverse des distances. Car puisque les deux hémispheres, quelque part qu'on les prenne, sont parfaitement égaux & semblables, chaque portion de matiere, même dans l'hypothese de la gravité newtonienne, tendra au centre, & pésera également à égales distances du centre. Ainsi toute portion de matiere placée à la surface du globe, aura une direction de gravité perpendiculaire à la surface: car dans la sphere, toute ligne droite tirée de la surface au centre, est perpendiculaire à la surface. Si donc on prend deux canaux parfaitement égaux, & qui communiquent au centre, quelle que soit leur direction, chaque canal aura le même poids, le centre sera également chargé de part & d'autre, & les deux colonnes du fluide se soutiendront mutuellement.

Même figure déduite de l'équilibre des canaux.

14. En effet, la force d'inertie les conservera dans le repos, où elles seront une fois parvenues, à moins que quelque nouvelle cause ne les détermine au mouvement. Or il n'y en aura aucune, puisque nous supposons que la gravité est la seule force qui agisse sur ces colonnes, & que cette gravité agit en sens contraire, & avec des efforts égaux qui doivent par conséquent se détruire les uns les autres. Imaginons un globe tout composé de parties fluides; suivant ce que nous avons dit, elles seront dans un parfait équilibre. Supposons qu'une partie de ce globe devienne solide, sa figure ne doit point changer pour cela, puisque cette solidité ne peut troubler le repos des parties fluides. De plus, dans le cas où la gravité ne dépend point de l'action mutuelle des parties, mais qu'elle est toute dirigée à un centre unique, il n'arrivera aucun changement dans la figure, supposé même que la partie solide se condense, quelque part que ce soit, en-deçà & au-delà du centre également, puisque cette condensation n'affecte en rien les parties fluides, & ne leur communique aucun mouvement.

Figure d'une terre qui a un mouvement uniforme & parallele.

15. Telle est cette démonstration si connue de la sphéricité de la Terre supposée immobile, tirée de l'équilibre, & employée autrefois par *Archimede*, & par d'autres Mathématiciens

qui sont venus après lui. Mais ici de preuve négative qu'elle étoit, nous en avons fait une preuve positive. Nous lui avons même donné plus de force & plus d'étendue. De plus, elle subsiste en son entier, dans le cas même où la Terre seroit emportée d'un mouvement uniforme & parallele, en vertu duquel toutes les parties continueroient à se mouvoir uniformement, & également en ligne droite: car il n'y a alors aucune cause qui puisse ajouter un second mouvement au premier: d'où il suit qu'il n'arrivera aucun changement dans la distance respective des parties, ni par conséquent dans la figure, ce changement de figure dépendant nécessairement de celui de la distance. Or tel est à peu près le mouvement annuel de la Terre: il differe peu d'un mouvement parallele. Cette légere différence ne laisse pas pourtant de causer une petite aberration dont nous aurons peut-être occasion de parler.

Figure d'une terre mue autour de son axe, dans l'hypothese d'une gravité tendante à un centre donné.

16. En attendant il nous faut voir ce qui doit arriver dans le cas où la Terre tourne sur son axe, & où la gravité tend à un centre donné en raison quelconque des distances, ou suivant une loi constante quelconque, dépendante uniquement des distances. Pour cela il faut d'abord supposer un principe connu, savoir que par la force d'inertie, tout corps mû circulairement fait effort pour s'écarter par la tangente, & par-là même pour s'éloigner du centre. L'effort qu'il fait pour s'éloigner du centre s'appelle force centrifuge, sur laquelle je vais proposer deux lemmes qui nous serviront à déterminer la figure de la terre.

Des forces centrales. Lemme.

17. Lemme I. *Si les circonférences des cercles sont parcourues en tems égaux, la force centrifuge est proportionnelle aux rayons.* C'est un théorème fort connu; il fut proposé autrefois par M. *Huygens*, & il se trouve démontré dans plusieurs élémens de méchanique.

Autre lemme. Pl. IV. fig. 1.

18. Lemme II. *Si le quart-de-cercle IMD (pl. IV. fig. 1.) tourne autour du rayon CD, & que la force centrifuge en I soit exprimée par la ligne IH; la force centrifuge en M, par laquelle le point M tâche de s'éloigner du point P centre de son mouvement, exprimée par la droite MO, suivant la direction de PM; & qu'enfin cette derniere force soit décomposée & représentée par deux autres lignes, savoir ON perpendiculaire*

à CM prolongée, & MN suivant la direction de CM; la force centrifuge en I suivant la direction de CI, sera à la force centrifuge en M suivant la direction de CM, comme CM^2 à MP^2. Car le lemme I donnera cette analogie : IC ou CM : MP :: HI : MO. Et à cause des triangles rectangles semblables CMP, ONM ; on aura encore CM : MP :: MO : MN. Donc en rapport composé $CM^2 : MP^2 :: IH : MN$.

Conditions du problême.

19. Ceci supposé, nous pouvons déterminer généralement la courbe par la méthode des canaux. Soit FCE (même fig.) la quatrieme partie d'une section de la terre, faite par l'axe ; CE la moitié de cet axe, autour duquel tourne la Terre, qu'on suppose toute composée de parties fluides. Soient encore deux canaux CF, CL, le premier perpendiculaire à l'axe, dans le plan de l'équateur, le second incliné à volonté. Pour qu'il y ait équilibre, il faut que le centre C soit chargé également par l'un & l'autre canal, ensorte que les canaux soient égaux en poids.

Expressions en lignes des forces centrifuges & de la loi de gravité.

20. Supposons que des ordonnées comme KQ à une courbe quelconque VQG, expriment la force de la gravité pour les distances correspondantes CK, prises dans le demi-diametre CF de l'équateur. L'ordonnée FV exprimera la force de la gravité au point F de l'équateur. Prenez FR de telle grandeur, qu'il y ait même rapport de RF à VF, que de la force centrifuge à la gravité pour ce même point F. Sur le diametre RF soit décrit un demi-cercle RBF. Soit la corde RB parallele à CL, B*r* perpendiculaire à RF. Menez RC & *r*C; & après avoir pris CK égal à CL, menez des points K & I des paralleles à FV, qui rencontreront la courbe VG en Q & en A, la droite CR en S & en T, & la droite C*r* en *s* & en *t*.

Démonstration.

21. Remarquez d'abord que I*t* exprime la force centrifuge en M, réduite à la direction de CM. En effet, par le lemme I (n. 17), la force centrifuge absolue en F est à la force absolue en I, comme FC à CI, ou comme FR à IT. Or par le lemme II (n. 18), cette force absolue en I est à la force relative en M, comme CM^2 à MP^2; ou bien à cause des triangles semblables CPM, FBR, qui outre qu'ils ont chacun un angle droit, ont encore les angles en R & C égaux,

les lignes CL & RB étant paralleles, comme FR^2 à FB^2; ou bien encore, à cause que FR, FB, F*r* sont dans le demi-cercle en proportion continue, comme FR à F*r*, ou enfin comme IT à I*t*. D'où il suit que puisque FR exprime la force absolue en F, IT représentera la force absolue en I, & I*t* la force relative en M.

22. De là la gravité absolue en M, c'est-à-dire l'excès de la gravité primitive sur la force centrifuge au point M, sera exprimée par A*t*, & la gravité absolue en I par AT. Par conséquent tout le poids du canal CL sera exprimé par l'aire Q*s*CG; de même tout le poids du canal CF sera exprimé par l'aire VRCG; & puisque les poids doivent être égaux, les aires le seront aussi. Poids des canaux exprimés par des aires.

23. On trouvera cette égalité par la quadrature des courbes en cette maniere. Soient (fig. 2) les mêmes choses que dans la premiere figure, depuis CF vers V; & que la courbe C*qu*, placée de l'autre côté, pour éviter la confusion, soit la quadratrice de la courbe GQV rapportée à CF comme à son axe; ensorte que F*u* soit égale à l'aire VFCG divisée par CF, de même K*q*, I*a* aux aires QKCG, AICG divisées pareillement par CF. Quadratrice de la courbe des forces. Pl. IV. fig. 1. 2.

24. Cette courbe préparée; soit dans la figure 1 une ligne droite indéfinie C*l*, faisant avec CE un angle quelconque; & dans la figure 2 l'angle FRB égal à l'angle EC*l* de la figure 1. Ensuite ayant abaissé la perpendiculaire B*r* sur FR, prenez du point *u* en allant vers F les lignes *u*V′, *u*X moitiés des lignes FR, F*r*; & sur chaque ligne, comme *q*K, *a*I, prenez, du côté de KI, les parties *q*Z, *a*Y qui soient avec *u*X en même raison que les quarrés de CK, & de CI au quarré de CF. Que la courbe CYX ainsi décrite soit coupée en Z par la droite V′Z parallele à FC. Soit enfin ZK parallele à FV. Si dans la figure 1 on prend sur C*l* la partie CL égale à la ligne CK de la figure 2, je dis que le point L sera à la courbe cherchée. Trouver un point de la courbe sur une ligne droite tirée du centre.

25. Car puisque dans la figure 2 les triangles RCF, *r*CF sont la moitié des rectangles sur CF & RF, & sur CF & *r*F, ces triangles divisés par CF vaudront la moitié des lignes RF, *r*F, ou les lignes entieres V′*u*, X*u*. Et puisque les triangles Démonstration.

*r*CF, *s*KC, à cause qu'ils sont semblables, & les droites X*u*, Z*q* par la construction, sont entre eux comme les quarrés de CF, CK; l'on aura aussi le triangle *s*KC divisé par CF égal à Z*q*. Ainsi le surplus des aires, savoir les espaces VRCG, Q*s*CG, divisés par CF, vaudront les restes FV′, KZ qui sont égaux. Donc les aires VRCG, Q*s*CG sont égales. Donc les poids des colonnes CF, CL sont égaux, & l'on a l'équilibre qu'on cherchoit.

Demi-diametre de l'équateur, & demi-axe.

26. Lorsque CL (fig. 1) tombe sur CF, l'angle FC*l* s'évanouit, & par conséquent aussi l'angle RFB de la figure 2; B & *r* retombent sur R, & par conséquent X & Z sur V′, & K sur F, puisque par la supposition le point L (fig. 1) tombe sur F. Mais lorsque C*l* (fig. 1) tombe sur CE, B & *r* de la figure 2 retombent sur F, & par conséquent X sur *u*, & la courbe CYZX sur C*aqu*; & sans qu'il soit besoin de construire une nouvelle courbe CYZ, la ligne V′Z′, parallele à FC, rencontrant la premiere courbe C*au* au point Z′, déterminera V′Z′, ou FK′, différence de la moitié de l'axe au demi-diametre de l'équateur.

Principes d'une construction plus simple.

27. Je proposai cette construction en 1739, dans une Dissertation sur la figure de la Terre. Mais on peut l'abréger beaucoup en poussant plus loin notre analyse, & en cherchant le rapport de CL (fig. 1) non à l'angle EC*l*, mais à l'ordonnée LY perpendiculire à l'axe CE. On se contente pour lors de décrire dans la figure 2 la seule quadratrice C*qu*; & ayant pris une distance CK égale à la ligne CL (fig. 1) qui fait avec CE un angle inconnu, par le point K de la figure 2 on mene QK*q*, & l'on imagine dans l'une & l'autre figure un angle FRB égal à l'angle inconnu EC*l* (fig. 1). Enfin ayant tiré comme ci-devant B*r* & C*sr*, l'aire Q*s*CG devra égaler l'aire VRCG à cause de l'équilibre. Maintenant si l'on prend V′*u* du côté de F, égale à $\frac{1}{2}$ FR, & qu'on tire V′Z, qui rencontrera K*q* en Z, on s'appercevra aisément que Z*q* est égale à l'aire du triangle *s*KC divisée par CF. En effet, par la construction, F*u* est égale à l'aire VFCG divisée par CF; & par la nature du triangle, V′*u* moitié de RF, est égale à l'aire RFC divisée par la même CF. Par conséquent FV′ est égale à VRCG pareillement divisée.

Ainsi puisque KZ est égale à FV, & l'aire $QsCG$ à l'aire VRCG, on aura KZ égale à l'aire $QsCG$ divisée par CF, & par conséquent Zq égale à l'aire sKC divisée par CF.

28. L'on a encore (fig 1) cette analogie $CF^2 : CK^2 :: RFC : SKC$; & à cause des triangles rectangles semblables LYC, FBR, CK^2 ou $CL^2 : LY^2 :: RF^2 : FB^2$. De plus $RF^2 : FB^2 :: RF : Fr :: SK : Ks :: SKC : sKC$. Donc CK^2 ou $CL^2 : LY^2 :: SKC : sKC$. Et rapprochant cette derniere proportion de la premiere, on aura par égalité ordonnée $CF^2 : LY^2 :: RFC : sKC$. Et parceque ces triangles RFC, sKC divisés par CF sont égaux à $V'u$, & Zq (fig. 2), on aura encore $CF^2 : LY^2 :: V'u : Zq$. C'est-à-dire que CF est à LY (fig. 1) en raison sous-doublée de $V'u$ à Zq (fig. 2). Suite.

29. Ceci nous donne une construction bien plus facile. Etant donnée la courbe VQG, décrivez la seule quadratrice uqC; & ayant pris uV' du côté de F égale à $\frac{1}{2}$ FR, menez V'Z parallele à FC, jusqu'à ce qu'elle rencontre la ligne Qq en Z. Prenez (fig. 1) la partie CI' du côté de F, telle que CI' soit à CF en raison sous-doublée de Zq à $V'u$ (fig. 2); & ayant mené la ligne indéfinie $I'Li'$ perpendiculaire à CF, du point C comme centre, & à l'intervalle CK pris dans la figure 2, vous trouverez sur $I'i'$ le point L, qui sera à la courbe cherchée. Car on aura LY = CI', & on connoîtra le rapport de CL à LY. Construction.

30. Il est clair que l'origine de cette courbe est en F. Car lorsque (fig. 2) le point K tombe sur le point F, la ligne Zq se confond avec la ligne $V'u$, & elle a avec elle un rapport d'égalité. Par conséquent CL (fig. 1) devient égale à CI', & les points L & I' tombent sur F. Mais si V'Z (fig. 2) rencontre la quadratrice Cqu en Z', & qu'on tire Z'K' perpendiculaire à CF, on aura CK' égal à CE moitié de l'axe. Car lorsque le point K tombe en K', Zq devient nulle, ou zéro, les points Z & q tombant sur Z'. Ainsi (fig. 1) CI' ou LY devient nulle, CL tombe sur CE, l'angle FCL est droit, & l'angle LCY s'évanouit. Demi-diametre de l'équateur & demi-axe.

31. Tout point comme K (fig. 2) pris entre F & K', donnera toujours deux points comme L (fig. 1), l'un à droite,

dans tous les cas de grande, moyenne & petite diſtance.

décrit du centre C avec le rayon CK, doit couper I′*i*′ de part & d'autre du point I′, & à même diſtance, à moins que la raiſon ſous-doublée de Z*q* à V′*u* ne fût égale, ou plus grande que celle de CK à CF. Car dans le premier cas CI′ (fig. 1) deviendroit égale à CK, l'un & l'autre point L tomberoit ſur I′, & la courbe arriveroit ſur CF; & dans le ſecond CI′ deviendroit plus grande que CK, & le rayon CK ne pourroit du centre C atteindre à la droite I′*i*′. Ainſi cette ligne prolongée à l'infini ne rencontreroit nulle part la courbe. D'où il ſuit que de part & d'autre de CF, cette courbe ſera parfaitement ſemblable & égale à elle-même. Si le point K (fig. 2) tombe au-deſſous de K′, comme l'aire va toujours en diminuant vers C, K*q* ſe confondant avec I*a* ſera moindre que K′Z′, ou I*y* ſur laquelle retombera KZ. C'eſt pourquoi Z*q* changera ſa direction en *ya*, & deviendra négative. Par conſéquent le quarré de LY (fig. 1), qui, à cauſe que V′*u* & CF (fig. 2) ſont conſtantes, eſt dans la même raiſon que Z*q*, deviendra négatif, & la racine LY (fig. 1) imaginaire. D'où il ſuit que la courbe ne deſcendra pas au-deſſous de CE. Mais elle pourra faire au-deſſus de F différentes ſinuoſités, ſelon la nature de la courbe GQV, & de ſa quadratrice C*qu* (fig. 2); & prolongeant cette quadratrice & la droite *y*ZV′ au-deſſus de V′*u*, on aura pour chaque point de CF auſſi prolongée, deux points, l'un à droite, l'autre à gauche de CF, & à égale diſtance, qui feront à la courbe requiſe pour l'équilibre; ou un point unique, la courbe tombant de part & d'autre ſur CE; ou enfin un point nul ou imaginaire: tout cela ſelon que la raiſon ſous-doublée de Z*q* à V′*u* (fig. 2) ſera plus petite, égale, ou plus grande que celle de CK à CF.

Applatiſſement vers les pôles.

32. Dans tous ces cas il eſt évident que la figure ſera applatie au pôle E & au pôle oppoſé, & que cet applatiſſement ſe fera ſentir dans tout arc de la courbe tracée au-deſſous de C; de plus, que la différence du demi-axe CE au demi-diametre de l'équateur ſera égale à la ligne V′Z′ (fig. 2) déterminée par la quadratrice, & dont nous donnerons bientôt une expreſſion générale.

33.

33. Si la gravité primitive eſt dans une raiſon directe quelconque des diſtances, la courbe VQA (fig. 1 & 2) ſe termine au point C, & ce point eſt l'origine de la quadratrice *aqu*. La quadratrice a encore ſon origine en C toutes les fois que la courbe de gravité VQA ſe termine à quelque point G de la ligne CG. Que ſi la gravité eſt dans une raiſon inverſe quelconque des diſtances, la courbe VQA devient infinie, & CG eſt ſon aſymptote. Pour lors ſi, tandis qu'on approche du centre à l'infini, la gravité augmente infiniment moins que dans une raiſon ſimple inverſe des diſtances, l'eſpace compris entre la courbe & ſon aſymptote ſera fini, & la quadratrice *aqu* prendra encore ſon origine en C.

En quel cas l'origine de la quadratrice eſt au centre.

34. Si l'on ſuppoſe que la gravité augmente dans cette raiſon ſimple inverſe des diſtances, ou même davantage, ces eſpaces ſeront infinis, & le point C ne pourra être l'origine de la quadratrice. Dans ce cas il eſt néceſſaire que la quadratrice commence à quelque point I (fig. 2) de la ligne CF, enſorte que les ordonnées comme K*q*, placées au-deſſus de ce point, & du côté de *u*, expriment les aires correſpondantes, comme QKIA, terminées par l'ordonnée IA; & que les ordonnées placées au-deſſous, & du côté oppoſé, expriment les aires qui leur répondent au-deſſous de IA. La quadratrice *uqa* ira de ce côté à l'infini, la courbe XZY tout de même, & aura CG pour aſymptote. La conſtruction ſera pourtant la même, & on s'y ſervira de la même quadratrice, qui eſt unique ſuivant la derniere ſolution, & double ſuivant la premiere. Cette conſtruction ſe trouvera toujours, ſi l'on a égard à la transformation des lieux géométriques, dont j'ai expliqué les regles aſſez au long dans une diſſertation que j'ajoutai l'année derniere aux élémens des ſections coniques, dans le troiſieme tome de mes Elémens.

Quels ſont ceux où la quadratrice eſt aſſymptotique.

35. Si la gravité eſt exactement dans un rapport quelconque direct, ou inverſe des diſtances, ou comme une puiſſance quelconque *m* de la diſtance, la courbe VQA ſera toujours du genre des paraboles ou des hyperboles; ſavoir des premieres, ſi *m* eſt un nombre poſitif, & que la gravité ſoit en raiſon directe des diſtances; & du genre des hyperboles, ſi *m* eſt un nombre négatif, & que la gravité ſoit en raiſon

Des courbes qui expriment une loi de gravité en raiſon quelconque des diſtances.

inverſe des diſtances : exceptez lorſqu'on aura $m = 0$, ou $m = 1$, deux cas dont le premier eſt celui d'une gravité conſtante, & le ſecond d'une gravité qui augmente en raiſon directe des diſtances. Nous parlerons bientôt de l'une & de l'autre. Dans le premier VQA devient une ligne droite parallele à FC, & dans le ſecond c'eſt une droite allant de V en C.

Leurs quadratrices.

36. Dans le cas où l'ordonnée IA eſt en raiſon de CI^m, l'aire terminée par cette ordonnée eſt généralement au rectangle ſous CI & IA, comme 1 à $m+1$; ce qui peut ſe démontrer par la Géométrie ordinaire, & fait en même tems partie de la Géométrie de l'infini & des courbes qui paroîtront bientôt, comme je l'eſpere, dans le quatrieme tome de mes Elémens. Ainſi cette aire ſera $\frac{1}{m+1} \times CI \times IA$. Par conſéquent I*a*, qui eſt proportionnelle à cette aire, ſera dans la raiſon de $CI \times IA$, ou de CI^{m+1} (1); & dans tous ces cas la quadratrice *uqa* ſera toujours dans le genre des paraboles, ou dans celui des hyperboles; exceptez le cas où $m = 0$, dans lequel la gravité eſt conſtante; car alors $m+1 = 1$, & *uqa* devient une ligne droite tendante au point F; & celui où $m = -1$, dans lequel la gravité eſt en raiſon inverſe des diſtances, & la courbe VQA devient une hyperbole du premier genre, dont on ne peut avoir la quadrature que par les logarithmes.

Quantité de l'applatiſſement.

37. De là on peut aiſément déterminer en général, pour ce dernier cas, la quantité de l'applatiſſement. Car on aura cette proportion $K'C^{m+1} : FC^{m+1} :: K'Z'$ ou $FV' : Fu$. Par conſéquent ſi entre FV' & F*u* on prend un nombre *m* de moyennes proportionnelles géométriques, dont la derniere ſoit FX, on aura $K'C : FC :: FX : Fu$. Par la même raiſon l'on aura $FV' : Fu :: FX^{m+1} : Fu^{m+1}$. Et ſi outre cela la ligne V'*u* eſt une petite quantité par rapport à F*u*, les différences des quantités, que nous avons vues plus haut en pro-

(1) Parceque IA eſt par la ſuppoſition en raiſon de CI^m, & que $CI \times CI^m = CI^{m+1}$.

portion continue, feront à très peu près égales entre elles. Donc $Xu = \frac{1}{m+1} V'u$ (1), & puisque $V'u = \frac{1}{2} FR$, on aura $Xu = \frac{1}{2m+2} FR$. Mais parceque toute l'aire est égale à $\frac{1}{m+1} \times FC \times FV$, & que par conséquent cette aire divisée par FC, ou ce qui est la même chose, Fu est égale à $\frac{1}{m+1} FV$; Fu sera à uX, ou FC à FK', comme $\frac{1}{m+1} FV$ à $\frac{1}{2m+2} FR$, ou comme FV à $\frac{1}{2}$ FR. C'est-à-dire que le demi-diametre de l'équateur sera à sa différence à la moitié de l'axe, comme sous l'équateur la gravité primitive est à la moitié de la force centrifuge.

38. Or ce théorème est général dès qu'il n'est question que d'un petit applatissement dans une hypothese quelconque de gravité dirigée à un centre donné ; & l'on aura encore cet autre théorème : la diminution de la distance, depuis l'équateur jusqu'au pôle, est à très peu près dans la même raison, que le quarré du sinus droit de la latitude du lieu, ou que le sinus verse d'une latitude double. L'un & l'autre se démontre aisément par la figure 2. Car en premier lieu, puisque l'aire VRCG doit égaler l'aire $QsCG$, si on en retranche ce qu'elles ont de commun, savoir QSCG, & qu'on leur ajoute $RSsr$; on aura $VrsQ = RrC$. Mais si FR est très petite par rapport à FV, l'aire $VrsQ$ sera à peu près égale à l'aire VFKQ, & elle lui sera exactement égale lorsque le point K tombant sur K', le point r tombe sur F. Or on peut regarder l'aire VFCQ comme un rectangle sous KF & FV, & les triangles RCF, RCr sont égaux, le premier à $\frac{1}{2}$ RF×FC, le second à $\frac{1}{2}$ Rr×FC. C'est pourquoi le point K tombant **Rapport de la diminution de la distance.**

(1) Puisque les moyennes proportionnelles sont entre FV' & Fu, le total des différences sera $V'u$; & le nombre des moyennes proportionnelles étant m, le nombre des différences sera $m+1$; enfin puisque FX est la derniere moyenne proportionnelle, Xu sera une de ces différences qu'on suppose égales. Or dans le cas de différences égales, une différence quelconque est égale au total des différences divisé par leur nombre. Donc $Xu = \frac{V'u}{m+1}$.

en R : on aura ; $Rr \times FC = FK \times FV$, ce qui donne cette analogie : $FC : FK' :: FV : \frac{1}{2} FR$. En ſecond lieu on aura en général $FK \times FV = \frac{1}{2} Rr \times FC$. Par conſéquent FK, qui eſt la diminution de la diſtance, eſt dans la raiſon de Rr ſinus verſe de l'arc RB, dont la moitié eſt la meſure de l'angle RFB, ou de l'angle FCL (fig. 1), qui marque à peu près la diſtance du lieu à l'équateur, ou la latitude du lieu. Et il eſt démontré d'ailleurs par la trigonométrie que le ſinus verſe d'un arc quelconque eſt dans la même raiſon que le quarré de la corde dont la moitié eſt le ſinus droit de la moitié de cet arc.

Deux loix de gravité.

39. Toutes ces vérités ſe déduiſent ici de principes généraux, & d'une maniere très générale. Mais dans ma Diſſertation ſur la figure de la Terre, dont j'ai parlé plus haut (n. 27), j'avois déja donné deux conſtructions conformes à la conſtruction genérale propoſée dans cet ouvrage, depuis le n. 19, leſquelles devoient ſervir pour deux cas de gravité, l'une conſtante, & c'eſt celle qu'avoit en vue *Galilée*, & après lui M. *Huygens*, dans la recherche de la figure de la Terre ; l'autre augmentant dans la raiſon ſimple des diſtances, & c'eſt celle qui eſt ſuppoſée par M. *Herman.* J'avois déduit pour l'un & l'autre cas des équations à la courbe. La premiere équation eſt conforme à celle de M. *Huygens* ; & la ſeconde eſt à une ellipſe du premier genre, qui avoit déja été trouvée par M. *Herman* pour ce cas particulier. Nous allons d'abord les réduire à une plus grande ſimplicité, pour faire voir qu'elles ſont contenues dans la propoſition générale, & nous en déduirons enſuite quelques autres propoſitions qui, par leur ſimplicité & leur beauté, nous ont paru mériter la préférence. Rien de plus beau dans la Géométrie que l'enchaînement de pluſieurs vérités expoſées dans cet ordre naturel que la Géométrie elle-même nous indique.

Conſtruction pour une gravité conſtante. Pl. IV. fig. 2.

40. Si la gravité eſt conſtante, telle que l'a ſuppoſé *Galilée* dans tout le cours de ſa méchanique, & M. *Huygens* dans ſes recherches ſur cette matiere ; la premiere conſtruction générale, que j'ai propoſée depuis le n. 19, devient beaucoup plus ſimple. On a alors (fig. 2) $Fu = FV$, Cau devient une ligne droite, CYX une parabole du premier genre,

dont le diametre est CG, Cu la tangente, & le parametre de ce diametre sera une troisieme proportionnelle à uX & Cu. Car alors VQAG est une ligne droite parallele à FC, le rectangle VFCG divisé par FC est égal à FV, & les aires correspondantes aux abcisses CK, CI sont dans la même raison que ces abcisses. Par conséquent Kq, Ia ont entre elles le rapport de CK à CI; telle est la propriété de la ligne droite: & qZ, aY qui sont comme les quarrés de CK, CI, sont à uX, comme les quarrés de Cq, Ca; telle est la propriété de cette parabole. Surtout il sera fort aisé de trouver la différence du demi-axe au demi-diametre de l'équateur, savoir V'Z'. Car on aura CF : V'Z' :: Fu : uV'. Et substituant à ces deux derniers termes les quantités FV & $\frac{1}{2}$ FR, qui leur sont égales, CF : V'Z' :: FV : $\frac{1}{2}$ FR. C'est-à-dire que CF est à V'Z', comme sous l'équateur la gravité est à la moitié de la force centrifuge. On pourra ensuite déterminer les autres points de la courbe, avec la regle & le compas; ce qui peut toujours se faire, dès qu'il n'est question que de trouver le point de concours d'une ligne droite avec une section conique.

41. On peut même dans cette hypothese de gravité, qui est si simple, se dispenser d'employer la parabole, & trouver une construction beaucoup plus facile en cette maniere. Ayant pris (fig. 3) FV, FR comme auparavant, décrit le demi-cercle FBR, mené RB parallele à Cl, & abaissé la perpendiculaire Br, achevez le rectangle VFCG; tirez Gr qui rencontrera en X la ligne RX parallele à FC; par les points C & r, menez une ligne qui rencontre la ligne GV prolongée au point T, & par le point X la ligne XY' parallele à FV, qui rencontrera la même ligne GV en Y'. Enfin ayant pris TQ, moyenne proportionnelle géométrique entre TV & TY', faites CL égale à GQ, le point L sera à la courbe cherchée.

Autre construction plus facile. Pl. IV. fig. 3.

42. Car on aura Rr : rV :: RX ou VY' : VG ou FC. Donc les triangles RCr, VY'r ont leurs bases Rr, rV réciproques à leurs hauteurs FC, VY'. Donc ils sont égaux. Or les triangles TY'r, TVr ayant leur sommet en r, sont en raison de leurs bases TY', TV, ou en raison doublée de TQ à TV; car TY', TQ, TV sont en proportion continue; ou encore

Démonstration.

en raiſon de TQ*s* à TV*r*, à cauſe de la reſſemblance de ces triangles. Ainſi les triangles TY′*r*, TQ*s* ayant même rapport au triangle TV*r*, ils ſont égaux. Si donc on en retranche TV*r* qui leur eſt commun, il reſtera le trapeze V*rs*Q égal au triangle V*r*Y′, & par conſéquent au triangle RC*r*. D'où ôtant encore ce qu'ils ont de commun, ſavoir le trapeze RS*sr*, & leur ajoutant l'eſpace QSCG; l'aire VRCG qui exprime le poids de CF, égalera l'aire Q*s*CG qui exprime celui de CL; & l'on aura l'équilibre cherché.

Applatiſſement de la figure.

43. Lorſque CL tombe ſur CE, les points B & *r* ſe confondent avec le point F, & le point T remonte à l'infini. En ce cas le rapport de VQ à QY′, qui eſt le même que celui de TV à TQ, devient un rapport d'égalité. Mais comme on a toujours VG : VY′ ou RX :: V*r* : *r*R, le point *r* tombant pour lors ſur F, ce rapport devient celui de VF à RF, ou celui de la gravité à la force centrifuge. Ainſi GV ſera à VQ, ou CF à FK, moitié de RX; c'eſt-à-dire le demi-diametre de l'équateur ſera à ſa différence au demi-axe, comme la gravité VF à la moitié de la force centrifuge RF, comme auparavant, n. 27.

Diminution de la diſtance, & augmentation de la gravité.

44. Cette force centrifuge, ainſi que nous le verrons bientôt, eſt très peu de choſe en comparaiſon de la gravité. D'où il ſuit que FR ſera toujours très petite par rapport à FV. Par conſéquent le point T ſera très éloigné; & VQ ſera à très peu près la moitié de VY′, ou RX. Mais RX, qui aura avec R*r* le rapport de VG à V*r*, le même à peu près que celui de VG à VR, ſera preſque dans la raiſon de R*r* ſinus verſe de l'arc RB, (la moitié de cet arc meſure l'angle RFB égal à l'angle FCL, qui marque à peu près la latitude du lieu), & qui eſt en raiſon du quarré de RB : & prenant RF pour le rayon, RB eſt le ſinus de l'angle RFB, ou à peu près de la latitude. De plus, comme dans la même hypotheſe on peut, à cauſe de la petiteſſe de RF, regarder RS, VG comme paralleles; Q*s* ſera à peu près égale à V*r*, & la ligne R*r* ſera l'excès de la gravité abſolue Q*s* pour le lieu L, ſur la gravité abſolue pour l'équateur en F. De là on a encore pour cette hypotheſe de gravité le théorème ſuivant: *les différences des diſtances au centre, & de la gravité que nous*

éprouvons, sont à peu près comme les sinus verses d'une latitude double, ou en raison doublée du sinus de la latitude.

45. Si la gravité est en raison directe de la distance au centre, la ligne VQG (fig. 1) deviendra une ligne droite allant de V en C. Car GC deviendra nulle, & IA sera en raison de CI. Dans ce cas, & la quadratrice C*au* (fig. 2), & CYX sont des paraboles d'*Apollonius*, dont l'axe commun est CG prolongée, & CF la tangente. Car I*a* sera en raison doublée de CI, aussi bien que *a*Y, & par conséquent IY. Donc le point Z peut se déterminer avec la regle & le compas. Mais on peut même en ce cas se dispenser d'avoir recours à une section conique, & employer une construction bien plus simple, comme on va le voir. Cas d'une gravité en raison directe de la distance. Pl. IV. fig. 1. 2.

46. Soient (fig. 4) les mêmes choses que ci-dessus, excepté que du point V on mene la droite VC, & du point R sa parallele RP, qui rencontre C*r* en P, ensuite PO parallele à RF, & ayant pris CK, moyenne proportionnelle géométrique entre CO & CF, faites CL = CK. Le point L sera à la courbe requise pour l'équilibre. Car on aura V*r*C : VRC :: V*r* : VR :: C*r* : CP :: CF : CO, en raison doublée de CF à CK, ou de C*r* à C*s*, ou en raison du triangle V*r*C au triangle Q*s*C. Donc VRC, qui exprime le poids CF, sera égal à Q*s*C, expression du poids CL. Construction & démonstration. Pl. IV. fig. 4.

47. Mais parcequ'on a aussi (même figure) CF : FO :: C*r* : *r*P :: V*r* : *r*R, & que lorsque CL tombe sur CF, & les points *r* & B en F, ce rapport devient celui de VF à RF, c'est-à-dire de la gravité à la force centrifuge sous l'équateur; & parcequ'enfin, à cause que RF est très petite par rapport à FV, les lignes FK, KO sont à peu près égales; on a ici d'une maniere approchée ce qui se vérifie exactement dans la courbe de M. *Huygens*, savoir que sous l'équateur la gravité est à la moité de la force centrifuge, comme le demi-diametre de l'équateur est à sa différence à la moitié de l'axe. Par conséquent l'applatissement est de part & d'autre sensiblement le même. Même applatissement.

48. De plus, comme on a V*r* : R*r* :: C*r* : *r*P :: CF : FO, on aura en raison alterne cette proportion V*r* : CF :: R*r* : FO, dont le premier terme V*r* est presque constant, & le second Mêmes variations dans la distance & la gravité.

CF conſtant. D'où il ſuit que FO, & FK qui eſt à peu près ſa moitié, ſont l'un & l'autre dans la raiſon de R*r*; & ſi RP rencontre QS en *i*, la différence *is* des gravités VR & Q*s* ſera à peu près la moitié de R*r*. Ainſi il eſt encore vrai dans le cas préſent que les diminutions des diſtances au centre, & les augmentations de la gravité depuis l'équateur juſqu'au pôle, ſont à peu près dans la même raiſon que le ſinus verſe d'une latitude double, ou en raiſon doublée du ſinus de la latitude.

Gravités abſolues & gravités primitives.

49. Enfin puiſque les triangles VCR, QC*s* ſont égaux, leurs baſes VR, Q*s* doivent être réciproques à leurs hauteurs CF, CK. Ainſi comme ces baſes expriment les gravités abſolues, & ces hauteurs les diſtances CF, CL, dans leſquelles on a ces gravités mêmes; les gravités abſolues à la ſuperficie de ce ſolide, ſeront exactement en raiſon inverſe des diſtances au centre : ce qui peut paroître ſurprenant, puiſque les gravités primitives ſont là même en raiſon directe de ces diſtances.

Méthodes dont on va ſe ſervir.

50. Dans ce ſecond cas, la courbe eſt une ellipſe du premier genre, & dans le premier c'eſt la courbe déterminée par M. *Huygens*. Celui-ci ne peut ſe démontrer ſans calcul, puiſque *Huygens* exprime la nature de cette courbe par une équation algébrique. A l'égard de l'ellipſe du premier genre, on peut ſe contenter de la ſyntheſe, & de la pure Géométrie, en ſe ſervant même de mon ancienne conſtruction, que j'ai placée ici la premiere. Mais alors le circuit devient plus embarraſſant & plus long. C'eſt pourquoi nous commencerons ici par propoſer des formules analytiques pour ces deux cas. Nous tirerons enſuite de la ſeconde conſtruction, qui eſt la plus ſimple, des conſtructions pour chaque formule. Celle de la premiere formule ſera également très ſimple; mais celle de la ſeconde donnera bien plus de facilité à démontrer par la ſimple Géométrie que la courbe en queſtion eſt exactement une ellipſe du premier genre.

Equation pour la gravité conſtante; Pl. IV. fig. 3.

51. Soit pour le premier cas (fig. 3) CF $=a$, LY perpendiculaire à l'axe CE, CY $=x$, LY $=y$, la gravité conſtante FV $=m$, la force centrifuge en F, à ſavoir FR $=n$. On aura $CL^2\ (x^2+y^2) : LY^2\ (y^2) :: FR^2 : FB^2 :: FR\ (n) :$

F*r*

Fr $\left(\frac{ny^2}{xx+yy}\right)$. De plus, FC² ($a^2$) : CK² ou CL² ($x^2+y^2$) :: CF$r$ $\left(\frac{1}{2}\times\frac{nay^2}{xx+yy}\right)$: CKs $\left(\frac{ny^2}{2a}\right)$. Et puiſqu'on a CKQG $=$ CK$\times$FV $= m(xx+yy)\frac{1}{2}$, on aura QsCG $= m(xx+yy)\frac{1}{2} - \frac{ny^2}{2a}$. Or GVFC $= ma$, RFC $= \frac{1}{2}na$; & par conſéquent GVRC $= ma - \frac{1}{2}na$. Donc puiſque les aires VRCG, QsCG ſont égales, on aura $m(xx+yy)\frac{1}{2} - \frac{ny^2}{2a} = ma - \frac{1}{2}na$, qui ſe réduit, en ſuppoſant $\frac{ma}{n} = f$, à l'équation trouvée par M. *Huygens*, ſavoir : $y^4 + (4af - 4ff - 2aa)yy - 4ffxx + 4aaff - 4a^3f + a^4 = 0$.

Pour la gravité proportionnelle aux diſtances. F. 4.

52. Pour le ſecond cas, ſoient (fig. 4) les mêmes choſes que ci-deſſus. Soit m, non une gravité conſtante, mais celle qui répond à la diſtance CF, on aura comme auparavant CK$s = \frac{ny^2}{2a}$. De plus, CFV $= \frac{1}{2}ma$, & CF² (a^2) : CK² (x^2+y^2) :: CFV ($\frac{1}{2}ma$) : CKQ $\left(\frac{mx^2+my^2}{2a}\right)$. Ainſi C$s$Q $= \frac{mx^2+my^2}{2a} - \frac{ny^2}{2a}$; & ſuppoſant ſous l'équateur l'excès de la gravité ſur la force centrifuge, ſavoir $m - n = p$, on aura CsQ $= \frac{mx^2+py^2}{2a}$. Or on a VR $= m - n = p$, & FC $= a$, & par conſéquent VCR $= \frac{1}{2}ap$. Donc on aura auſſi cette équation, qui eſt très-ſimple, $\frac{mx^2+py^2}{2a} = \frac{1}{2}ap$, ou bien $\frac{m}{p}x^2 + y^2 = a^2$, équation à l'ellipſe, dont le demi-axe eſt CF $= a$, & ſon conjugué eſt avec lui en raiſon ſous-doublée de p à m. Car faiſant $y = 0$, x repréſente le demi-axe conjugué, & l'on a $\frac{mx^2}{p} = a^2$, & par conſéquent $p : m :: x^2 : a^2$.

Pour toute autre gravité. Pl. IV. fig. 1.

53. Dans toute autre hypotheſe de gravité, il eſt également facile de trouver l'équation à la courbe dans la figure premiere, pourvu toutefois qu'on ait la quadrature de

la courbe VQG qui exprime cette hypothese. Car ôtant de l'aire QKCG, que l'on trouvera par cette quadrature, le triangle KsC, dont la valeur est la même que celle que nous lui avons trouvée plus haut, il restera QsCG; & ôtant pareillement de l'aire VFCG le triangle RFC, on aura VRCG, qui étant supposé égal à QsCG donnera une équation à la courbe. Or dès que la gravité est en raison des distances, multipliée par un nombre rationnel quelconque positif ou négatif, on a toujours une quadrature algébrique de la courbe qui exprime cette loi de gravité; excepté seulement le cas d'une gravité diminuant en raison inverse simple, auquel cas cette courbe, qui est ordinairement une parabole ou hyperbole d'un genre plus élevé, comme nous l'avons vu ci-dessus, devient une hyperbole du premier genre, dont on ne peut avoir la quadrature que par les logarithmes. Ainsi dans tous ces cas, la courbe de l'équilibre sera une courbe algébrique, à l'exception du dernier, où elle ne se détermine que par les logarithmes.

Construction plus facile pour une gravité constante. Pl. IV. fig. 5.

54. Tout ceci se déduit de ma premiere construction proposée (n. 19 & suiv.). Nous allons maintenant tirer de la seconde, qui est beaucoup plus simple, & dont j'ai commencé à parler (n. 17), une construction incomparablement plus aisée. Soit (fig. 5) la gravité constante exprimée par des lignes, comme KQ perpendiculaires à FC, & terminées par une autre ligne VG parallele à la premiere FC. Ayant pris VV', du côté de F, telle qu'il y ait même rapport de FV à VV' que de cette gravité constante à la moitié de la force centrifuge sous l'équateur en F; menez V'Z parallele à FC, & qui rencontrera QK en Z; puis VC qui rencontrera VZ prolongée, & KQ en Z' & q. Faites Z'i moyenne proportionnelle géométrique entre Z'Z, & Z'V' du côté de V'. Menez la droite Vi jusqu'à ce qu'elle rencontre la ligne FC au point I', par lequel vous tirerez I'i' parallele à CE. Du point C comme centre, & à la distance de CK, vous trouverez sur cette ligne I'i', de part & d'autre du point I', un point L, qui sera à la courbe cherchée.

55. Car FV & VV' sont les mêmes que Fu, uV' de la figure 2; & la droite CV est la quadratrice de VG, puisque

l'aire VFCG divisée par CF donne au quotient FV, & que QKCG est à VFCG, comme KC est à FC, ou comme qK est à VF; d'où il suit que qK est aussi égale à l'aire QKCG divisée par CF. Les points ZZ' seront donc les mêmes que dans la figure 2, & il faudra prendre CI' de telle grandeur qu'elle soit à CF en raison sous-doublée de qZ à VV', ou de ZZ' à Z'V', comme dans la figure 1 on l'a pris en raison sous-doublée de qZ à uV' de la figure 2, suivant ce qui a été dit (n. 29). Or c'est ce qu'on a fait en prenant Z'i moyenne proportionnelle entre ZZ' & Z'V', & en tirant la ligne ViI'. Car Z'i est à Z'V' dans cette raison sous-doublée de Z'Z à Z'V', & CI' est à CF, comme Z'i est à Z'V'.

Démonstration. Pl. IV. fig. 1. 2. 4.

56. Quant au second cas, qui est celui d'une force augmentant en raison simple des distances, la construction n'est point tout à fait si simple; mais elle n'est pourtant guere plus embarrassée. Soit prise (fig. 6) la ligne FV de telle grandeur qu'on voudra, divisée en deux parties égales au point u; & du côté de F la ligne uV' qui soit à uF en raison de la force centrifuge à la gravité pour le point F. Ayant mené une ligne quelconque KQ parallele à FV, qui rencontrera CV, Cu en Q, Q'; prenez sa partie Kq troisieme proportionnelle à Fu & KQ', & du côté de Q. Prenez encore CI' du côté de F, telle que CI' soit à CF en raison sous-doublée de qZ à uV'. Tirez I'i' perpendiculaire à CF. Du point C comme centre, & à la distance de CK, vous trouverez sur I'i' le point L, qui sera à la courbe cherchée.

Pour une gravité proportionnelle aux distances. Fig. 6.

57. Car puisque FV exprime la gravité en F, KQ l'exprimera pour le point K, KQ ayant à FV le même rapport que CK à CF, qui exprime le rapport simple des distances. D'où il suit que VC sera le lieu de la gravité. Mais puisque Fu est la moitié de FV, elle sera égale à l'aire VFC divisée par CF. De plus, on a Fu : Kq :: Fu^2 : Q'K^2 :: FV^2 : QK^2 :: VCF : QCK. Donc Kq est égale à QCK divisé par CF. Donc le point q est à la quadratrice. Et c'est pourquoi il a fallu faire que CI' fût à CF en raison sous-doublée de Zq à V'u.

Démonstration.

58. Or la quadratrice uqC sera une parabole du premier genre, dont l'axe sera EC prolongée, CF la tangente, puisque chaque ordonnée comme Kq doit être en même raison que

Applatissement de la figure.

l'aire QKC, ou le quarré de CK. D'autre part, si du point V' on mene V'Z' parallele à FC, on pourra trouver sur cette ligne le point Z' où elle rencontre la quadratrice, sans qu'il soit besoin de décrire cette courbe. Car on aura en cet endroit K'Z' = FV'; & $K'C^2$ sera à CF^2, comme K'Z' à F*u*. Donc si l'on coupe F*t* moyenne proportionnelle géométrique entre FV' & F*u*; & qu'on fasse CK' à CF, comme F*t* à F*u*; on aura le point K' qu'on cherchoit. Car $K'C^2$ sera à CF^2, comme FV' à F*u*.

Théorème pour cette gravité. Pl. IV. fig. 6. 5.

59. Mais parceque dans le cas où V'*u* sera très petite, les lignes V'*t*, *tu* sont à peu près égales; on pourra encore avoir ici le théorème suivant: *le demi-diametre de l'équateur est à peu près à sa différence au demi-axe, comme la gravité sous l'équateur est à la moitié de la force centrifuge sous l'équateur même;* ce qui sera exactement vrai dans l'hypothese de Galilée d'une gravité constante. Car puisqu'on a ici CK' : CF :: F*t* : F*u*, on aura en divisant FK' : CF :: *ut* : F*u*. Or *u*V' est à F*u* en raison de cette force centrifuge à cette gravité, & *ut* est à peu près la moitié de V'*u*. Mais dans la figure 5, V'Z' est à FC, comme VV' à FV; c'est-à-dire suivant la construction de cette figure, comme la moitié de la force centrifuge à la gravité. Ainsi ce qui a été dit en général (n. 33 & suivans) se vérifie dans tous ces cas particuliers.

Que la courbe dans le second cas est une ellipse. Fig. 6.

60. Or dans cette hypothese d'une gravité en raison directe des distances, l'on prouve aisément, sans le secours du calcul, que la courbe FLE est une ellipse d'*Apollonius*, ou du premier genre. Soit C*e* = CE, de l'autre côté du point C. Abaissez LY perpendiculaire à CE. Puisque FK' est la différence de CE & CF, on aura CK' = CE. Or les lignes K'Z' ou KZ, ou FV', K*q*, & F*u* sont en même raison que les quarrés de CK', CK ou CL, & CF. Donc la différence des quarrés de CF, CE, est à la différence des quarrés de CE & CL, comme V'*u* est à Z*q*, ou par la construction comme FC^2 est à $I'C^2$. Et en raison alterne $CF^2 - CE^2 : FC^2 :: CL^2 - CE^2 : I'C^2$; ou en renversant $FC^2 : CF^2 - CE^2 :: I'C^2 : CL^2 - CE^2$; & par conversion de raison $FC^2 : CE^2 :: I'C^2 : I'C^2 - CL^2 + CE^2$. Or $I'C^2 - CL^2 = -I'L^2$. Donc le quarré de FC est au quarré de CE, comme le quarré de CI'

ou de YL est à la différence des quarrés de CE & CY, ou au rectangle sous eY, YE; ce qui est une propriété de l'ellipse du premier genre, dont le demi-axe est CF, & CE son conjugué.

61. De cette construction générale, on pourroit encore, par la simple Géométrie, démontrer cet autre point, savoir qu'à la superficie de cette figure la gravité composée de la force centrifuge & de la gravité primitive, ou la gravité absolue, a une direction perpendiculaire. Bien plus, on pourroit avec la seule Géométrie parvenir de cette hypothese de direction à la construction de la courbe. Mais le chemin seroit long, & on peut se dispenser de s'y engager, suivant ce que nous avons dit (n. 8). Cependant comme il est très facile de démontrer la même chose par les premiers élémens du calcul infinitésimal, & par la méthode dont je m'étois servi dans la Dissertation dont j'ai parlé plus haut, & que cette nouvelle démonstration conduit également à la seconde construction du n. 29, nous l'ajouterons ici. Plusieurs points qu'on peut démontrer par la Géométrie.

62. La ligne LN (fig. 7.) exprime la gravité primitive dirigée au centre C, LO la force centrifuge. Ayant achevé le parallélograme MOLN, les graves seront dirigés par LM au point P du demi-diametre CF, non au centre C; & LP sera la perpendiculaire à la courbe FLE. Il faut donc se servir ici de la formule des sous-normales. Tirez LI' perpendiculaire à CF; PI' sera la sous-normale, qui, suivant les formules élémentaires du calcul infinitésimal, doit être $\frac{-xdx}{dy}$, supposant comme ci-dessus $CY = I'L = x$, $LY = CI' = y$. Usage du calcul. Pl. IV. fig. 7.

63. Faisons comme ci-devant $CF = a$, la force centrifuge en $F = n$. Soit encore CL, ou $\sqrt{xx + yy} = z$; la gravité LN, à la distance de CL, $= u$, qu'on connoîtra par la distance z. On aura par le n. 17 CF (a) : LY (y) :: n : LO ou MN ($\frac{ny}{a}$). De plus, LN (u) : MN ($\frac{ny}{a}$) :: LC (z) : CP ($\frac{nyz}{au}$). Donc $PI' = y - \frac{nyz}{au} = \frac{-xdx}{dy}$, ou $ydy - \frac{nzydy}{au} = -xdx$, ou $ydy + xdx = \frac{nzydy}{au}$. Mais parceque $zz =$ Suite.

$xx + yy$, on a $zdz = xdx + ydy$. On aura donc $zdz = \frac{nzydy}{au}$, & $audz = nydy$, dont l'intégrale est aS. $udz = \frac{1}{2}nyy + B$. B est une quantité constante qu'on ajoute à l'intégrale, & qui doit être déterminée suivant la nature du problême.

Même sujet. Pl. IV. fig. 1. 2. 64. Car dans la figure 2 la distance $z = CK$, & la gravité correspondante $u = KQ$. Ainsi l'aire GCKQ = S. udz, comme Kq est égale à cette aire divisée par CF $= a$. Soit K$q = r$, on aura GCKQ $= ar$, & l'équation précédente se changera en celle-ci $aar = \frac{1}{2}nyy + B$. Soit encore F$u = c$. Lorsque le point L (fig. 1) tombe en F, CL & LY se confondent avec CF; & l'on a $z = y = a$; le point K (fig. 2) retombe sur F, & Kq sur Fu. Donc $r = c$, & l'équation sera, pour ce point, $aac = \frac{1}{2}naa + B$, & $B = aac - \frac{1}{2}aan$. Donc l'équation à la courbe est $aar = \frac{1}{2}nyy + aac - \frac{1}{2}aan$, ou bien $yy = aa \times \frac{r - c + \frac{1}{2}n}{\frac{1}{2}n}$.

Construction. 65. De là on tire une construction très simple de la courbe cherchée. Soit tracée (fig. 2) la seule quadratrice Cqu; & sans qu'il soit besoin des lignes CR, Cr, ni du demi-cercle RBF; coupez, du côté de F, uV' $= \frac{1}{2}$RF. Ensuite ayant mené d'un point quelconque K l'ordonnée Kq à la quadratrice, menez V'y parallele à FC, jusqu'à ce qu'elle rencontre la quadratrice en quelque point Z. Prenez CI' (fig. 1) de telle grandeur qu'elle soit avec CF en raison sous-doublée de Zq à V'u (fig. 2); & ayant mené par le point I' la ligne indéfinie I'i, du point C comme centre, & à l'intervalle de CK pris dans la figure 2, vous trouverez sur I'i (fig. 1) le point L, qui sera à la courbe cherchée. Car on aura (fig. 2) KZ $=$ FV' $= c - \frac{1}{2}n$. Donc qZ $= q$K $-$ KZ $= r - c + \frac{1}{2}n$, & V'u $(\frac{1}{2}n)$: Zq $(r - c + \frac{1}{2}n)$ :: CF² (aa) : I'C² $= yy = aa \times \frac{r - c + \frac{1}{2}n}{\frac{1}{2}n}$. Et comme on a pris CI' de cette grandeur dans la premiere figure, on a la construction qu'on demandoit.

66. Cette construction est absolument la même que celle

que nous avons déduite par la Géométrie simple (n. 29) de l'équilibre des canaux, dont nous avons donné la construction (n. 23). La seconde construction s'accorde parfaitement avec la premiere. M. *Huygens* en a tiré son équation, M. *Herman* son ellipse; & nous les pourrions tirer ici avec la même facilité. Il nous reste à voir quelle sera dans ces hypotheses de gravité l'élévation sous l'équateur. C'est ce qu'on pourra connoître par ce qui a été dit (n. 37), si l'on sait le rapport de la force centrifuge à la gravité sous l'équateur, & la grandeur du moins approchée du demi-diametre de ce cercle. Car quoiqu'on ne la connoisse pas exactement, l'axe n'ayant avec le diametre qu'une petite différence, l'erreur qui en résultera sera elle-même très petite.

La même qu'on a par la Géométrie. Applatissement.

67. Le rapport de la force centrifuge à la gravité sous l'équateur peut se déterminer avec plus de précision, depuis que sous l'équateur même on a observé immédiatement l'effet de la gravité par les oscillations du pendule. MM. *Huygens* & *Newton* ont eu besoin de plusieurs réductions pour trouver ce rapport, n'ayant employé que les observations du pendule faites en Europe. Cependant comme la réduction même ne donne que de petites différences, ils n'ont commis aucune erreur sensible. Or il nous faut examiner en premier lieu quel espace parcourroit sous l'équateur, en un tems donné, un grave dont la chute ne seroit pas même retardée par la résistance de l'air. Nous verrons ensuite quel effet produit sous l'équateur la force centrifuge. L'un se détermine par la longueur du pendule à seconde, réglé sur le tems moyen; l'autre par la connoissance que nous pouvons avoir de la grandeur de la Terre, & de la vitesse de son mouvement diurne.

Rapport de la force centrifuge à la gravité.

68. A l'égard du premier article, M. *Bouguer* l'a déterminé sur les observations qu'il a faites sous l'équateur, lesquelles s'accordent à très peu de choses près avec les observations de M. *de la Condamine* & celles de M. *Godin* (1). Après avoir fait les corrections nécessaires pour la chaleur, & pour la gravité de l'air, M. *Bouguer* a trouvé que la longueur du pendule à secondes, sous l'équateur, au niveau de la mer,

La gravité sous l'équateur.

(1) Elles n'en different pas de deux centiemes de ligne.

& dans un espace vuide d'air, étoit exactement de 3 pieds, 7 lignes, & $\frac{21}{100}$ de lignes; ce qui donne le nombre de 439.21 en réduisant tout en lignes. Or il est démontré dans les premiers élémens de la méchanique, que le quarré du diametre est au quarré de la moitié de la circonférence, ou que 226×226 est à 355×355, comme le double de la longueur du pendule est à l'espace qui seroit parcouru par une chute libre dans le tems d'une oscillation. On trouve par le calcul que cet espace est de 2167.41 de lignes, ou de 15 pieds, & 7.41 de lignes.

Force centrifuge sous l'équateur.

69. L'espace qui exprime l'effet de la force centrifuge, est à peu de choses près le sinus verse de l'arc décrit dans une seconde de tems, ou d'un arc de 15″. Il est certes bien fâcheux qu'on n'ait pas mesuré la grandeur d'un dégré de l'équateur, grandeur dont nous n'aurons peut-être jamais, ni par les observations, ni par la théorie aucune connoissance assez certaine, à cause du tissu irrégulier des parties de la Terre. Mais comme l'erreur qu'on a pu commettre en la déterminant par la théorie, ne peut causer dans un sinus verse fort petit qu'une erreur de peu de conséquence, je supposerai le dégré de l'équateur de la longueur que lui a trouvée M. *Bouguer* par sa théorie, savoir de 57264 toises.

Même sujet.

70. Dans cette supposition, un arc de 15″ est de 206150 lignes, & l'on a d'abord l'analogie suivante: comme le diametre 2000000000 est au sinus de 15″, à savoir 72722, ainsi cet arc de 15″, qui est de 206150 lignes, est au sinus verse, qu'on trouvera de 7.49 lignes. Tel seroit, dis-je, le sinus verse, si la Terre tournoit sur son axe en 24 heures solaires. Mais comme son mouvement diurne s'acheve près de 4 minutes plutôt, différence qui se trouve entre la révolution apparente du soleil & celle des étoiles, qui est plus courte; l'arc décrit sur l'équateur par le mouvement diurne, sera plus grand presqu'en raison inverse de 24 heures, ou de 1440 minutes à 1436, ou de 360 à 359. Or les sinus verses sont en raison doublée des sous-tendantes, ou des cordes, pour lesquelles on peut prendre les arcs mêmes, lorsqu'ils sont fort petits. Il faudra donc corriger l'erreur précédente par cette analogie: comme le quarré de 359 est à celui de 360, ou ce qui revient

à

à peu près au même, comme 358 est à 360, ainsi 7.49 est à un quatrieme terme, qu'on trouvera de 7.53 lignes pour le sinus verse cherché.

Rapport de la force centrifuge à la gravité.

71. La force centrifuge sera donc sous l'équateur à la gravité absolue, comme 7.53 à 2167.41, ou à peu près comme 1 à 288; & elle aura à la gravité primitive le rapport de 1 à 289; ce qui s'accorde avec le sentiment d'*Huygens* & de *Newton*. Si le dégré de l'équateur étoit plus long ou plus court; le sinus verse d'un arc semblable, & par conséquent la force centrifuge, seroit plus grande ou plus petite en raison doublée de la longueur du dégré. D'où il suit qu'il faudroit augmenter ou diminuer le dernier terme de la proportion, suivant cette raison doublée.

Elévation de la Terre sous l'équateur, pour diverses hypotheses.

72. De là il est évident que dans toute hypothese de gravité dirigée à un centre unique, si la force centrifuge est très petite, le demi-diametre de l'équateur est au demi-axe, comme 289 est à 288, ou qu'ils ne different que de $\frac{1}{577}$ de leur tout. Or en supposant au dégré de l'équateur la même grandeur que ci-dessus, on trouvera que son demi-diametre est à peu près de 4300 milles d'Italie. D'où il suit qu'il ne surpassera le demi-axe que d'environ 7 milles; différence peu sensible.

Même sujet. Pl. IV. fig. 2.

73. Dans toutes ces hypotheses de gravité, si la Terre est immobile, sa figure doit être sphérique; si elle tourne sur son axe, c'est un sphéroïde applati; & si la force centrifuge est fort petite, comparée à la gravité sous l'équateur, l'applatissement sera tel que nous l'avons déja déterminé, savoir que le demi-diametre de l'équateur sera à sa différence au demi-axe, comme sous l'équateur la gravité est à la moitié de la force centrifuge; & la diminution des distances depuis l'équateur jusqu'au pôle, sera comme le quarré du sinus de la latitude. Or pour que la force centrifuge soit censée fort petite, il faut que FK', qui en dépend pour sa longueur, soit si petite, que l'aire VFKQ (fig. 2) puisse dans tous les points, & lors même que K tombe en K', être prise pour un rectangle; c'est-à-dire qu'ayant abaissé sur KQ la perpendiculaire VD, le triangle mixtiligne VQD soit extrêmement petit, par rapport à l'aire VFKD. Ce qui dépend aussi de la nature de la courbe VQG, dont les ordonnées mesurent

les gravités. Car elle pourroit être telle, que quoique FR fût fort petite par rapport à FV, comme FK' par rapport à FC, ce triangle ne fût pas pour cela des plus petits, en comparaison du rectangle VFKD.

Solution d'un problême très général.

74. On pourroit encore résoudre ce problême (1) : trouver une hypothese de gravité dirigée à un centre unique, telle que l'applatissement soit d'une grandeur quelconque donnée, & que la diminution de la distance depuis l'équateur soit en raison quelconque, quel que soit le rapport de la force centrifuge à la gravité sous l'équateur. Car ayant pris F*u* & V'*u* de sorte qu'elles aient entre elles le même rapport, que la gravité à la moitié de la force centrifuge sous l'équateur ; puis FK' de telle grandeur qu'on voudra, & K'Z' parallele à F*u*, jusqu'à ce qu'elle rencontre V'*y* parallele à FC en un point Z' ; si par les points CZ'*u* on trace une courbe, dont les ordonnées augmentent à mesure qu'elles s'éloignent du point C, & qu'on décrive la courbe VQG, dont la quadratrice soit *u*Z'C (je donnerai pour cela une méthode générale, où l'on n'emploie que la Géométrie de l'infini, dans le quatrieme tome de mes Elémens), l'hypothese de gravité sera exprimée par cette courbe VQG, qui représentera également l'applatissement donné FK'. Or ayant pris FR quatrieme proportionnelle à *u*F, 2*u*V', & FV, & fait un angle quelconque FRB dans le demi-cercle, je tire B*r*, C*r*, & je prends chaque diminution FK de la distance CK correspondante à l'angle FRB. Je fais encore $uX = \frac{1}{2} Fr$; & ayant mené KZ parallele à F*u*, je coupe Z*q* de telle grandeur qu'elle soit à X*u* en raison doublée de CK à CF. J'aurai par ce moyen tout l'arc Z'*qu* de la quadratrice, & par-là même l'arc correspondant de la courbe des gravités, laquelle représentera les diminutions des distances pour chacun des angles, comme il sera aisé de s'en convaincre en remontant par la construction que nous avons commencé de donner au n. 23.

75. En voilà assez pour ce qui regarde l'hypothese d'une gravité tendante à un centre unique, toujours égale à égales dis-

(1) Pour comprendre la solution de ce problême, il faut se rappeller ce qui a été dit depuis le n°. 20 de ce Livre jusqu'au n°. 25.

tances du centre en tout sens, & augmentant ou diminuant en raiſon quelconque, ſuivant la différence des diſtances. Nous réſoudrons encore ci-après quelques autres problêmes qui ont rapport à ce genre de gravité, par exemple : trouver une hypotheſe de gravité dirigée à un centre unique, telle qu'il y ait un rapport quelconque donné, non entre les diminutions des diſtances, mais entre les accroiſſemens de la gravité abſolue depuis l'équateur juſqu'aux pôles. Mais pour le préſent nous allons paſſer à d'autres hypotheſes de gravité; & nous commencerons par cette hypotheſe ſi connue, ſi ſimple & ſi belle, dans laquelle la Terre, ſoit immobile, ſoit mue autour de ſon axe, pourroit être un ſphéroïde oblong. Soit la gravité (fig. 8) dirigée à deux points E & F, enſorte qu'elle ſoit compoſée de deux gravités égales, conſtantes & dirigées toujours au même point. Si le fluide a la figure d'une ellipſe ABD, ayant ces points pour foyers, pour grand axe AD, pour demi-axe conjugué CB, & qu'il ſoit immobile, il ſera en équilibre. Car en quelque point que ce ſoit, comme G, la gravité compoſée des gravités GH, GI, ſera dirigée par GK diagonale du rombe GHKI, laquelle diviſe l'angle HGI, ou EGF en deux parties égales : d'où il ſuit qu'elle eſt perpendiculaire à la ſuperficie, comme il eſt requis pour l'équilibre. Or dans les points D & A, la gravité compoſée ſera la ſomme de ces deux gravités. Dans tout autre point G, la diagonale GK n'égalera pas la ſomme des côtés GI, GH, puiſqu'elle ſera moindre que celle de GI, IK. Elle ſera même d'autant moindre, comme on pourroit aiſément le démontrer s'il étoit néceſſaire, que l'angle HGI ſera plus grand. Or dans l'ellipſe cet angle eſt d'autant plus grand, que le point G approche plus du point B. Ainſi dans cette hypotheſe de gravité, la Terre ſuppoſée même immobile ſera un ſphéroïde oblong, quoique la gravité aille toujours en diminuant du pôle à l'équateur.

d'une gravité conſtante dirigée à deux centres.
Pl. IV. fig. 8.

76. Ceci peut paroître d'abord incroyable, puiſqu'il ſemble au contraire que pour compenſer l'excès de la gravité & de la peſanteur au point D ſur celle du point B, le canal CD devroit être le moindre en hauteur. Mais il eſt aiſé de répondre à l'objection. Car dans le canal BC, tous les points

Equilibre des canaux.



peſent ſur le centre C, & leur peſanteur eſt composée des deux gravités compriſes dans l'hypotheſe, quelque obliques qu'elles ſoient. Il eſt vrai qu'à meſure qu'on approche du centre C, cette obliquité augmente, ainſi que l'oppoſition des forces, qui enfin deviennent entierement contraires au point C; mais la gravité n'eſt jamais nulle qu'au point C: au lieu qu'en DC la gravité composée eſt à la vérité conſtante, depuis D juſqu'en F; mais de F en C, elle ſe trouve détruite par des directions contraires, & il eſt aiſé de démontrer que la ſomme de tous les points peſans en BC doit ſurpaſſer celle de tous les points en FD.

Ce qui arrive dans le cas du mouvement de rotation.

77. Maintenant ſi ce ſolide tourne autour de l'axe AD, il eſt évident que la force centrifuge diminuera le poids de tout le canal CB, ce qui rompra l'équilibre, qui ne pourra être recouvré, à moins que le fluide ne s'éleve en B, ou qu'on n'y répande une nouvelle couche de matiere liquide capable de compenſer la diminution occaſionnée par la force centrifuge. Si le mouvement de rotation eſt lent, l'élévation en B ſera peu ſenſible, & la figure ſera toujours allongée. S'il devient plus rapide, il pourroit augmenter la force centrifuge au point, que pour conſerver l'équilibre il ſeroit néceſſaire que CB fût égal, ou même plus grand que CD.

Loi de gravité de M. de *Mairan*. Pl. IV. fig. 9.

78. M. *de Mairan*, par une méthode fort ingénieuſe, & beaucoup plus générale, nous apprend à trouver pour une Terre mobile ou immobile, une figure plus ou moins applatie ou allongée. Soit la courbe FGHI (fig. 9) composée de quatre arcs ſemblables, & également placés autour du centre C, auquel ils ſont adoſſés. Suppoſons encore qu'elle ſoit la développée de la courbe ABDE, de ſorte que le fil qui enveloppe ou entoure l'arc GKF, & qui eſt étendu le long de ſa tangente depuis F juſqu'en A, décrive par ſon extrémité A l'arc ALB, tandis que la courbe FKG ſe développe; qu'enſuite le fil qui entoure l'arc GH décrive l'arc DB; & que pareillement les arcs DE, EA ſoient décrits par le développement des arcs HI & IF. Si l'on a un fluide de la figure de ABDE, dans lequel la gravité ſuive toujours la direction du fil LK, & tende continuellement au point K, où le fil touche ſucceſſivement chaque point de la développée, tandis qu'on

l'applique à cette courbe, ou qu'on l'en ſépare; la direction ſera dans chaque point L perpendiculaire à la ſuperficie. Car c'eſt une propriété générale des courbes qui ſe décrivent par le développement d'autres courbes, que le rayon oſculateur ou le fil ſoit, dans chaque poſition, tangente de la développée, & perpendiculaire à la courbe décrite.

79. On aura donc dans ce fluide cette ſorte d'équilibre; & ſi outre cela il y a tel dégré de gravité dans les parties intérieures, que l'égalité des poids, dans les canaux qui communiquent de l'un à l'autre, n'en ſoit aucunement troublée, le fluide ſera parfaitement en équilibre. De l'équilibre.

80. On démontre aiſément que AD eſt plus grand que EB. Par conſéquent ſi le fluide tourne autour de l'axe BE, il ſera applati, & cet applatiſſement ſera encore augmenté par la force centrifuge. Mais s'il tourne autour de DA, il ſera allongé, quoiqu'un peu moins que dans la figure, ou ſphérique, ou même raccourci, ſuivant le dégré de viteſſe de la rotation, & de la force centrifuge qui en eſt une ſuite. Du mouvement de rotation.

81. En voilà aſſez ſur ces ſortes d'hypotheſes que nous avons choiſies parmi pluſieurs autres qu'on auroit pu propoſer. Il paroît certain que la gravité n'eſt dirigée ni à un, ni à deux points. Cela ſeroit entierement contraire à cette gravitation générale, ſuivant laquelle tous les corps céleſtes peſent les uns ſur les autres, ſinon exactement, du moins à fort peu de choſes près, en raiſon inverſe des quarrés des diſtances; gravitation par laquelle le grand *Newton* a découvert aux Phyſiciens le ſyſtême de l'univers, & de laquelle ſeule dépendent un ſi grand nombre de phénomenes, dont elle fournit de ſi heureuſes explications, qu'on peut s'en ſervir pour prédire de nouveaux phénomenes, ſans crainte de ſe tromper. Or on en conclut par analogie, que toutes les parties de la matiere peſent les unes ſur les autres (1), par une certaine action mutuelle, qui à la vérité ne me paroît être nulle part exactement en raiſon inverſe des quarrés des diſtances, comme je l'ai expliqué dernierement dans une Diſſertation ſur la loi des forces qui exiſtent dans la nature; mais qui, à de grandes Que la gravité neutonienne eſt la ſeule qui exiſte dans la nature.

(1) L'Auteur en donne une nouvelle preuve dans la ſuite de cet ouvrage.

distances, en approche de si près, qu'on n'y peut appercevoir aucune différence sensible.

Les gravités précédentes n'y exist et pas; & pourquoi.

82. Ajoutons que dans ces premieres hypotheses d'une gravité proportionnelle à la puissance des distances, la Terre seroit trop peu applatie, & qu'on connoît par la mesure des dégrés, ainsi que nous le ferons voir au chapitre second, qu'elle doit l'être davantage; & que dans l'hypothese d'une gravité constante, la différence de la gravité sous l'équateur à celle qu'on éprouve dans les pays septentrionaux, feroit beaucoup au-dessous de celle qu'on y a découverte par les oscillations du pendule.

Suite.

83. Enfin la théorie de M. *de Mairan*, que nous venons de proposer, explique bien à la vérité la direction de la gravité primitive, c'est-à-dire d'une gravité qui n'est point diminuée par la force centrifuge, & qui est dirigée, non à un centre, mais à une certaine courbe; mais cette direction même ne dépend point de cette courbe, & ne se termine point à une courbe constante. Car qu'il survienne quelque changement dans la disposition des parties, ce qui ne peut manquer d'arriver par le retardement ou l'accélération du mouvement diurne; il y aura aussi du changement dans la courbe, dont les tangentes marquent la direction de la gravité. Ainsi cette courbe n'étant point donnée, avant la détermination de la figure, elle ne peut servir à déterminer une figure qui devroit auparavant la déterminer elle-même.

Trouver la figure de la Terre dans cette hypothese. Solution de M. *Mac-Laurin* simplifiée.

84. Il nous reste donc à examiner quelle sera la figure de la Terre, mue autour de son axe, dans l'hypothese de la gravité newtonienne. M. *Mac-Laurin*, dans sa Dissertation sur la cause physique des marées, qui fut couronnée avec trois autres en 1740 par l'Académie royale des Sciences de *Paris*, propose une solution que je tâcherai d'abord ici d'expliquer; & je ne me servirai que de la simple Géométrie pour développer ce qu'elle renferme de plus important, en y faisant quelques additions & quelques changemens, suivant qu'il paroîtra convenir davantage à mon sujet. Mais il faut préalablement éclaircir quelques points nécessaires pour cette solution.

85. Soient (fig. 10 & 11) deux ellipses semblables, ayant

un centre commun C, & leurs axes homologues dans la même position. Soient NV*n* ordonnée de l'ellipse intérieure à l'axe D*d*, & IDP perpendiculaire à l'axe D*d*, & qui rencontre l'ellipse extérieure en I & P. Joignez DN, D*n*, & menez-leur les paralleles PM, P*m*, qui rencontrent l'ellipse extérieure en M & *m*. Menez encore PH parallele à l'axe D*d*, sur laquelle vous abaisserez les perpendiculaires MQ, *mq*. La somme des lignes PQ, P*q* de la premiere figure, dans laquelle les points M *m* sont du même côté de PI, & leur différence dans la seconde, dans laquelle ces points sont l'un d'un côté, l'autre de l'autre, sera égale au double de DV. Théorème. Pl. IV. fig. 10. 11.

86. Car si l'on tire la corde HE parallele à P*m*, & leur diametre commun G*g*, dans l'ellipse extérieure, qui le sera aussi de la corde D*n* dans l'ellipse intérieure, & qui par conséquent coupera toutes ces cordes en deux parties égales, aux points T, F, L, & que ce diametre coupe en quelque point O la ligne PH; les triangles TPO, FHO, LDC seront semblables, étant formés par des paralleles. Ainsi l'on aura PT : PO :: HF : HO :: DL : DC. Et prenant dans la figure 10 les sommes, & dans la figure 11 les différences des antécédens & des conséquens, on aura pour le premier cas la somme, & pour le second la différence de PT, HF à PH, comme LD est à DC, ou comme *n*D à *d*D (1). Démonstration.

87. Mais parceque l'ordonnée à l'ellipse extérieure, tirée du point *d*, doit être parallele & égale à DP, & par conséquent aboutir au point H, où la ligne PH rencontre l'ellipse extérieure, on aura PH = D*d*. Ainsi la somme de TP, HF dans le premier cas, & leur différence dans le second, sera égale à D*n*. Suite.

88. Maintenant comme *n*N est coupée également, & à angles droits au point V, les angles NDV, VD*n* sont égaux, & par conséquent l'angle MPH est égal à l'angle *m*PH (2), ou à son alterne PHE. D'où il arrive que si l'ellipse fait une Suite.

---

(1) *n*D & *d*D sont doubles de LD & DC, par conséquent elles sont entre elles dans la même raison que LD & DC.

(2) Dans la figure 11, au lieu de *m*PH, c'est *m*PO, ou l'angle de même côté PHE.

révolution autour de l'axe perpendiculaire à l'axe B*b*, le point H tombant en P, & le point P en H, PM doit prendre la place de HE, à laquelle elle devient par-là même égale, & double de HF. Donc puisque P*m* est aussi double de PT, on aura dans le premier cas la somme de PM, P*m*, & dans le second leur différence égale au double de D*n*.

Conclusion.

89. Enfin puisqu'à cause des triangles semblables, *mq*P, MQP, *n*VD, ces triangles ayant chacun, outre un angle droit, les angles en P & D égaux, on a MP : QP :: *m*P : *q*P :: D*n* : DV; on aura aussi la somme de PQ, P*q* dans le premier cas, & leur différence dans le second égale au double de DV. C. Q. F. D.

De la démonstration de M. *Mac-Laurin.*

90. Ce dernier article fait le quatrieme corollaire du lemme I de la Dissertation de M. *Mac-Laurin*, en faveur duquel il semble avoir proposé ce lemme, avec tous les corollaires précédens. Du moins n'y a-t-il que le quatrieme de nécessaire aux propositions qui suivent dans sa Dissertation. M. *Calendrini* de Genève a démontré la même chose par le calcul, dans des notes qu'il a ajoutées à la Dissertation de M. *Mac-Laurin*, à la fin de la premiere partie du tome 3 des Commentaires composés par les PP. *Jaquier* & *Leseur* sur les principes de *Newton*. Mais la démonstration que je viens de donner de cette proposition si utile, me paroît plus simple & plus naturelle.

Autre lemme de M. *Mac-Laurin.*

91. Dans la même Dissertation, lemme IV, M. *Mac-Laurin* démontre qu'un petit corps placé successivement au sommet des pyramides, ou des cônes semblables & homogênes, & dont la gravité est composée de celle qu'il a sur chaque partie, en raison directe des masses, & en raison inverse des quarrés des distances, que ce corps, dis-je, a une gravité proportionnelle aux hauteurs, ou aux côtés homologues des cônes & des pyramides. La démonstration est facile. Car si on divise deux de ces pyramides ou cônes en un nombre égal de parties semblables, & semblablement posées, les masses partielles seront comme les masses totales, ou comme les cubes de leurs côtés homologues, & les quarrés des distances au sommet comme les quarrés des mêmes côtés. Ainsi ce corps pésera sur chacune de ces parties, en raison composée de la

directe

directe des cubes, & de l'inverse des quarrés des côtés homologues ; c'est-à-dire en raison simple directe de ces côtés.

92. L'Auteur ajoute deux corrollaires ; le premier, que dans tous les points semblablement posés de tous les solides homogênes & semblables, la gravité est en raison des côtés homologues. Car on peut diviser ces solides en un nombre égal de pyramides semblables. Corollaire I.

93. Le second corollaire prouve que si une petite particule de matiere est placée dans une couche elliptique, terminée par deux sphéroïdes semblables & semblablement posés, elle sera en équilibre. Cette vérité a déja été démontrée par *Newton;* & il est aisé de la déduire du corollaire précédent. Car il n'est pas difficile de prouver que les parties des pyramides opposées & semblables, qui passent par ce point, & qui sont plongées de part & d'autre dans ces mêmes couches, sont égales entre elles. Corollaire II.

94. De plus, si l'on a deux sphéroïdes elliptiques semblables, engendrés par la circonvolution de deux ellipses semblables ADBE, *adbe* (fig. 12) ayant un centre commun, & les axes homologues AB, *ab*, & DE, *de* dans la même position ; & que ces sphéroïdes soient coupés par un plan quelconque IOL, qui ne soit point perpendiculaire à l'axe AB de la révolution ; les deux sections seront deux ellipses semblables, qui auront même centre, & même position de leurs axes homologues. Théorême sur la section de deux ellipses semblables. Pl. IV. fig. 12.

95. En effet, si l'on fait passer par l'axe AB le plan AEBD perpendiculaire au plan de la section, & qui le coupe en IL, on voit que cette section AEBD du sphéroïde est elle-même l'ellipse génératrice. Supposons que IOL soit une partie de la commune section du plan IOL, prise de part ou d'autre de IL ; que le diametre MN soit parallele à cette ligne IL, & que par un point quelconque H, pris sur IL, on tire PQ perpendiculaire à AB. Imaginons encore un plan passant par PQ, & perpendiculaire à AEBD. Il est clair que son intersection avec le sphéroïde sera un cercle, dont le diametre est PQ ; & que son intersection HO avec le plan IOL, également perpendiculaire au même plan IEBD, sera perpendiculaire à ce plan, & par conséquent à PQ & IL tout ensemble. Démonstration.



Suite. 96. Par la nature du cercle $PH \times HQ = HO^2$. Par celle de l'ellipse, comme on peut le voir dans le tome 3 de mes Elémens (n. 199), $IH \times HL : PH \times HQ :: MC \times CN$ ou $MC^2 : DC \times CE$ ou DC^2. Donc le rectangle sur les parties IH, HL de la ligne IL, sera constamment au quarré de HO perpendiculaire à cette ligne, & terminée par la section IOL, comme le quarré de MC, au quarré de CD. La section IOL sera donc une ellipse, dont l'un des axes sera IL. On prouvera également, en substituant aux lettres majuscules les petites lettres qui leur répondent, que *iol* est une ellipse, dont l'axe est *il*, & que $iH \times Hl : Ho^2 :: mC^2 : Cd^2$.

Conclusion. 97. Maintenant puisque les ellipses semblables AEBD, *aebd* ont une même position, il est évident que les diametres conjugués des diametres MN, *mn* auront aussi même position; que par conséquent ils partageront également leurs ordonnées IL, *il* au même point G, qui, pour cette raison, sera le centre commun des ellipses IOL, *iol*. D'où il suit que si dans les ellipses on éleve les demi-axes GF, G*f* perpendiculaires à IL, *il*, on aura $IG \times GL$ ou $IG^2 : GF^2 :: MC^2 : CD^2$; & $iG \times Gl$ ou $iG^2 : Gf^2 :: mC^2 : Cd^2$; & qu'à cause que ces ellipses IOL, *iol* sont semblables, ces rapports seront tous égaux. Donc les demi-axes GI, GF, & G*i*, G*f* seront aussi dans la même raison entre eux. Donc les axes IL, *il* seront ensemble, ou le premier, ou le second axe, puisqu'ils sont homologues; & les axes homologues auront une même position. C. Q. F. D.

Corollaire I. 98. Il s'ensuit premierement que toutes les sections de l'un & de l'autre solide, faites par des plans paralleles, sont semblables; qu'elles ont toutes leurs centres sur la ligne CG, & que leurs axes homologues seront paralleles. Ce qui est évident, puisque toutes les intersections IL de ces plans seront paralleles entre elles, & par conséquent aussi au diametre MCN.

Corollaire II. 99. Il s'ensuit en second lieu que IL, *il* seront chacun premier, ou second axe, suivant que l'axe AB de la révolution sera premier, ou second, ou ce qui revient au même, suivant que les sphéroïdes seront allongés ou applatis. Car dans le premier cas CD, C*d* seront les demi-axes conjugués, & par conséquent plus petits qu'aucun des demi-diametres

CM, C*m*. Dans le second cas ils seront les moitiés des premiers axes, & par conséquent plus grands. Ainsi GF, G*f* seront toujours plus petits dans le premier cas, & plus grands dans le second que GI, G*i*.

100. Il s'ensuit en troisieme lieu que si AEBD représentoit le plan de l'équateur du solide, dont l'axe fût perpendiculaire à ce plan, & qu'on fît passer une section quelconque, IL aussi perpendiculaire à ce même plan; la section seroit dans l'un & l'autre solide, une ellipse semblable à la génératrice du solide, ayant IL pour grand ou petit axe, suivant que l'axe de la révolution seroit au contraire le petit ou le grand axe de l'ellipse génératrice. Car en ce cas la section du solide faite par MN, & dont le plan passeroit par l'axe, & seroit par conséquent perpendiculaire au plan de l'équateur AEBD, seroit elle-même l'ellipse génératrice. Or la section faite par IL est parallele à celle-ci. D'où il suit, par le n. 98, qu'elles seront semblables. Corollaire III.

101. En quatrieme lieu, si le plan AEBD représente, ou une section quelconque faite par l'axe de révolution, ou le plan même de l'équateur perpendiculaire à cet axe; & que par l'extrémité *a* de l'axe du solide intérieur, ou d'un de ses diametres quelconque, on mene un plan perpendiculaire au premier, qui ne passe point par la tangente en *a* de la section *aebd*; ce plan coupera les deux sphéroïdes, de maniere que ce même point *a* sera l'extrémité de l'un des axes de la section intérieure. Corollaire IV.

102. Premierement, il coupera les deux sphéroïdes, parceque les plans qui touchent en *a* le sphéroïde intérieur, passent par les tangentes en *a*; tandis que tous les autres plans, qui passent par des points comme *a*, coupent ce sphéroïde; & que tout plan qui passe par ces points, pris dans l'intérieur du sphéroïde AEBD, le coupe nécessairement. En second lieu, le point *a* sera l'extrémité de l'un des axes de la section intérieure, parcequ'alors le point *i* tombe en *a*. Démonstration.

103. Supposons maintenant que le point P (fig. 10 & 11) pris en quelque endroit qu'on voudra de la surface du sphéroïde elliptique homogêne, pese sur toutes les parties égales du sphéroïde, en raison inverse des quarrés des distances;

Somme des forces qui agissent sur un point placé à la superficie d'un solide elliptique. Pl. IV. fig. 10. 11.

& qu'ayant coupé le sphéroïde par le point P, & par l'axe de révolution, la section soit PB*gb*; & B*b*, qui est l'un des axes de la section, soit l'axe du solide, ou le diametre de son équateur. Ayant tiré la ligne PDI perpendiculaire à B*b*, imaginons un sphéroïde intérieur semblable au premier, & semblablement posé, dans le sens que nous avons dit, passant par le point D, & dont la section faite par ce même plan soit DN*dn*. Si le point D pese de la même maniere sur les parties du sphéroïde intérieur, & que toutes les gravités sur chaque partie équivalent à deux, dont l'une suive la direction de l'axe B*b*, & l'autre une direction perpendiculaire à cet axe; la somme de toutes les gravités du point P, suivant la direction de B*b*, sera égale à celles de toutes les gravités du point D, suivant la même direction.

Démonstration.

104. Car supposons que le sphéroïde soit coupé en D par un plan perpendiculaire à PI, & dont l'intersection avec le plan BI*b*P sera B*b* aussi perpendiculaire à PI; & qu'ensuite la ligne PDI aussi bien que PQ, DV, restant immobiles, le plan PBI*b* tourne à droite, ou à gauche autour de PI, par un mouvement continu, jusqu'à ce qu'il devienne perpendiculaire au plan QPDV; ce plan coupera continuellement l'un & l'autre solide, par le n. 101, & les sections BI*b*P, DN*dn*, seront toujours des ellipses semblables, ayant un centre commun, & leurs axes homologues dans la même position, par le n. 94. Enfin le point D sera l'extrémité de l'un des axes D*d* de la section intérieure, par le n. 101.

Suite.

105. Ceci posé, soit une portion quelconque des deux solides, terminée par deux de ces plans; & que la portion du solide intérieur soit coupée par un nombre quelconque de plans DN, D*n*, pris deux à deux, infiniment proches les uns des autres, perpendiculaires au plan QPDV, & passant par les cordes DN, D*n*, également inclinées de part & d'autre sur l'axe D*d*; & que la portion du solide extérieur soit coupée par autant de plans paralleles aux premiers.

Suite.

106. Il est clair que DN, D*n* seront égales, étant également inclinées sur l'axe D*d* de la section, & sur la ligne immobile DV. Car N*n* sera perpendiculaire à D*d*, & parallele à PI; d'où il suit qu'elle sera perpendiculaire au plan D*d*V.

Par conséquent on pourra faire passer par cette ligne un plan perpendiculaire à DV, qui la coupera en quelque point V, auquel ayant tiré les lignes NV, *n*V, les angles NVD, *n*VD seront droits. Donc les triangles VDN, VD*n* seront égaux, & l'angle NDV égal à l'angle *n*DV.

107. Or les lignes PM, P*m* seront paralleles à DN, D*n*, & autant inclinées sur PQ, que DN & D*n* sur DV. Donc par le n. 88, la somme, ou la différence de MP, *m*P sera égale au double de *n*D; & par la même raison, ayant abaissé les perpendiculaires MQ, *mq*, la somme, ou la différence de PQ, P*q* sera égale au double de DV. Suite.

108. On voit de plus que les portions des solides seront par-là même divisées en un nombre égal de pyramydes, prises deux à deux, terminées par des plans paralleles, & par conséquent semblables entre elles, dont les longueurs seront DN, D*n*, PM, P*m*, & dont les forces suivant les directions de PM, P*m*, DN, D*n*, composées des forces de chacune des parties, seront aux points D & P, par le n. 91, comme ces longueurs. Que si on décompose ces forces, & qu'on les réduise chacune à deux autres, dont l'une suive la direction DV, PQ, l'autre la direction perpendiculaire MQ, *mq*, *n*V, NV; ces gravités absolues seront à celles qui agissent suivant les directions PQ, DV, comme ces longueurs à PQ, P*q*, & DV, DV. D'où il suit que les gravités étant ainsi réduites, celles qui viennent des pyramides MP, *m*P sont à celles qui viennent des pyramides DN, D*n*, comme PQ, P*q* à DV, DV; c'est-à-dire comme la somme de PQ, P*q* lorsqu'elles se prennent du même côté (fig. 10), & leur différence quand elles sont d'un côté opposé (fig. 11), est au double de DV; ce qui revient, par le n. 107, au rapport d'égalité. Suite.

109. Donc puisque la même chose arrive dans toutes les pyramides de chaque portion, prises deux à deux, & dans toutes les portions engendrées par le mouvement du plan autour de PI; la somme de toutes les gravités du point P, suivant la direction de B*b*, est égale à la somme de toutes celles du point D, suivant la même direction. C. Q. F. D. Conclusion.

110. De là on doit conclure que la gravité, suivant la Corollaire.

direction de l'un des axes B*b* de l'ellipse génératrice, dans les points également éloignés de l'autre axe, ou ce qui est le même dans des points quelconques *p*, pris sur PDI perpendiculaire à B*b*, que cette gravité, dis-je, est toujours égale; & qu'elle est à la gravité du point placé en B, comme CD est à CB.

Démonstration.

111. Car si l'on imagine un troisieme sphéroïde semblable, qui passe par *p*; toute la gravité de l'orbe extérieur devient nulle, par le n. 93. Quant au reste de la gravité qui agit sur ce sphéroïde, on démontre, comme ci-dessus, qu'elle est égale à la gravité en D. D'où il suit qu'elle est partout la même. Ce qu'il falloit d'abord démontrer.

Suite.

112. En second lieu, puisque PBI*b*, & DN*dn* sont des solides semblables & homogênes, sur lesquels les points B, D sont également placés; leurs gravités, par le n. 91, seront comme CB, CD.

Théorème général sur l'équilibre par des canaux rectilignes.

113. Après avoir établi les principes qui conviennent à la nature de l'ellipse, j'ajouterai un théorème, qui donne en général l'équilibre dans toutes les courbes. Il est conçu en ces termes: *si dans une masse fluide la gravité de toutes les parties est telle, que deux canaux quelconques rectilignes, conduits d'un point quelconque, pris dans l'intérieur de cette masse, à la superficie extérieure, soient en équilibre; toute la masse sera en équilibre.*

Trois choses requises pour cela.

114. Pour la démonstration de ce théorème, il faut prouver trois choses: premierement que toutes sortes de canaux, même les curvilignes & les mixtilignes seront en équilibre; en second lieu, que tout canal qui traverse la masse, & aboutit de part & d'autre à la surface, ne pese point contre son extrémité; en troisieme lieu, que dans la superficie la gravité est perpendiculaire à cette superficie. De ces trois propositions, la premiere fait voir qu'aucune partie contenue dans la masse du fluide, ne peut être ébranlée par aucune force prépondérante dans les autres côtés; la seconde qu'aucune partie placée sur la surface, ne peut être élevée plus haut par la pression des parties internes; la troisieme, qu'une partie placée sur un point de la surface, ne peut s'éloigner à droite ou à gauche, ou s'écouler comme si elle étoit sur un plan incliné: autant

d'articles néceſſaires à la démonſtration du théorème.

115. Le premier ſe démontre ainſi. On ſuppoſe que du point C (fig. 13) il ſorte un canal rectiligne CA; que d'un point quelconque E de ce premier canal, il en ſorte un ſecond EM; d'un point F du ſecond, un troiſieme FL; d'un point G du troiſieme, un quatrieme GK; & du point H de celui-ci un autre canal HI; enfin que du point C il parte un autre canal CS, & que tous ces canaux ſoient rectilignes.

Conſtruction pour les canaux curvilignes & mixtilignes. Pl. IV. fig. 13.

116. Puiſque ſelon l'hypotheſe, tous les canaux terminés à un même point ſont en équilibre, HI, HK ſeront en équilibre; c'eſt-à-dire qu'ils péſeront également ſur le point H. Mais parceque les fluides preſſent également en tout ſens, les preſſions de HI & KH agiront avec une force égale ſur le canal HG, ſans que cette flexion puiſſe y apporter aucune différence ou diminution d'activité. Ainſi en ajoutant ou en retranchant l'action de HG, ſuivant qu'elle eſt dirigée au point G ou au point H, la preſſion de tout le canal ſimple KG en G ſera égale à la preſſion du canal compoſé IHG. On prouve de la même maniere que la preſſion du canal ſimple LF eſt égale à celle du compoſé KGF, & par conſéquent à celle de IHGF, qui eſt encore plus compoſé; enfin que la preſſion du canal rectiligne AC, qui doit être égale à celle du canal SC, ſera auſſi égale à la preſſion du canal compoſé MEC, à celle de LFEC, ou KGFEC, ou IHGFEC. La démonſtration eſt générale, quel que ſoit le nombre des flexions E, F, G, H, & quelle que ſoit leur direction, ſoit qu'elles ſe trouvent dans le même plan, ou dans des plans différens. Elle l'eſt encore pour un nombre infini de flexions diminuées à l'infini, ſoit que cela arrive dans toute la longueur du canal, ou ſeulement ſur quelques parties de ſa longueur, priſes où l'on voudra, & en tel nombre qu'on voudra. Or dans le premier cas le canal eſt curviligne, & il a une courbure ſimple ou double: dans le ſecond il eſt compoſé de rectilignes & de curvilignes, de quelque nature, & en quelque nombre qu'on les voudra ſuppoſer. Ainſi tout canal curviligne ou mixtiligne ſera en équilibre avec le canal CS. D'où l'on peut conclure en général que ſi deux canaux quelconques rectilignes, aboutiſſans à un même point, ſont en équilibre;

Démonſtration de leur équilibre.

tous les autres, tant rectilignes que curvilignes terminés à ce même point C, seront pareillement en équilibre. C'est la premiere proposition que nous avions à démontrer.

Réduction au point placé à la surface.

117. Supposons maintenant que CS diminue à l'infini, jusqu'à ce qu'elle devienne nulle, sa pression contre le point C diminuera à l'infini, & s'évanouira enfin totalement. Ainsi la pression du canal AC, ou du canal IHGFEC diminuera aussi peu à peu, & à la fin sera nulle, ou zéro. D'où il suit en général que, le point C tombant en S, la pression du canal rectiligne ou curviligne s'évanouit; que par conséquent le point S, placé en quelque endroit qu'on voudra de la superficie, n'éprouvera de la part d'un canal quelconque rectiligne, curviligne, mixtiligne, aucune pression capable de le faire sortir de cet endroit. C'est la seconde proposition, dont la démonstration a lieu pour un canal placé sur la superficie extérieure du solide, comme SRD, puisque le canal CEFGHI peut s'en approcher toujours davantage, & se confondre enfin avec lui.

Réduction à la perpendiculaire.

118. Imaginons enfin, si la chose est possible, qu'au point S de la superficie, la direction de la force de la gravité ne soit point SN perpendiculaire à cette superficie, mais SO inclinée à SN, & faisant avec elle un angle quelconque NSO: cette force dans un arc continu SD, pris de l'autre côté de la perpendiculaire SN, devra, par la loi de la continuité géométrique, suivre la direction d'une ligne inclinée à la perpendiculaire, & faisant avec elle un angle du même côté; & la différence de cet angle à l'angle NSO, dans un point infiniment proche du point S, sera infiniment petite. Soit la direction RP pour un point quelconque R de cet arc. Soit la force même exprimée par la portion RQ. Ayant mené QT perpendiculaire à la tangente en R, la force QT pressera le canal de côté, la force RT pressera le fluide du canal DRS du côté de S. On aura donc en S la somme de toutes les pressions provenantes de ces forces, contre ce qui a été démontré dans l'article précédent. L'on peut donc conclure généralement que si deux canaux rectilignes, conduits d'un point quelconque de la masse du fluide à sa surface extérieure, sont en équilibre; la gravité dans chaque point de la superficie doit

doit être perpendiculaire à cette superficie. C'est la troisieme proposition.

119. Ainsi l'on a une démonstration fort exacte du théorème proposé, qui, dans ces sortes de recherches, épargne beaucoup de travail, & donne le moyen de parvenir à des conclusions très exactes. MM. *Huygens* & *Newton* se sont contentés de canaux terminés à un seul point, je veux dire au centre. M. *Mac-Laurin* a employé des canaux rectilignes terminés généralement à un point quelconque, pris dans l'intérieur de la masse. Il a ajouté cette sorte d'équilibre à la direction de la gravité perpendiculaire à la superficie; & il a démontré séparément que l'un & l'autre se trouvoient dans son ellipse. Aux canaux rectilignes, M. *Clairaut* a ajouté les curvilignes de toute espece. Ce théorème une fois établi, il suffira, pour avoir un équibre parfait, de démontrer que des canaux quelconques, terminés à un point quelconque pris dans l'intérieur de la masse, sont en équilibre. De cette vérité suivent naturellement les trois propositions que nous avons démontrées; & il sera même aisé d'en conclure ce que M. *Clairaut* demande encore pour l'équilibre, savoir qu'un canal curviligne, qui se replie sur lui-même dans l'intérieur de la masse, n'a aucune action de part ni d'autre.

Avantage de ce théorème sur plusieurs autres.

120. Ceci posé, nous allons proposer le principal théorème qui détermine la figure de la Terre dans l'hypothese newtonienne de la gravité. J'y ajouterai avec M. *Mac-Laurin* deux déterminations qui rendent le théorème beaucoup plus général; & qui sont d'usage lorsqu'il est question du flux & du reflux de la mer. Je pourrois, suivant l'article précédent, conclure toute espece d'équilibre du seul équilibre des canaux rectilignes terminés à un point quelconque pris dans l'intérieur de la masse: mais comme on peut démontrer immédiatement, & d'une maniere également simple, que la gravité dans la superficie est perpendiculaire à cette superficie; je joindrai encore ici cette démonstration, pour faire voir de plus en plus la force de la Géométrie, qui, par une méthode fort exacte & nullement embarrassée, peut, seule, & sans autre secours, nous faire parvenir à la connoissance de toutes ces vérités.

Théorème principal sur la figure de la Terre.

Même sujet. PI. IV. fig. 14.

121. Soit (fig. 14) un sphéroïde elliptique ABab, dont l'axe est Bb, composé d'un fluide homogêne, dont les parties égales pesent les unes sur les autres, en raison inverse des quarrés des distances ; & outre cela soient poussées par trois autres forces, dont la premiere se dirige au centre C du sphéroïde, & soit proportionnelle à la distance CP du centre ; la seconde soit perpendiculaire à l'axe Bb du sphéroïde, & proportionnelle aux distances PK de cet axe ; la troisieme parallele à cet axe même, & proportionnelle aux distances d'un plan conduit par l'équateur & le centre perpendiculairement à l'axe. Si les demi-axes CB, CA de l'ellipse sont en raison inverse des forces totales, agissantes sur les parties égales, situées aux extrémités A & B des axes, le fluide sera en équilibre.

Sa division en deux parties.

122. Je ferai voir en premier lieu, suivant ce qui a été dit (n. 120), que la gravité composée de toutes les forces agissantes sur une particule de matiere située à la superficie du solide, a une direction perpendiculaire à cette superficie ; en second lieu, que toute particule, prise dans l'intérieur du solide, est de tout côté également pressée par tous les canaux rectilignes, tirés de ce point à des points quelconques de la surface.

Réduction des forces.

123. Soit donc une particule quelconque P, placée ou à la surface, comme il est représenté dans la figure, ou dans l'intérieur du sphéroïde. Si l'on décompose les forces qui la poussent contre toutes les autres particules, en trois, la premiere qui agisse suivant la direction PD, parallele à l'axe Bb, la seconde suivant la direction PK, perpendiculaire à cet axe ; la troisieme suivant une direction perpendiculaire au plan KPD ; toutes les forces qui agiront suivant cette troisieme direction se détruiront mutuellement, puisque le plan KPD coupe le sphéroïde en deux parties parfaitement égales & semblables ; la seconde sera à la force en a, comme CD est à CA ; & la premiere à la force en B, comme CK à CB, par le n. 110. De même la premiere des trois forces restantes, suivant la supposition du n. 121, savoir celle qui est dirigée au centre C, est proportionnelle à PC, & peut se réduire à deux autres qui lui sont proportionnelles, savoir PD & PK. Ainsi toutes les forces qui agissent sur la particule P, se réduisent

à deux forces composées, agissantes suivant les directions PD, PK, dont la premiere est à la force en B, comme PD à CB, la seconde à la force en a, comme PK à Ca.

124. Donc la premiere sera à la seconde en raison composée de la raison simple des distances PD, PK aux axes Aa, Bb, & de la raison doublée de ces axes ou demi-axes (1). Car la force qui agit en P, suivant la direction de PD, est à la force en B, comme PD à BC; & celle-ci est à la force en a, comme Ca à CB, par la supposition. De plus, la force en a, est à celle qui agit en P, suivant la direction de PK, comme Ca à KP. Donc la premiere est à la seconde en raison composée de celle de PD à PK, & de celle du quarré de Ca au quarré de CB.

125. Supposons maintenant le point P, d'abord sur la surface, comme il est représenté dans la figure. Soit PL perpendiculaire à la surface, elle le sera à l'ellipse BabA, & elle rencontrera son axe Bb en un point L, de sorte que, par une propriété fort connue de l'ellipse, & dont j'ai parlé au tome 3 de mes Elémens (n. 462), on aura $KL : KC :: Ca^2 : CB^2$. Ainsi la force qui pousse la particule P, suivant la direction de PD, est à celle qui la pousse suivant la direction PK, en raison composée de celle de PD, ou CK à PK, & de celle de KL à CK; c'est-à-dire comme KL à PK. Donc KL & PK pourront exprimer les forces qui agissent suivant leur direction; & la force composée de ces deux forces partielles, sera

Demonstration de la premiere partie.

---

(1) Pour en rendre la preuve plus sensible, soit la force suivant la direction $PD = d$, celle qui suit la direction $PK = k$, la force en $a = a$, la force en $B = b$; on aura par le n°. précédent $d : b ::$ CK ou $PD : CB$, & $k : a :: CD : CA :: PK : Ca$. D'où l'on tire $d = \frac{b \times PD}{CB}$ & $k = \frac{a \times PK}{Ca}$. Donc $d : k :: \frac{b \times PD}{CB} : \frac{a \times PK}{Ca}$. Or par la supposition $b : a :: Ca : CB$. Donc $b = \frac{a \times Ca}{CB}$; & substituant cette valeur de b, on aura $d : k :: \frac{a \times Ca \times PD}{CB^2} : \frac{a \times PK}{Ca}$; & divisant par a, & multipliant par Ca & CB^2, on aura $d : k ::$ $Ca^2 \times PD : CB^2 \times PK$. C. Q. F. D.

dirigée par la perpendiculaire PE. Ce qu'il falloit d'abord démontrer.

Ce qu'il faut démontrer pour la seconde. Il y a deux cas. Pl. IV. fig. 15. 16.

126. Supposons en second lieu que le point P (fig. 15 & 16) soit pris dans l'intérieur du sphéroïde. Ayant fait passer par l'axe de ce sphéroïde un plan BA*ba*, soit menée du point P à la superficie une ligne PQ, laquelle se trouve, ou dans le plan, comme on le voit en la figure 15, ou hors du plan, comme en la figure 16. Il faut prouver que le total des forces de toutes les parties du fluide, renfermées dans le canal rectiligne QP, quelque soit la direction de ce canal, pese toujours également sur le point P.

Construction pour le premier cas.

127. Par le point P (fig. 15) menez dans la section BA*ba*, qui sera une ellipse semblable à l'ellipse génératrice, les cordes G*g*, R*r*, paralleles aux axes B*b*, A*a*. Soit PQ divisée en une infinité de petites parties telles que E*e*. Par les points E, *e* menez les cordes DT, *dt* paralleles à l'axe B*b*, lesquelles rencontreront l'axe A*a* en N & *n*. Par les points E, D, tirez des paralles à l'axe A*a*, qui rencontreront la corde *dt* en V & I, l'axe B*b* en F & L, & la surface en H & S. Enfin du point d'intersection M des lignes G*g*, ES, abaissez sur PQ la perpendiculaire M*m*.

Démonstration.

128. Les parties du fluide en E*e* sont poussées par deux forces, dont l'une agit suivant la direction B*b* ou MP, l'autre suivant la direction A*a* ou EM; & par le n. 110, la premiere de ces forces est égale à celle par laquelle toutes les parties en V*e* sont poussées suivant la premiere direction, & la seconde est égale à celle par laquelle les parties EV ou DI sont poussées suivant la seconde direction, à cause qu'elles sont également éloignées des axes. Réduisons chacune de ces forces en deux parties, dont l'une soit perpendiculaire à QP, laquelle n'agira pas sur le point P, mais sur le côté du canal perpendiculairement; l'autre suive la direction de QP, & pese directement sur P. Le total de la premiere force sera à sa seconde partie, comme PM à P*m*, ou à cause des triangles semblables M*m*P, EV*e*, qui, outre un angle droit, ont les angles en P & en *e* formés par des paralleles, comme E*e* à *e*V, ou comme le nombre des parties en E*e* qui ont cette portion de la premiere force, au nombre des parties en *e*V,

qui en ont le total. Donc le total de toutes les portions de la premiere force, par lesquelles les parties Ee pesent sur P, est égal au total des forces en Ve, agissantes suivant la direction Ve ou GP. Par la même raison, les triangles EVe, EmM étant semblables, la somme de toutes les portions de la seconde force, par laquelle les parties en Ee pesent sur le point P, est égale à la somme des forces en EV, agissantes suivant la direction EL, & par conséquent à la somme des forces en DI, suivant la direction DF.

129. Or la somme des forces avec lesquelles les parties en DI suivent la direction de DF, est égale à la somme des forces par lesquelles les parties en dI suivent la direction de de. Car puisque selon une propriété assez connue des sections coniques, expliquée au tome 3 de mes Elémens (n. 299), on a $DI \times IH : dI \times It :: AC \times Cq$, ou $AC^2 : BC \times Cb$, ou BC^2; DI sera à dI, c'est-à-dire le nombre des parties en DI au nombre des parties en dI, comme le quarré de AC divisé par IH au quarré de BC divisé par It; ou ce qui revient au même, en raison composée de celle de It à IH, & de celle de AC^2 à BC^2; ou en prenant équivalemment les moitiés des termes de la premiere raison, en raison composée de celle de dn à DF, & de celle de AC^2 à BC^2; ou bien enfin, suivant ce qui a été démontré (n. 124), comme la force des parties en dI, agissante suivant la direction dn, à la force des parties en DI suivant la direction de DF. D'où il suit que le total des premieres est égal à celui des dernieres. Ainsi le total des forces en Ee, agissantes contre le point P, est égal au total des forces avec lesquelles les parties en Ve & dI agissent suivant la direction de perpendiculaire à l'axe Aa. Suite.

130. Mais puisque les forces des parties en DE & IV, agissantes suivant une direction perpendiculaire à l'axe Aa, sont aussi égales, à cause qu'elles sont également distantes de cet axe, la pression des parties de ed sur e excédera autant la pression des parties de ED sur E, que la pression des parties de eQ sur e excede la pression des parties de EQ sur E. Et puisque la même chose arrive dans tous les points, & qu'en Q l'une & l'autre pression est nulle; il sera toujours vrai que le point e éprouvera de la part des parties de ed & de celles Suite.



de *e*Q des pressions égales. D'où il suit que le point *e* tombant en P, les parties de PG & celles de PQ pesent également sur le point P. Ainsi puisque la même démonstration a lieu, quelque part qu'on prenne le point Q, pourvu que les droites & les forces qui se trouveroient avoir des directions opposées, soient traitées comme des quantités négatives ; le point P sera également chargé par tous les canaux rectilignes qui y aboutiront, quelque soit leur direction, dès qu'ils se trouveront dans le plan qui passe par l'axe, comme il est représenté en la figure 15.

Construction pour le second cas.

131. Mais si PQ est hors de ce plan, comme dans la figure 16, ayant mené, comme ci-devant, la ligne GP*g* parallele à l'axe B*b* du sphéroïde, qui rencontrera en D le diametre de son équateur AN*an* ; soit coupé le sphéroïde par un plan QPG, dont la commune section avec le plan AN*an* de l'équateur sera N*n*, & qui sera perpendiculaire à ce plan ; la section du sphéroïde sera une ellipse semblable à l'ellipse génératrice, par le n. 94, & N*n* sera l'un de ses axes ; l'autre axe F*f* sera déterminé par le plan passant par B*b* perpendiculairement à cette section, & qui la rencontrera en F*f* parallele à B*b*. Cet axe passera par le point H, l'intersection CH de ce plan avec celui de l'équateur, laquelle est perpendiculaire à la section du sphéroïde, coupe la corde N*n* de l'équateur à angles droits, & par conséquent en deux parties égales.

Démonstration.

132. Soit maintenant placé le point P en quelque endroit qu'on voudra de la section. Ayant pris sur CB, FH les segmens CK, HE égaux à DP, & mené les lignes PK, KE, EP ; ces lignes seront paralleles à DC, CH, HD. Donc KE sera perpendiculaire au plan de la section, & l'angle KEP sera droit. Or des deux forces qui poussent la particule P suivant les directions de PD & PK, on voit ici, comme dans la figure 14, que la premiere a une direction PD, parallele à l'axe B*b* de l'ellipse génératrice ; que son action est renfermée dans le plan de la section, qu'elle conserve la même grandeur, & qu'elle est parallele à l'axe F*f* de la section : mais la seconde direction PK se résoud en deux autres, savoir PE, EK dont la derniere agira sur le plan de la section, auquel elle est perpendiculaire ; & la premiere PE, qui agit

dans le plan même, sera toujours parallele à l'autre axe Nn de la section, & sera à la force PK, comme PE est à PK. D'où il suit que cette derniere force qui agit sur le point P placé à différentes distances de l'axe Bb, étant en raison de cette distance, la premiere sera aussi en raison de la distance du point P à l'axe Ff. Mais comme d'ailleurs la force qui suit la direction PK est à celle qui suit la direction PD, en raison composée de celle de PK à PD, & de celle de CB^2 à Ca^2, ou à cause que l'ellipse FnfN est semblable à l'ellipse génératrice BabA, de celle de HF^2 à Hn^2; la force qui agit suivant la direction PE, est à celle qui agit suivant la direction PD, en raison composée de celle de PE à PD, & de celle de HF^2 à HN^2. Ainsi puisqu'on a déja conclu de ce rapport que le point P (fig. 15) est également chargé par des canaux rectilignes PQ, PG, placés dans le plan de l'ellipse BabA, suivant une direction quelconque ; on en devra pareillement conclure que les canaux rectilignes PQ, PG (fig. 16) placés dans le plan de l'ellipse GnfN, pesent avec des forces égales sur le point P.

133. Donc le point P est chargé de tous côtés d'un poids égal, par toutes les parties qui sont dans des canaux quelconques rectilignes, aboutissans à ce point, quelque soit leur direction. D'où il suit, par le n. 113, que tout le fluide est en équilibre. C. Q. F. D. Conclusion.

134. On tire de là le théorème suivant : toute la force qui pousse un corps placé à la superficie de ce sphéroïde, est en raison directe de la perpendiculaire à la courbe en ce point, ou de la normale terminée par l'axe ; ou en raison inverse de la perpendiculaire tirée du centre sur la ligne qui touche en ce point l'ellipse génératrice. Rapport de la force dans la surface.

135. En effet, par la premiere partie de la démonstration, toute la force du corps P (fig. 14) est en raison de PL perpendiculaire à la courbe. Mais le rectangle sous PL, & la perpendiculaire tirée du point C à la tangente en P, est égal au quarré du demi-axe CA, par le n. 459 du tome 3 de mes Elémens. Donc PL est en raison inverse de cette perpendiculaire. Démonstration. Pl. IV. fig. 14.

136. De là même on aura encore ce théorème : toute la

Déterminer la pression sur un point quelconque & sur le centre. F. 16.

force qui pousse un point quelconque P, pris dans l'intérieur du sphéroïde (fig. 16), suivant une direction quelconque, est à la force ou au poids dont le centre est chargé, comme le rectangle $GP \times Pg$ à CB^2; & le poids que soutient le centre, est la moitié de celui qu'auroit la colonne CB, si toutes ses parties pesoient par-tout autant qu'au point B.

Démonstration.

137. Car si on divise les lignes CB, DG, DP en un nombre égal de parties, les parties seront proportionnelles à leurs touts, aussi bien que les distances des parties semblablement placées aux points C & D. Ainsi & le nombre des parties du fluide contenues dans ces parties de lignes, & leurs forces respectives, suivant la direction de ces lignes, seront en raison des lignes. Donc les sommes des forces avec lesquelles toutes les parties en CB, DG, DP pesent sur les points C, D, sont comme les quarrés de ces lignes. C'est pourquoi le point D étant chargé par GD de tout le poids dont P est chargé par GP & dont le même point D est encore chargé par PD; le poids dont P est chargé par GP, est à celui dont C est chargé par BC, comme la différence des quarrés de DG & DP, égale au rectangle $GP \times Pg$, est au quarré de CB. Donc puisqu'un point quelconque soutient de tous côtés un poids égal, le théorème est démontré quant à la premiere partie.

Suite.

138. Si l'on imagine ensuite deux lignes tirées de chaque point K, de la ligne CB, paralleles à Ca, & dont l'une soit égale à CB, l'autre à CK; elles exprimeront toujours, l'une, la force en B, l'autre, la force en K. Ainsi tout le poids dont le centre C est chargé par toutes les parties du fluide K, est à celui dont il seroit chargé par toute la colonne, supposé qu'elle eût par-tout une gravité égale à la gravité en B, comme l'aire produite par la seconde ligne, à l'aire produite par la premiere. Or la seconde ligne produiroit un triangle, & la premiere un quarré double de ce triangle; ce qui prouve la seconde partie du théorème.

Application à un cas particulier.

139. Tout ce que nous avons dit subsiste en son entier, dans le cas même où, parmi le quatre forces énoncées dans la proposition, il y en auroit une ou plusieurs qui s'évanouissent ou qui eussent une direction opposée, & devinssent négatives; pourvu que le total de celles qui dans chaque partie

partie sont perpendiculaires à l'axe du sphéroïde, aussi bien que de celles qui lui sont paralleles, soit une quantité positive.

140. Car toutes les démonstrations précédentes sont appuyées sur ce principe unique; savoir que dans chaque partie les sommes des forces agissantes suivant les directions perpendiculaires aux axes de l'ellipse génératrice, sont comme leurs distances à ces axes; & que les forces totales aux extrémités des axes, sont réciproquement comme les axes. Or tout cela se vérifie également dans le dernier cas proposé. Démonstration.

141. De là il est aisé de s'appercevoir premierement que l'ellipse de M. *Herman* est un cas particulier de cette solution de M. *Mac-Laurin*. Car si la gravitation mutuelle des parties & la force parallele à l'axe deviennent nulles, que la gravité qui tend au centre soit en raison directe de la distance, & que la force perpendiculaire à l'axe soit négative, on aura l'hypothese de gravité de M. *Herman* avec la force centrifuge occasionnée par le mouvement diurne, laquelle déterminera une ellipse qu'on pourra aisément démontrer être l'ellipse même de M. *Herman*. De l'ellipse de M. *Herman*.

142. De là il est aisé de conclure en second lieu qu'une masse fluide qui tourneroit autour de l'axe B*b*, dans l'hypothese newtonienne de la gravité, du moment qu'on lui donneroit la figure d'un sphéroïde elliptique, avec un certain dégré d'applatissement, seroit en équilibre. Car outre que ses parties péseroient toutes les unes vers les autres en raison inverse des quarrés des distances, elles auroient encore une force centrifuge suivant la direction KP, proportionnelle à cette ligne, comme nous le verrons bientôt. Or l'applatissement seroit tel, qu'il y auroit même raison de CB à C*a*, que de la gravité en *a* diminuée de la force centrifuge, à la gravité entiere en B. Si les gravités en *a* & en B étoient égales, ce rapport pourroit se connoître aisément, par le n. 71, où nous avons déterminé le rapport de la gravité à la force centrifuge, prises l'une & l'autre sous l'équateur; & l'applatissement seroit double de celui que donne l'hypothese d'une gravité tendante à un centre donné, de telle sorte que VFKQ (fig. 1) puisse être pris pour un rectangle. Or nous avons trouvé pour Application à la théorie de *Newton*.

cette derniere hypothese, que le demi-diametre de l'équateur est à sa différence au demi-axe, comme sous l'équateur la gravité est à la moitié seulement de la force centrifuge, non à cette force entiere.

Rapport de la gravité primitive sous l'équateur & le pôle.

143. Mais cette gravité primitive n'est point la même sous l'équateur & au pôle. Car les parties n'y sont ni à mêmes distances, ni dans les mêmes positions par rapport aux autres parties. Ainsi on est obligé de déterminer par l'espece de l'ellipse génératrice le rapport de ces gravités, pour pouvoir ensuite de ce rapport remonter à l'espece de l'ellipse génératrice. *Newton* a donné une méthode pour trouver par la quadrature des courbes, le dégré de gravité en un point quelconque de l'axe d'un solide engendré par la circonvolution d'une courbe d'équation donnée autour de son axe, nommément dans l'ellipsoïde par la quadrature du cercle & de l'hyperbole. Mais pour un point placé sous l'équateur, il ne donne aucune méthode, & il se contente d'une sorte d'estime pour un ellipsoïde donné, & peu différent d'une sphere. M. *Mac-Laurin* a donné de ce problême une solution très heureuse & très élégante, pour un point placé tant à l'équateur qu'au pôle; & il se sert de cette détermination de gravité pour déterminer ensuite, d'une maniere également ingénieuse & précise, l'ellipse génératrice.

Méthode plus simple.

144. Mais cette détermination même demande bien du travail, & l'on peut difficilement s'y passer du calcul. Je crois cependant avoir trouvé une méthode beaucoup plus simple, qui s'accorde en partie avec celle de M. *Bernouilli*, & qui à l'aide de la seule Géométrie, pour un sphéroïde fort approchant d'une sphere, résoud le problême avec une extrême facilité. Je la proposerai quand j'aurai déterminé la gravité primitive, premierement d'un point placé au pôle de ce sphéroïde, en second lieu, d'un point pris sous l'équateur. Pour abréger, je me servirai quelquefois du signe algébrique d'égalité, de celui de la multiplication pour des raisons composées de raisons directes, & de celui de la division pour des raisons composées de raisons directes & inverses, selon l'usage. Avec la Géométrie pure, & au moyen de ces signes, nous parviendrons à la détermination de la gravité primitive sous l'équateur & sous les pôles.

145. Supposons donc (fig. 17) que la demi-ellipse BA*b* engendre un sphéroïde, & le demi-cercle BE*b* une sphere en tournant autour de leur axe commun B*b*, & qu'on cherche la différence de la force qui attire le point B sur le sphéroïde, d'avec celle qui l'attire sur la sphere, dans l'hypothese que ce point pese vers chacune de leurs parties en raison directe des masses, & en raison inverse des quarrés des distances. Pour un point placé au pôle. Pl. IV. fig. 17.

146. Soit CA le demi-diametre de l'équateur du sphéroïde, CE celui de la sphere, & une ordonnée quelconque perpendiculaire à l'axe, qui rencontre l'axe en K, l'ellipse en P, & le cercle en D. Il faut trouver l'attraction du point B sur toutes les couronnes que décrivent dans leur mouvement des lignes telles que DP. Soit exprimée la force, avec laquelle le point B est attiré sur chaque partie, par cette partie même divisée par le quarré de la distance; & imaginons PD si petite, que la ligne BD puisse être prise pour la distance de toutes les parties qu'elle contient. Préparation.

147. La force absolue par laquelle le point B est attiré par la couronne DP, sera donc en raison directe de cette couronne, & en raison inverse du quarré de BD. Or par une propriété fort connue de l'ellipse, comme on peut le voir au tome 3 de mes Elémens (n. 365), KP est à KD dans le rapport constant de CA à CE. Donc KP sera constamment en raison de KD. Par conséquent & le cercle décrit par KD, & celui qui est décrit par KP & la couronne, ou la différence de ces cercles décrite par DP, seront en raison de KD^2, les cercles étant entre eux comme les quarrés de leurs rayons. Ainsi la force absolue sera en raison de $\frac{KD^2}{BD^2}$. Or cette force absolue agissant suivant la direction DB, peut se décomposer en deux autres, savoir DK, BK, dont la premiere est détruite par des actions opposées, & la seconde attire le point B vers le centre C; & la force absolue est à la force relative dont on doit tenir compte, comme BD à BK. Celle-ci sera donc en raison de $\frac{KD^2 \times BK}{BD^3}$, ou de $\frac{KD^2 \times BK \times BD}{BD^4}$. De plus, par la nature du cercle BD^2 est en raison de BK, & $KD^2 =$ Force d'une couronne.

bK×BK. Donc la force relative feraen raiſon de $\frac{bK \times BK^2 \times BD}{BK^2}$, ou de bK×BD.

Son expreſſion, & celle de la ſomme des forces des couronnes.

148. Pour déterminer une ligne droite qui exprime cette force, ſoit BMN une parabole du premier genre, ayant Bb pour axe & pour parametre. Comme par la nature de cette courbe $KM^2 = BK \times Bb$, on aura KM = BD (1), & par la même raiſon $bN = bB$. Soit maintenant une autre courbe BLN, telle que l'on ait Bb : BK :: KM : KL, qui ſera auſſi du genre des paraboles. Car on aura KM en raiſon de $BK^{\frac{1}{2}}$, & KL en raiſon de KM×BK, & par conſéquent de $BK^{\frac{3}{2}}$. Or l'on aura en renverſant les rapports Bb : bK :: KM ou BD : ML; & parceque Bb eſt conſtant, ML ſera en raiſon de bK×BD, c'eſt-à-dire en raiſon de cette force relative, dont nous avons dit qu'il falloit tenir compte. Donc ML exprime cette force relative, & l'aire BLNMB exprime la force totale dont toutes les couronnes comme DP attirent le point B.

Valeur abſolue de cette ſomme.

149. Il eſt queſtion à préſent d'évaluer cette force. Suppoſons que les points P, D, K, L, M tombent ſur les points A, E, C, F, G; on aura $GF = \frac{1}{2}CG$, puiſque GF : CG :: bC : bB. De plus, CG = BE, & $BE^2 = 2\,BC^2$. La couronne EA ſera égale au produit de EA par la circonférence du cercle décrite du point E, laquelle, en ſuppoſant que $\frac{1}{c}$ exprime le rapport du rayon à la circonférence, ſera $= c \times CE = c \times CB$. Ainſi la couronne ſera $c \times BC \times EA$. Donc la force abſolue de la couronne EA ſera $\frac{c \times BC \times EA}{BE^2} = \frac{c \times BC \times EA}{2BC^2} = \frac{c \times EA}{2BC}$; & l'on aura la force relative en multipliant par BC, & en diviſant par BE. Donc la force relative eſt $\frac{c \times EA}{2BE} = \frac{c \times EA \times BE}{2BE^2}$. Et ſubſtituant à la place de BE & BE^2, leurs valeurs CG,

(1) En effet, ſoit $Bb = a$, $BK = x$, $KD = y$; on aura $KM^2 = ax$; $BD^2 = x^2 + y^2$; dans laquelle ſubſtituant la valeur de y^2 priſe de l'équation au cercle, on aura $BD^2 = x^2 + ax - x^2 = ax$. Donc $KM^2 = BD^2$, & KM = BD.

ou 2 GF & 2 BC², cette force deviendra $\frac{[illegible]}{4BC^2} = \frac{[illegible]}{2BC^2}$. Donc puisque la force de la couronne EA est à celle de la couronne DP, comme FG est à LM, celle de la couronne DP sera $\frac{c \times EA \times LM}{2BC^2}$. Donc la force attractive de toutes les couronnes sera le produit de l'aire BFNGB, composée de toutes les lignes LM, par la quantité donnée $\frac{c \times EA}{2BC^2}$.

150. Il nous reste à calculer l'aire BFNGB. En général dans toute parabole, dont les ordonnées sont en raison des abscisses élevées à la puissance de m, l'aire est au rectangle sous l'abscisse & l'ordonnée, comme 1 à $m+1$, ainsi qu'il a été dit plus haut (n. 36). C'est-à-dire par exemple, que si KL est en raison de BK^m, l'aire BKL sera $\frac{1}{m+1} \times BK \times KL$. Ainsi KM étant en raison de $BK^{\frac{1}{2}}$, on a l'aire $BbNGB = \frac{1}{\frac{1}{2}+1} \times Bb \times bN = \frac{2}{3} Bb^2 = \frac{8}{3} BC^2$. Mais puisque KL est en raison de $BK^{\frac{3}{2}}$, l'aire $BbNFB = \frac{1}{\frac{3}{2}+1} \times bB \times bN = \frac{2}{5} Bb^2 = \frac{8}{5} BC^2$. On aura donc l'aire $BFNGB = \frac{8}{3} BC^2 - \frac{8}{5} BC^2 = \frac{16}{15} BC^2$. Suite.

151. Donc enfin multipliant cette valeur par $\frac{c \times EA}{2BC^2}$, on aura toute la gravité primitive au pôle B, exprimée par $\frac{8}{15} \times c \times EA$; c'est-à-dire par $\frac{8}{15}$ de la circonférence du petit cercle décrit du rayon EA, puisque $c \times EA$ est la circonférence de ce petit cercle; expression la plus simple & la plus facile, je pense, qu'on puisse donner de cette gravité. Expression très simple de cette somme.

152. Soit maintenant (fig. 18) un petit corpuscule en A sur l'équateur du sphéroïde engendré par une circonvolution autour de l'axe Bb. Imaginons deux autres solides, savoir le sphéroïde qui seroit produit par une circonvolution autour de l'axe Aa & la sphere AEae, ayant le même diametre Aa. Si ces solides sont coupés par un plan PGgp perpendiculaire à Aa; la section du sphéroïde décrit avec l'axe Aa, sera

Problême pour un point placé à l'équateur. Pl. IV. fig. 18, 19.

un cercle, dont le diametre est G*g*; la section de la sphere un cercle dont le diametre est P*p*; & la section du sphéroïde décrit sur l'axe B*b*, sera une ellipse semblable à l'ellipse génératrice, dont l'un des axes sera G*g*, & l'autre une ligne égale à P*p*. On se convaincra de ce dernier point (car les autres sont assez évidens par eux-mêmes, & par ce que nous en avons dit), en faisant attention que l'axe G*g* de l'ellipse de la section doit être à son autre axe, comme B*b* à A*a* ou E*e*, c'est-à-dire comme G*g* à P*p*. Soient représentées ces sections par la figure 19, l'ellipse sera GR*gr*, à laquelle les cercles PR*pr*, GI*gi* seront l'un circonscrit, l'autre inscrit. A l'égard de la couronne GP, elle sera la différence de la sphere dont le diametre est A*a* (fig. 18), & du sphéroïde décrit sur ce diametre. Quant aux deux ménisques RP*r*G, R*prg*, ils feront ensemble la différence du sphéroïde décrit autour de l'axe B*b* (fig. 18), & de cette même sphere.

Solution & démonstration.

153. De plus, par une propriété de l'ellipse, assez connue, & qu'on peut voir dans le tome 3 de mes Élémens (n. 385), le cercle circonscrit est à l'ellipse, comme l'ellipse au cercle inscrit. Ainsi l'ellipse ne différant pas de beaucoup du cercle inscrit, les deux premiers ménisques différeront peu des deux derniers. D'où il suit que les ménisques RP*r*G, R*prg* pris ensemble sont la moitié de la couronne, & que puisque dans la figure 18 toutes les parties tant de la couronne que du ménisque sont à peu près à la même distance & dans la même position par rapport au point A, ce point sera moins attiré de moitié par ce double ménisque qu'il ne le seroit par la couronne. Or comme la même chose arrive par-tout, la gravité de ce point placé en A, provenante de la différence du sphéroïde dont l'axe est B*b*, sera la moitié de celle qui provient de la différence du sphéroïde dont l'axe est A*a*, & de la sphere qui a cet axe pour diametre.

Moyen de trouver le rapport des gravités.

154. Moyennant ces démonstrations, on pourra aisément exprimer par la même ligne EB le rapport de la gravité primitive sous le pôle à la gravité sous l'équateur, soit que le sphéroïde soit oblong ou applati. Mais pour déterminer cette gravité, on a besoin d'un théorème fort connu, qui est une suite de ce qui a été démontré par *Newton*, savoir que tout

solide sphérique attire un point placé à quelque distance, ou à sa superficie, de la même maniere que si toute la masse étoit compénétrée au centre. Soit r le rayon de la sphere, le diametre sera $2r$, son grand cercle $\frac{1}{2}\, crr$ (1), sa surface $2crr$, & sa solidité $\frac{2}{3}\, cr^3$. Donc la gravité d'un point placé sur la surface de la sphere, exprimée par cette sphere même, ou par le nombre de ses parties, en raison directe de la masse, & en raison inverse du quarré de la distance, sera $\frac{2}{3}\, cr$.

Ce rapport dans un sphéroïde applati: Pl. IV. fig. 17.

155. Soit (fig. 17) un sphéroïde applati, comme cela doit arriver à cause de la force centrifuge sous l'équateur, laquelle éleve en cet endroit la masse du fluide. La gravité du point B sur une sphere du diametre Bb sera $\frac{2}{3}\times c\times CB = \frac{2}{3}\times c\times CA - \frac{2}{3}\times c\times EA$. A quoi ajoutant $\frac{8}{15}\times c\times EA$, on aura pour la gravité de ce point sur le sphéroïde applati $\frac{2}{3}\times c\times CA - \frac{10}{15}\times c\times EA + \frac{8}{15}\times c\times EA = \frac{2}{3}\times c\times CA - \frac{2}{15}\times c\times EA$. La gravité du point A sur la sphere, dont le rayon est CA, sera $\frac{2}{3}\times c\times CA$; d'où ôtant $\frac{4}{15}\times c\times EA$, on aura pour la gravité du point A sur le sphéroïde $\frac{2}{3}\times c\times CA - \frac{4}{15}\times c\times EA$. Ainsi la gravité sur le sphéroïde au pôle B, sera à la gravité sous son équateur en A, comme $\frac{2}{3}\times c\times CA - \frac{2}{15}\times c\times EA$ à $\frac{2}{3}\times c\times CA - \frac{4}{15}\times c\times EA$; ou bien, à cause que EA est très petit par rapport à CA, comme $\frac{2}{3}\times c\times CA$ à $\frac{2}{3}\times c\times CA - \frac{2}{15}\times c\times EA$; c'est-à-dire comme CA à CA $-\frac{1}{5}\times$EA.

Dans un sphéroïde allongé.

156. Si le sphéroïde étoit allongé, la ligne EA de positive deviendroit négative, & le rapport de ces gravités seroit celui de CA à CA $+\frac{1}{5}$ EA.

De l'applatissement, & à quelles forces on doit avoir égard.

157. Au moyen de ce rapport, on peut aisément déterminer l'applatissement occasionné par le mouvement diurne, suivant ce qui a été dit (n. 142). Pour lors des trois forces supposées dans le théorème (n. 121), outre la gravitation mutuelle en raison inverse des quarrés des distances, une seule a lieu dans le cas présent; c'est celle qui provient de la force centrifuge, & qui agit suivant la direction de CA perpendiculairement à l'axe Bb. Les deux autres entrent dans les causes du flux & du reflux de la mer, dans lequel, à cause que la Terre ne pese pas également, ni dans la même direction sur

(1) On suppose ici, comme ci-devant, que le rayon est à la circonférence comme 1 est à c.

le ſoleil & ſur la lune, on eſt obligé d'admettre encore deux forces, l'une dirigée au centre de la Terre, l'autre ſuivant une direction à peu près perpendiculaire au plan mené par ce centre perpendiculairement à la ligne qui joint la Terre au Soleil ou à la Lune, & proportionnelle à la diſtance de ce plan.

Détermination de l'applatiſſement

158. Laiſſant donc à part ces deux dernieres gravitations, qui n'ont aucun rapport à la queſtion préſente; ſoit la gravité primitive ſous l'équateur $=m$, la force centrifuge $=n$; la gravité abſolue ſous l'équateur ſera $=m-n$. Si l'on fait le demi-diametre de l'équateur $=r$, & ſa différence au demi-axe $=x$; on aura cette analogie: comme $r-\frac{1}{5}x$ eſt à r, ou bien à cauſe que x eſt très petit par rapport à r, comme r eſt à $r+\frac{1}{5}x$, ainſi la gravité primitive ſous l'équateur (m) eſt à la gravité primitive ſous le pôle, qui ſera $m+\frac{mx}{5r}$. Donc la gravité abſolue ſous l'équateur eſt à la gravité ſous le pôle, comme $m-n$ eſt à $m+\frac{mx}{5r}$, ou à peu près comme m à $m+\frac{mx}{5r}+n$. Or ces gravités doivent être en raiſon inverſe des diſtances au centre, par le n. 121, elles ſeront donc dans la raiſon de r à $r+x$, & l'on aura encore cette proportion, en prenant les différences: m eſt à $\frac{mx}{5r}+n$, ou bien 1 eſt à $\frac{x}{5r}+\frac{n}{m}$, comme r eſt à x, ou comme 1 eſt à $\frac{x}{r}$. Donc $\frac{x}{5r}+\frac{n}{m}=\frac{x}{r}$, ou $\frac{n}{m}=\frac{4x}{5r}$, ou $\frac{x}{r}=\frac{5n}{4m}$. D'où l'on tire cette analogie, $m:\frac{5}{4}n::r:x$. On aura donc ce théorème: comme la gravité ſous l'équateur eſt à $\frac{5}{4}$ de la force centrifuge ſous l'équateur, ainſi le demi-diametre de l'équateur eſt à ſa différence au demi-axe.

Bien plus grand que ſelon M. *Herman*.

159. Si l'on veut prendre en nombres le rapport approché de la gravité à la force centrifuge ſous l'équateur, qui ſuivant le n. 71, eſt celui de 289 à 1; le demi-diametre de l'équateur ſera à ſa différence au demi-axe, comme 289 à $\frac{5}{4}$, ou comme 1156 à 5, à peu près comme 231 à 1, rapport fort approchant de celui de 230 à 1 qu'a trouvé *Newton* au Livre 3 des principes (prop. 19), où il ſuppoſe que le demi-diametre

diametre de l'équateur eſt au demi-axe, comme 231 à 230. Cet applatiſſement eſt double de celui que M. *Herman* a déterminé pour ſon ellipſe. Car nous avons vu (n. 72) que celui-ci doit répondre non à cinq quarts, mais à la moitié de la force centrifuge; ce qui ne fait point $\frac{1}{231}$, mais ſeulement $\frac{1}{578}$ du tout.

Erreur de M. *Herman* dans la cenſure qu'il fait de *Newton* & de *Gregory*.

160. M. *Herman*, perſuadé que ſon ellipſe étoit celle que devoit donner la théorie de la gravité newtonienne, a taxé d'erreur *Gregory* & *Newton* lui-même, pour ne s'en être pas apperçus, & pour avoir aſſigné à la Terre un applatiſſement, qui dans leurs principes devroit être moindre de plus de moitié. Mais c'eſt préciſément en quoi il eſt tombé lui-même dans une erreur conſidérable. Car ſon hypotheſe de gravité, dirigée à un point unique, & en raiſon directe de la diſtance à ce point, eſt bien différente de l'hypotheſe de *Newton*, d'une gravité compoſée d'un nombre infini de gravitations particulieres ſur chaque partie, en raiſon inverſe des quarrés des diſtances.

Théorie de *Newton*.

161. Dans la théorie de *Newton*, toutes les parties d'un canal quelconque terminé au centre, peſent ſur ce centre même, en raiſon de leur diſtance au centre, & la gravité abſolue à la ſurface eſt en raiſon inverſe de la diſtance à ce centre. *Newton* s'eſt lui-même apperçu que cela devoit ſuivre de ſa théorie, ſuppoſé qu'il lui fallût une figure elliptique pour conſerver l'équilibre. Il n'a pu démontrer ce dernier point; mais a été du moins aſſez heureux pour le deviner.

Démonſtration pour la gravité primitive;

162. En effet, *Newton* a démontré qu'un corpuſcule placé dans l'intérieur d'une couche elliptique, formée par la révolution de deux ellipſes concentriques ſemblables & ſemblablement poſées, eſt dans un équilibre parfait; & qu'un point ſitué dans des points homologues de ſolides ſemblables, eſt attiré dans ſa théorie en raiſon ſimple des côtés homologues; deux articles que nous avons expoſés (n. 93 & 92). Or il ne lui a pas été difficile d'en tirer cette conſéquence ſi naturelle, & qui ſuit pour ainſi dire d'elle-même, ſavoir qu'à meſure qu'on approche du centre dans une ſphere ou dans un ſphéroïde elliptique, la gravité décroît en raiſon ſimple directe des diſtances au centre. Car ſi l'on imagine une ſurface

sphérique ou elliptique, semblable à la superficie extérieure, & passant par ce point qui se rapproche du centre, tout l'orbe extérieur renfermé entre ces deux surfaces n'aura aucune action, & il ne restera que l'action de la sphere ou du sphéroïde renfermé dans la nouvelle surface. Cette action devra être proportionnelle à la distance au centre; & cette distance est, comme l'on sait, un des côtés homologues.

Pour la force centrifuge.

163. C'est ainsi que *Newton* a trouvé que la gravité primitive dans l'intérieur d'une sphere ou d'un sphéroïde elliptique, étoit en raison directe de la distance au centre. A l'égard de la force centrifuge, elle est en raison de la distance à l'axe, suivant le n. 17. D'où il est aisé de conclure, soit qu'on prenne cette force absolue, soit que l'ayant décomposée, on n'ait égard qu'à celle de ses parties qui est opposée à la gravité dirigée au centre, qu'elle est aussi proportionnelle à la distance au centre. Or il suit de là que la gravité même absolue pour un point quelconque pris dans l'intérieur de la sphere ou du sphéroïde, si l'on tient compte de celle qui est dirigée au centre dans tout canal terminé à ce centre même, sera en raison directe de la distance au centre.

Pour la gravité à la superficie.

164. *Newton* a démontré en second lieu qu'à chaque point de la superficie extérieur, la gravité est en raison inverse de la distance au centre, & il l'a démontré sans peine de la maniere qui suit. Imaginons deux canaux quelconques partans du centre, & terminés à la superficie; ils seront en équilibre. Divisons-les en un nombre égal de parties proportionnelles; toutes les petites portions de matiere renfermées dans ces parties, péseront sur le centre en raison de leur distance au centre. Or le rapport de la distance dans les parties homologues des canaux, est le même que celui des canaux. D'où il suit qu'ayant pris deux parties homologues, une dans chaque canal, la gravité de chaque portion de matiere, renfermée dans la premiere partie, sera à la gravité de chaque portion de la seconde dans le rapport constant des canaux entiers. Donc les sommes de ces gravités seront dans la même raison; c'est-à-dire que les poids des parties homologues sont entre eux comme les poids des canaux. Donc ils sont égaux. Mais puisque le poids d'une partie prise dans l'un des canaux, est égal au

poids de la partie homologue de l'autre canal ; il suit que la gravité de chaque portion de matiere, renfermée dans la partie du premier canal, est à la gravité de chaque portion de la partie homologue en raison inverse du nombre de ces portions de matiere, renfermées dans ces parties ; c'est-à-dire en raison inverse de ces parties mêmes ; que par conséquent elles sont réciproques aux canaux & aux distances des parties homologues au centre. Ainsi toutes les portions de matiere, prises en quelque endroit qu'on voudra, tant de la surface que de l'intérieur du sphéroïde, sur des lignes droites tirées du centre à la surface, & à des distances au centre proportionnelles à ces lignes, pésent en raison inverse de ces distances.

165. Sur cela M. *Herman* cherchoit la figure que prendroit un fluide qui tourne sur son axe, & dont la gravité seroit dirigée au centre en raison directe des distances ; & dans cette hypothese de gravité, il trouvoit une ellipse dans laquelle le demi-diametre de l'équateur étoit au demi-axe en raison sous-doublée de la gravité primitive à la gravité absolue sous l'équateur. D'où il suivoit que ce demi-diametre étoit à sa différence au demi-axe, à peu près comme cette gravité primitive à la moitié de la force centrifuge, ou comme 578 est à 1 ; & que la gravité absolue dans les différens points de la surface étoit en raison inverse des distances, comme nous l'avons nous-mêmes démontré, n. 47 & 49. Ensuite remontant de la conséquence au principe, il cherchoit la figure requise dans la supposition que la force absolue à la superficie fût en raison inverse de la distance au centre, & retrouvoit la même ellipse. De plus, il trouvoit que la gravité primitive dirigée au centre, devoit être en raison directe des distances ; ce qu'il démontroit par une méthode synthétique, qui demande autant de patience que de travail. J'ai démontré la même chose par un calcul aisé, dans ma Dissertation sur la figure de la Terre. Ellipse de M. *Herman.*

166. De ces résultats, M. *Herman* concluoit la liaison & la dépendance mutuelle & nécessaire de ces trois choses : que la gravité primitive est en raison directe de la distance ; que la gravité absolue à la superficie est en raison inverse de la Conclusion de M. *Herman.*

distance ; & que la figure est une ellipse dans laquelle le demi-diametre de l'équateur est à sa différence au demi-axe, comme la gravité est à la moitié de la force centrifuge sous l'équateur. Il prétendoit que de chacun de ces trois points pris séparément, suivent nécessairement les deux autres. Et comme il trouvoit la même chose tant par la méthode des canaux que par celle de la direction perpendiculaire à la superficie, il se croyoit suffisamment autorisé à censurer *Gregory* & *Newton*.

Qu'il en imposa à l'Auteur ; & en quoi.

167. Ce raisonnement spécieux m'en imposa à moi-même, lorsque je faisois la premiere édition de ma Dissertation en 1739, non pas néanmoins jusqu'à me faire adopter l'opinion d'*Herman*, & à me faire croire que dans le sentiment de *Newton* l'applatissement dût être $\frac{1}{578}$ partie du tout. Car je voyois clairement, ainsi que je l'ai marqué au même endroit, qu'il étoit démontré dans *Newton*, & fort exactement démontré qu'un fluide elliptique qui tourne sur son axe, & dont les parties pesent les unes sur les autres en raison inverse des quarrés des distances, a un applatissement égal à $\frac{1}{230}$ du tout ; ce qu'il a déterminé par une méthode à la vérité indirecte & de fausse position, mais qui en pareille matiere est assez exacte & assez sûre ; & que la gravité doit être dans l'intérieur d'un canal quelconque en raison directe, & dans les divers points de la superficie en raison inverse de la distance au centre. Mais comme cette raison directe & inverse, en donnant une ellipse, ne l'applatissoit que de $\frac{1}{578}$ partie du tout, je soupçonnai d'erreur ce que *Newton* dit quelque part sans le démontrer, savoir que dans sa théorie le fluide doit être de figure elliptique ; & ce point supposé faux, les deux autres tomboient d'eux-mêmes.

La solution de M. *Mac-Laurin* fit découvrir l'erreur.

168. L'année suivante parut la belle Dissertation de M. *Mac-Laurin sur le flux & le reflux de la mer*, où il démontre que la figure elliptique est celle que doit prendre un fluide dans la théorie de *Newton*, & où il trouve le même applatissement que *Newton* avoit tiré de la supposition de cette figure. Pour lors j'examinai avec plus d'attention le passage de M. *Herman*, & je recherchai les causes qui avoient pu l'induire en erreur. Je vais en proposer deux, l'une desquelles fut

insérée, peu de tems après, dans une nouvelle édition de ma Dissertation imprimée à *Luques*, avec un recueil de divers opuscules: mais il y a tant de fautes d'impression, & les figures en particulier y sont tellement défigurées, qu'il est presque impossible d'y rien comprendre.

169. La premiere source d'erreur, c'est que quand on cherche la figure par la direction perpendiculaire à la superficie dans l'hypothese de M. *Herman*, la gravité est composée de deux forces, dont la premiere, à savoir la gravité primitive, est dirigée au centre, comme dans la figure 7. LN suit la direction de LC; la seconde est la force centrifuge LO, dirigée du côté opposé à l'axe: au lieu que dans la théorie de *Newton*, cette gravité primitive n'est point dirigée au centre, mais elle suit la direction d'une ligne tellement inclinée à PC (fig. 14), qu'après qu'on l'a combinée avec la force centrifuge, la gravité absolue a une direction qui, dans l'hypothese de *Newton*, s'éloigne plus de la ligne du centre, & demande un applatissement plus fort que dans l'hypothese de M. *Herman*.

Causes de l'erreur de M. *Herman*. Pl. IV. fig. 7. 14.

170. La seconde source d'erreur est que dans l'hypothese de M. *Herman*, la gravité primitive doit être plus grande sous l'équateur que sous le pôle, à raison d'une plus grande distance; tandis que dans le sentiment de *Newton*, elle doit être moindre. Si dans l'hypothese de M. *Herman* on suppose, comme nous l'avons fait, le demi-diametre de l'équateur $= r$, sa différence au demi-axe $= x$; la gravité primitive sous l'équateur doit être à celle du pôle, comme $r + x$ est à r, & dans le sentiment de *Newton*, comme $r - \frac{1}{5}x$ est à r. De là le rapport de la gravité absolue sous l'équateur à la gravité sous le pôle, est plus petit dans le sentiment de *Newton* que dans l'hypothese de M. *Herman*. D'où il suit que pour conserver l'équilibre des canaux, l'inégalité des gravités absolues doit être compensée par une différence de hauteur dans les canaux, plus grande dans le sentiment de *Newton* que dans l'hypothese de M. *Herman*.

Même sujet.

171. Tout cela met l'erreur de M. *Herman* dans tout son jour, & fait assez voir ce qui doit arriver dans la théorie de *Newton* à un fluide homogêne qui tourne sur son axe. On

Différence de la théorie de *Newton* à celle de M. *Herman*.

voit encore qu'il est bien plus difficile de déterminer la figure dans cette théorie, que dans l'hypothese d'une gravité dirigée au centre, & en raison de la distance au centre & d'une gravité absolue à la superficie en raison inverse de cette distance; & qu'on ne doit pas s'imaginer que pour avoir trouvé ce qui doit arriver dans cette hypothese, lorsqu'il s'agit ou de la figure provenante du mouvement de révolution diurne, ou de celle du flux & du reflux de la mer, produit par l'inégalité d'action du soleil ou de la lune sur les différentes parties de la Terre, on ait déterminé par là même, & à si peu de frais, tout l'effet qui doit résulter de la théorie de *Newton*.

Observation concernant les hypotheses.

172. Il est de plus à observer que *Newton* n'a point employé deux hypotheses, dont l'une regardât les parties placées au dedans de la surface, & l'autre, les parties placées à cette surface même; mais que l'une & l'autre est une suite de l'action générale & mutuelle de toutes les parties les unes sur les autres en raison inverse des quarrés des distances, & qu'il n'est nullement permis de rassembler dans l'explication de quelque phénomene particulier des hypotheses inventées à plaisir, qui loin d'avoir entre elles aucune liaison, se détruisent d'ordinaire les unes les autres; enfin qu'il n'est pas même permis d'établir pour chaque phénomene une hypothese particuliere, quand même ces diverses hypotheses ne renfermeroient ni contradictions ni absurdités, & que ce n'est point ainsi que s'y est pris *Newton*, lui qui a déduit d'un si grand nombre de phénomenes la gravitation universelle, qui l'a employée si heureusement à l'explication de tant d'autres effets naturels, sans qu'on ait trouvé jusqu'ici aucun phénomene qu'on ne pût accorder avec elle, au lieu qu'on en a trouvé plusieurs qui en sont une suite naturelle, & qui prouvent de concert la vérité du principe d'où ils sont déduits. Mais en voilà assez sur ce point.

Rapport de de la diminution de la distance & de l'accroissement de la gravité. Pl. IV. fig. 20.

173. Il nous reste à déterminer dans l'ellipse de *Newton* le rapport de la diminution de la distance & de l'accroissement de la gravité depuis l'équateur jusqu'au pôle. C'est ce qu'on peut faire aisément par la méthode que j'ai déja employée dans ma Dissertation sur la figure de la Terre. Soit (fig. 20) ECe le diametre de l'équateur, BCb l'axe de l'ellipse peu

différente du cercle. Par un point quelconque P de cette ellipse, menez la ligne CP qui, étant prolongée de part & d'autre, rencontrera le cercle circonscrit en D & *d*, & la corde F*f* perpendiculaire au diametre E*e*, laquelle rencontrera encore l'ellipse en *p* & le cercle en F, *f*. DP sera la diminution de la distance; & l'augmentation de la gravité absolue sera presque dans la même raison, puisque la gravité en P est à la gravité en E, comme CE, ou CD à CP. Donc DP est à CP, qui est à peu près une quantité constante, comme l'augmentation de la gravité est à la gravité constante CE.

174. Ceci posé, on a encore par la propriété du cercle $DP \times Pd = FP \times Pf$. D'où il suit que P*d* étant presque constant, DP est à peu près comme le produit de FP par P*f*. Mais comme par la propriété de l'ellipse, ainsi qu'on le peut voir au tome 3 de mes Elémens (n. 365), GF est à GP, ou G*p* dans le rapport constant de CE à CB; il s'ensuit que GP & G*f*, & par conséquent leur différence PF & leur somme P*f*, sont chacune en raison de GF. Donc cette raison composée dont nous venons de parler, est égale à la raison doublée de GF, ou du sinus de l'arc EF, qui est à peu près la mesure de la distance du lieu à l'équateur ou de la latitude du lieu. On aura donc ici, comme au n. 44 & 48, le théorème suivant: *la diminution de la distance, de même que l'augmentation de la gravité, depuis l'équateur jusqu'au pôle, est en raison doublée du sinus de la latitude, ou en raison du sinus verse d'une latitude double.* Suite.

175. Nous verrons au chapitre suivant, que dans l'ellipse les dégrés du méridien augmentent dans la même raison, depuis l'équateur jusqu'au pôle. Mais en attendant, voyons quelle doit être la figure de la Terre, dans la supposition qu'elle n'ait point par-tout la même densité, premierement pour le cas où cette densité augmente ou diminue, suivant quelque rapport, depuis le centre jusqu'à la surface, ensuite pour le cas d'une conformation irréguliere. Figure de la Terre dans l'hypothese d'une densité diverse.

176. Considérons donc d'abord un globe solide, environné d'un fluide; c'est le cas où se trouve la Terre. Supposons que la densité de ce solide change selon une raison quelconque Suite.

Qu'on peut ſuppoſer un noyau avec des couches ſphériques homogênes.

depuis le centre juſqu'à la ſurface, & que le fluide qui l'entoure ſoit par-tout de la même denſité. La denſité, de la maniere que nous l'enviſageons ici, doit être égale à égales diſtances du centre en tout ſens. M. *Daniel Bernouilli* l'a ſuppoſé de même pour une maſſe fluide, dans ſa Diſſertation ſur le flux & le reflux de la mer; & c'eſt, comme nous le verrons bientôt, ce qui a trompé ce fameux Géometre, qui d'ailleurs eſt au-deſſus de tous nos éloges. Mais on peut le ſuppoſer ſans aucun riſque, pourvu qu'on le faſſe avec les précautions requiſes, dans une maſſe dont le noyau eſt ſolide, & qui pour la figure differe peu d'une ſphere. Car ſi les couches d'égale denſité ont elles-mêmes une figure peu différente de la ſphéricité, les couches ſphériques peuvent auſſi s'écarter ſi peu de l'homogénéité, qu'en les réduiſant à une homogénéité parfaite, on ne changera pas ſenſiblement la gravité du fluide répandu ſur ſa ſurface, & dont l'hypotheſe de gravité détermine l'équilibre; ce qu'il ſeroit aiſé de démontrer au beſoin, & d'une maniere à ne pas ſouffrir la moindre difficulté; mais je crois que cette vérité ſe fait aſſez ſentir par elle-même. Or ce cas eſt le même que celui où ce noyau ſolide ſeroit entierement homogêne, étant compoſé d'une matiere également diſtribuée dans toutes ſes parties. Car toutes les couches ſphériques homogênes attirent chacune en particulier, tant dans le premier que dans le ſecond cas, de la même maniere que ſi toute leur matiere étoit réunie au centre, comme on peut aiſément le conclure des démonſtrations de *Newton.*

L'excès de denſité des couches réuni au centre.

177. Suppoſons donc un globe ſolide, dont les couches concentriques ſoient homogênes, & dont la denſité change à diverſes diſtances, ſuivant une raiſon quelconque: ſuppoſons-le couvert d'un fluide, dont toutes les parties pèſent les unes ſur les autres, & ſur les parties du ſolide, en raiſon inverſe des quarrés des diſtances: ſuppoſons enfin que tout le globe tourne ſur ſon axe, & que la figure ſoit arrivée au point d'équilibre. Si l'on conçoit que tout l'excès de denſité de chaque couche ſur celle du fluide, eſt réuni au centre, l'équilibre du fluide n'en ſera point troublé, puiſque le fluide péſera toujours également ſur la maſſe du noyau.

178. De cette ſorte nous aurons un globe ſolide couvert d'un

d'un fluide homogêne au globe même; & outre la force centrifuge, celle par laquelle les parties s'attiroient en raiſon inverſe des quarrés des diſtances, ſe trouvera changée en deux autres, l'une dirigée au centre en raiſon inverſe des quarrés des diſtances à ce centre, l'autre par laquelle les parties du fluide devenu homogêne, s'attirent également en raiſon inverſe des quarrés de leurs diſtances reſpectives. Suppoſons maintenant que ce ſolide ſe liquéfie tout à coup, & cherchons l'équilibre de ce tout fluide; car dès que nous l'aurons trouvé, quand même le globe redeviendroit ſolide comme auparavant, la partie fluide ne changera point pour cela de ſituation, puiſque toutes les parties continueront à s'attirer avec les mêmes forces & dans les mêmes directions. Cas où le noyau ſe liquéfie.

179. Or pour trouver la figure du fluide dans cette premiere hypotheſe, repréſentons-nous la ſeconde, dans laquelle (toutes les autres forces reſtant dans le même état) celle qui eſt dirigée à la maſſe réunie dans le centre, ſoit de l'intenſité convenable, eu égard à cette maſſe; mais au lieu de croître en raiſon inverſe des quarrés des diſtances, ſuive ſeulement la raiſon ſimple directe de ces diſtances. Mettons dans cette ſeconde hypotheſe le fluide en équilibre, & nous chercherons enſuite la différence des figures qu'il doit prendre dans les deux hypotheſes. Seconde hypotheſe

180. On trouvera l'équilibre dans cette ſeconde hypotheſe de la même maniere qu'on l'a trouvé plus haut pour un fluide homogêne, dont toutes les parties s'attirent mutuellement en raiſon inverſe des quarrés des diſtances, & ſont outre cela pouſſées par trois autres forces, dont la premiere eſt dirigée au centre en raiſon des diſtances au centre, & les deux autres ſont dans des directions perpendiculaires, l'une à l'axe, l'autre à l'équateur, & en raiſon de leurs diſtances à l'équateur ou à l'axe. Car on aura abſolument les mêmes conditions. Réduite à la ſolution générale de M. *Mac-Laurin*.

181. Suppoſons maintenant (fig. 21) que BA*ba* repréſente la figure elliptique que doit prendre le fluide dans cette ſeconde hypotheſe, & que BE*be* ſoit un globe, ayant pour diametre l'axe B*b*, & qui rencontre en E*e* le diametre A*a* de l'équateur. Ayant élevé EG perpendiculaire à A*a*, & d'une grandeur arbitraire, qui repréſente la force avec laquelle Figure pour la ſeconde hypotheſe. Pl. IV. fig. 21.

doit peser un corps à la distance de EC ou CB sur la masse réunie en C; menez CG qui rencontrera en I la ligne AF parallele à EG, & faites passer par G une hyperbole cubique LG, ayant bC, CA pour asymptotes, laquelle rencontrera AI en L, & dont les ordonnées EG, AL soient en raison inverse des quarrés des abscisses EC, AC.

Différence de la seconde hypothese à la premiere.

182. Si la seconde hypothese est changée en la premiere, la différence de gravité sera absolument la même sur les rayon BC, CE; mais dans l'intervalle AE il se perdra une partie de cette gravité. Car un corps placé en A a une gravité qui dans la seconde hypothese seroit exprimée par AI, & qui dans la premiere est exprimée par AL. Ainsi le poids de la colonne AE, qui dans la seconde hypothese seroit représenté par l'aire AIGE, le sera dans la premiere par ALGE, LGI exprimant la diminution du poids. Si donc l'on verse en AM une nouvelle dose de fluide homogêne capable de compenser cette diminution de poids dans la colonne AE, & que la même chose se fasse pour toutes les colonnes placées en tout sens autour du centre, on rétablira l'équilibre, & le fluide se trouvera, même en la premiere hypothese, dans un équilibre parfait.

Construction pour compenser cette différence.

183. Or pour trouver cette hauteur AM, prolongeons GE jusqu'en F, de sorte que EF soit à FG, comme la densité du fluide est à la densité moyenne du noyau, afin que par-là même EF soit à EG en même raison que la densité du fluide à la densité de la matiere excédente réunie au centre. Ce dernier rapport sera aussi celui de la gravitation du point F sur le globe, devenu homogêne au fluide, à sa gravitation sur la matiere réunie au centre, puisqu'il pese sur le globe de la même maniere que si ce globe étoit lui-même compénétré au centre. Soit encore représentée par ED la gravité sur tout le sphéroïde devenu fluide, laquelle sera la même que celle qui agiroit sur un seul sphéroïde passant par le point E, & semblable au sphéroïde ABab, & qui sera par conséquent un peu moindre que celle qui agit sur le globle EBeb. Ayant mené par C, D une ligne qui rencontre ILA en N, AN exprimera la gravité sur tout le sphéroïde fluide & homogême BAba de la seconde hypothese, puisque dans le canal CA cette gravité

eſt en raiſon de la diſtance au centre; IN la gravité ſur toute la maſſe compoſée du ſphéroïde homogêne, & de la maſſe réunie au centre, laquelle attire en raiſon directe des diſtances; & NL la gravité ſur l'un & ſur l'autre, dans la premiere hypotheſe, où la maſſe du centre attire en raiſon inverſe des quarrés des diſtances.

184. Prenez du côté de A la ligne NO qui ſoit à NL, comme la force centrifuge à la gravité entiere en A. Ayant mené CO qui rencontrera GE en K, il eſt clair que DK exprimera la force centrifuge en E, puiſque cette force centrifuge eſt elle-même proportionnelle à la diſtance au centre. Donc OKGI exprime tout le poids du canal AE dans la ſeconde hypotheſe où la maſſe attire du centre en raiſon des diſtances; OKGL le poids du même canal dans la premiere hypotheſe où la maſſe attire du centre en raiſon inverſe des quarrés des diſtances; LGI la différence des poids qui doit être compenſée par la partie AM. Il ſuffira donc de mener la ligne RMQP parallele à LAON, de ſorte que l'aire QOLR, qui dans la premiere hypotheſe exprime tout le poids de la partie AM, ſoit égale à l'aire LGI qui exprime la quantité du poids qu'on a perdu en revenant de la ſeconde hypotheſe à la premiere. Suite.

185. Or on trouve l'aire de cette hyperbole cubique RLG par le moyen de ſes abſciſſes & de ſes ordonnées. Car ſon aire terminée d'une part par une ordonnée quelconque EG, & prolongée de l'autre à l'infini, eſt égale au rectangle ſous l'abſciſſe CE & l'ordonnée EG. D'où il ſuit que l'aire LAEG eſt égale à la différence des rectangles $CE \times EG$, $CA \times AL$. De plus, les ordonnées ſont déterminées par les abſciſſes, auſſi bien que les aires terminées par les lignes CO, CI. Il ſeroit donc aiſé de trouver par la Géométrie ou par l'analyſe, le point M, tel que l'aire RQOL fût égale au triangle mixtiligne LGI. Mais comme la ligne AE eſt très petite, & AM beaucoup moindre encore, on aura bien plutôt fait en prenant l'arc GLR pour une ligne droite. Quadrature de l'hyperbole cubique.

186. Ayant donc mené GH parallele à EA, le triangle LGI ſera au rectangle AEGH, comme LI au double de AH ou de EG. Or EG : HI :: CE : GH ou AE; & puiſque Moyen plus facile.

$EG : AL :: AC^2 : CE^2$, & en soustrayant $EG : HL :: AC^2 : AE \times Ea$ (1); ou parceque Ea est à près double de CE, & CA presque égale à CE; $EG : HL :: CE : 2AE$; LH sera à peu près double de HI, & EG sera à toute la ligne LI, comme CE au triple de AE.

Détermination de cette compensation.

187. Or si l'on prend le trapeze QOLR pour un parallélograme, dont la hauteur soit AM & la base OL, ou KG qui est à peu près de la même longueur que OL; & le mixtiligne LGI pour un triangle rectiligne, dont la base soit LI & la hauteur HG; on aura $LI : AM :: LO$ ou $KG : \frac{1}{2} GH$, ou $\frac{1}{2} AE$. Donc par composition de raisons $EG : AM :: CE \times KG : \frac{3}{2} AE^2$. D'où l'on tire $AM = \frac{3 EG \times AE^2}{2 KG \times CE}$, qui donne cette analogie, $KG : \frac{3}{2} EG :: \frac{AE^2}{CE} :: AM$; c'est-à-dire que le total de la gravité sous l'équateur est à $\frac{3}{2}$ de la gravité sur la masse réunie au centre, comme la troisieme proportionnelle au demi-axe, & à sa différence au demi-diametre de l'équateur, est à la hauteur que l'on cherche.

Densité du noyau plus grande que celle du fluide.

188. Or il y a trois cas, suivant que la densité du noyau est plus grande ou égale, ou plus petite que celle du fluide. Dans le premier cas la ligne EG, & tout le triangle mixtiligne LGI doivent être de l'autre côté de EC par rapport à EF, afin que la force totale des parties EA soit composée du total de leurs gravitations sur le sphéroïde & sur le centre. Pour lors LGI exprime la perte du poids dans la premiere hypothese dans laquelle la masse du centre attire en raison inverse des quarrés des distances, au lieu que dans la seconde elle attire en raison directe & simple des distances; d'où il suit qu'on doit compenser cette perte en ajoutant AM. Or dans ce cas même AM sera toujours très petite. Car alors

---

(1) Puisque $EG : AL :: AC^2 : CE^2$, on aura en soustrayant $EG : EG - AL :: AC^2 : AC^2 - CE^2$, & parceque $EG - AL = HL$, & $AC^2 - CE^2 = AE^2 + 2 CE \times AE$; on aura $EG : HL :: AC^2 : AE^2 + 2 CE \times AE$. Mais $AE^2 + 2 CE \times AE = AE \times (AE + 2 CE)$, & $AE + 2 CE = Ae = Ea$. Donc $AE^2 + 2 CE \times AE = AE \times Ea$, & $EG : HL :: AC^2 : AE \times Ea$.

DG sera constamment plus grande que GE; & puisque DK, qui exprime la force centrifuge doit être très petite en comparaison de DG qui représente la gravité primitive; KG sera plus grande que GE, ou elle lui sera égale, (ce qui arrive, lorsque la densité FE du fluide est très petite, ensorte que DE soit elle-même de peu de valeur, aussi bien que DK qui est alors ou moindre ou égale à DE), ou enfin KG sera moindre, mais de si peu chose, qu'on pourra l'égaler à GE. D'où il suit que AM sera au contraire ou plus petite que la troisieme proportionnelle à CE & EA, ou qu'elle lui sera égale, ou qu'enfin elle la surpassera de si peu de chose, qu'on pourra les égaler.

189. Dans le second cas il n'y a point de matiere réunie au centre, le triangle LGI s'évanouit, ses côtés LG, GI tombant sur AE, EA, & le cas se réduit à la détermination de M. *Mac-Laurin* pour un fluide homogêne. Il n'y a rien pour lors à ajouter à l'ellipse. Densité égale:

190. Dans le troisieme cas EG & son triangle LGI tournent du côté opposé, & se confondent avec EG′ & L′G′I′. Pour lors on n'imagine pas dans le centre un excédent, mais plutôt dans le noyau un supplément de matiere pour compenser le dégré de densité qui lui manque, & le réduire à l'homogénéité. Pour cela même on doit encore imaginer dans le centre une égale quantité d'autre matiere douée d'une vertu répulsive, agissante en raison inverse des quarrés des distances, afin de détruire tout l'effort de la matiere surajoutée. En ce cas le triangle L′G′I′ augmente le poids OKG′I′, bien loin de le diminuer, puisqu'on en ôte plus qu'on ne pourroit en ôter si la force répulsive n'augmentoit pas en raison inverse des quarrés des distances, mais en raison simple & directe des distances. Il n'est donc plus question ici d'ajouter AM, mais de la retrancher, puisque de positive qu'elle étoit, elle se change en AM′, quantité négative; de même que EG se change en EG′. Densité moindre.

191. Alors si EG′ n'approche pas trop du point K, on ne devra point craindre d'erreur sensible. Or elle n'en approchera pas trop, à moins que la densité FG′ du noyau ne fût trop petite par rapport à la densité FE du fluide. Car la force Observation pour ce dernier cas.

centrifuge DK sera toujours très petite par rapport à la gravité DG′, & FD est toujours petite en comparaison de EF. En effet, par la supposition EF est à ED, comme la gravité du point E sur le globe BE*be*, à sa gravité sur le sphéroïde BA*ba*, ou ce qui est le même, sur un sphéroïde semblable, passant par le point E. Donc par le n. 155, EF : ED :: $\frac{2}{3}$ CA : $\frac{2}{3}$ CA — $\frac{4}{15}$ AE, ou EF : ED :: CA : CA — $\frac{2}{5}$ AE. Donc ce qu'il faut retrancher en ce cas, est à peu près égal à cette troisieme proportionnelle, ou ne la surpasse pas de beaucoup, & sera toujours petit ; ce qui ne peut jamais manquer d'arriver dès-là que la densité du noyau n'est point trop petite, comparée à celle du fluide.

De la compensation de la différence des forces.

192. Si l'on fait la même chose sur toutes les lignes droites tirées du centre, comme CVT, en ajoutant ou retranchant T*t*, laquelle soit à une troisieme proportionnelle à CT, VT, à peu près dans la même raison que $\frac{3}{2}$ de la densité du noyau à la somme, ou à la différence des densités ; tout le fluide sera en équilibre. Car cet équilibre ne pourroit être troublé que par l'effet de cette attraction mutuelle qui agit en raison inverse des quarrés des distances, & qui dépend de l'attraction terminée à ce surcroît AM*t*T de fluide. Or elle est absolument insensible pour sa petitesse, & à raison de la distance. Si l'on devoit en tenir compte, il faudroit, pour compenser la différence des forces, ajouter ou retrancher un autre ménisque qui, en comparaison du premier, ne seroit jamais d'une grandeur tant soit peu sensible. Il arrive ici la même chose que dans les series qui sont fort convergentes, savoir que pour trouver la quantité inconnue, il suffit de connoître les deux premiers termes.

Cas d'une très petite densité du noyau.

193. Dans le cas où EG′ approcheroit fort de EK, ou la surpasseroit même, on pourroit aisément déterminer par la Géométrie, ou par le calcul ordinaire d'algebre, la quantité AM′ qu'il faudroit retrancher de AE. Mais dans ce cas particulier, la solution du problême n'est plus d'aucun usage, comme nous le verrons dans la suite.

Que la nouvelle courbe differe peu de l'ellipse.

194. Or la figure BM*tb* s'écarte un peu de l'ellipse. Car si c'étoit une ellipse comme BA*b*, V*t* seroit, aussi bien que VT, à peu près en raison doublée du sinus de l'angle ACT,

comme il eſt aiſé de le conclure du n. 174. D'où il ſuit que Vt ſeroit en raiſon de VT, & par-là même auſſi Tt en raiſon de VT. Or par la conſtruction Tt eſt en raiſon de VT^2, puiſqu'elle eſt en raiſon de la troiſieme proportionnelle à CV conſtant, & à cette même ligne VT. D'où il arrive que de l'équateur au pôle elle décroît beaucoup moins que ſi le point t étoit à l'ellipſe. Mais puiſque la ligne entiere Tt eſt par-tout très petite, non ſeulement par rapport à CV, mais encore par rapport à VT, toute cette figure différera peu de l'ellipſe, & ſa courbure ſera par-tout ſenſiblement la même que celle de l'ellipſe. Mais dans le cas où le noyau a moins de denſité que le fluide, elle approchera plus de la figure circulaire.

195. Cette différence eſt encore plus petite, & devient tout à fait inſenſible, lorſqu'il eſt queſtion du flux & du reflux de la mer, auquel on peut fort aiſément appliquer toute cette théorie. Car alors toute l'élévation AE eſt à peine de deux pas romains, ou de dix pieds. Par conſéquent la troiſieme proportionnelle à CE de 4300000 pas, & AE de 2, ſavoir $\frac{1}{1057000}$ pas, n'eſt pas la dix-millieme partie d'un pouce. Ainſi quelle que fût la denſité du fluide par rapport à celle du noyau, l'élévation dans le cas d'homogénéité ne différeroit pas ſenſiblement de la figure elliptique. Du flux & du reflux de la mer.

196. Il faut maintenant déterminer l'ellipticité AE dans cette derniere hypotheſe, dans laquelle ſe trouvent trois forces, celle de la maſſe du fluide homogêne, qui attire en raiſon inverſe des quarrés des diſtances; celle de la maſſe réunie au centre, qui attire en raiſon directe des diſtances; & la force centrifuge. Soit donc la denſité du fluide $=t$, la denſité moyenne du noyau conſidéré dans ſon premier état, $=p$. Si l'on rend le noyau homogêne au fluide, la denſité de la maſſe réunie au centre ſera $p-t$. Soit $p-t=q$, le demi-axe CB, ou CE$=r$, la différence AE$=x$, & le rapport de la force centrifuge au total de la gravité ſous l'équateur $=\frac{n}{m}$. Ces valeurs nous ſerviront à déterminer la gravité au pôle B, & ſa différence à la gravité ſous l'équateur en A. Et comme par le n. 121, la gravité en B eſt à la gravité en A, De l'ellipticité dans la ſeconde hypotheſe.

comme CA à CB; CA, ou ce qui eſt à peu près la même choſe, CE eſt à EA, comme la gravité en B à la différence des gravités; ce qui déterminera la ligne AE.

Force totale à la ſurface.

197. D'abord il ſuit de ce qui a été dit (n. 154), que la gravité totale du point B ſur le globe BEbe, dont le rayon CB eſt r, & la denſité t, eſt $\frac{2}{3}ctr$; ſur la matiere réunie au centre $\frac{2}{3}cqr$; ſur l'un & l'autre enſemble $\frac{2}{3}cpr$. Cette derniere gravité ſera à peu près la gravité totale du point E ſur tout le ſphéroïde, y compris le noyau, laquelle, du moment qu'il s'agit de gravité totale & non de différence, peut être priſe pour la gravité d'un point quelconque de la ſurface du ſphéroïde.

Différence de la gravité.

198. Or cette gravité en B differe par trois endroits de la gravité en A. Car en premier lieu, la force avec laquelle le point B ſe porte ſur tout le ſphéroïde fluide homogêne, ſurpaſſe la gravitation du point A ſur ce même fluide; & par le n. 155, CA, ou ce qui eſt à peu près le même, CE eſt à $\frac{1}{5}$ AE, ou r à $\frac{1}{5}x$, comme la gravité en B ſur le ſphéroïde, ſavoir $\frac{2}{3}ctr$, à ſon excès ſur la gravité en A, qui ſera $\frac{2}{15}ctx$. En ſecond lieu, CE ou CB (r) eſt à EA (x), comme la gravitation du point B ſur la maſſe du centre ($\frac{2}{3}cqr$) eſt à ſa différence par défaut à la gravitation du point A plus éloigné de cette maſſe. Donc cette différence ſera $\frac{2}{3}cqx$. Enfin m eſt à n, comme la gravité primitive $\frac{2}{3}cpr$, commune à toute la ſuperficie de la Terre, eſt à la force centrifuge en A $= \frac{2cpnr}{3m}$, au lieu qu'en B cette force eſt nulle.

Formule pour l'ellipticité.

199. Ainſi la différence totale des gravités en B & en A ſera $\frac{2}{15}ctx - \frac{2}{3}cqx + \frac{2pcnr}{3m}$, & le rapport de la gravité en B à cette différence ſera celui de $\frac{2}{3}cpr$ à $\frac{2}{15}ctx - \frac{2}{3}cqx + \frac{2pcnr}{3m}$, ou en diviſant par $\frac{2}{3}cp$, celui de r à $\frac{tx}{5p} - \frac{qx}{p} + \frac{nr}{m}$. Et comme ce rapport doit être celui de CB à EA, ou de r à x, on aura $x = \frac{tx}{5p} - \frac{qx}{p} + \frac{nr}{m}$, ou bien $\left(1 - \frac{t}{5p} + \frac{q}{p}\right)x = \frac{nr}{m}$. Or comme $p - t = q$ par la ſuppoſition, on aura $\frac{-t}{5p} + \frac{q}{p} = -\frac{t}{5p}$ +

$+\frac{p}{p}-\frac{t}{p}=1\frac{-6t}{5p}$. Donc $\left(2-\frac{6t}{5p}\right)x=\frac{nr}{m}$. Donc $x=\frac{nr}{2m\left(1-\frac{3t}{5p}\right)}$.

200. Cette formule s'accorde parfaitement avec celle qu'a proposée M. d'*Alembert* dans sa Dissertation sur la cause des vents, qui a remporté le prix de l'Académie de Berlin en 1747, & avec une autre beaucoup plus générale, proposée par M. *Clairaut* dans son ouvrage sur la figure de la Terre; mais nullement avec celle que donne M. *Daniel Bernouilli* dans une Dissertation imprimée parmi les pieces couronnées par l'Académie royale des Sciences de *Paris*, & qu'on y trouve à l'année 1740. J'avoue que de cette formule suivent plusieurs corrollaires qui semblent d'abord autant de paradoxes également contraires aux regles du calcul & de la Géométrie; mais si on y regarde de plus près, on en reconnoîtra l'exacte vérité. Formules de MM. d'*Alembert*, *Clairaut* & *Bernouilli*.

201. Pour commencer par M. *D. Bernouilli*, cet Auteur a donné pour ce même cas d'un noyau solide couvert d'un fluide, & tournant avec lui sur son axe, une formule qui exprime la différence du demi-axe au demi-diametre de l'équateur, telle que cette différence se trouve en raison inverse de la densité du fluide. D'où il conclut que le flux & le reflux de l'air éleve l'atmosphere à deux milles, & que si cette élévation ne se fait point sentir dans le barometre, c'est que l'atmosphere acquiert d'abord par son élasticité un certain équilibre, d'où il arrive que chaque point de la surface de la Terre porte le poids moyen de l'atmosphere. Ce qui suit de la formule de M. *Bernouilli*.

202. Or cela est contraire à notre formule dans laquelle, lorsque le noyau est fort dense en comparaison du fluide qui le couvre, p devient extrêmement grand par rapport à t; d'où il suit que la fraction $\frac{3t}{5p}$ est très petite, que toute la formule se réduit presqu'à $\frac{nr}{2m}$, & qu'à mesure que le fluide perd de sa densité, cette formule, loin d'augmenter à l'infini, diminue & se rapproche infiniment de $\frac{nr}{2m}$. Contraire à celle de l'Auteur.

Cause de l'erreur de M. *Bernouilli.*

203. Mais c'est la formule de M. *Bernouilli* qui manque de justesse & non la nôtre. M. d'*Alembert* l'a déja remarqué dans l'ouvrage que je viens de citer. Je l'ai moi-même démontré dans la Dissertation sur le flux & le reflux de la mer, imprimée la même année, & j'ai attribué cette erreur à la même cause que lui a assigné dans le même tems M. d'*Alembert*, savoir que dans la méthode des canaux employée par M. *Bernoulli*, on ne doit point supposer des couches sphériques concentriques de même densité. Car si toute la masse étoit fluide, les couches, fussent-elles de densité inégale, deviendroient elles-mêmes elliptiques; & si l'on a égard à cela, il faut beaucoup moins d'élévation sous l'équateur pour compenser la perte que cause à la gravité la force centrifuge, que si toute cette perte devoit être compensée par le seul fluide qui couvre le noyau; auquel cas il faudroit véritablement que la hauteur de ce fluide fût en raison inverse de sa densité pour compenser une perte déterminée. C'est pour cela que voulant me servir de la méthode des canaux, j'ai commencé par réduire la masse solide à l'homogénéité, en renvoyant tout le surplus de la matiere au centre, & qu'ensuite de solide qu'elle étoit je l'ai rendue fluide. D'ailleurs il est évident que s'il arrivoit un changement si considérable dans la hauteur de l'air, le barometre devroit absolument l'indiquer, sans pouvoir en être dispensé par l'équilibre prétendu, comme l'a encore remarqué M. d'*Alembert*. Car pour qu'il y ait équilibre, il faut que chaque partie soit poussée en tout sens par des forces égales, & non pas que des parties placées l'une en un endroit, l'autre à l'autre, soient poussées par les mêmes forces. En effet, dans cette atmosphere même un atôme placé au sommet d'une montagne, est moins chargé qu'un autre qui se trouve au fond de la vallée, quoique l'un & l'autre soient en équilibre.

Formule de M. d'*Alembert.*

204. M. d'*Alembert* donne sa formule à l'article 28, *proposition* 6. Il suppose le demi-diametre du noyau $= \rho$, le demi-diametre du fluide $= r$, le rapport du demi-diametre à la circonférence $= \frac{1}{\pi}$, la densité du fluide $= \delta$, celle du noyau $= \Delta$, la gravité en un point quelconque de la surface du

fluide $= p$, la force centrifuge sous l'équateur $= \varphi$, & sa formule pour la différence du demi-axe au demi-diametre de l'équateur est $\frac{\varphi r}{2p} : \left(1 - \frac{3 n \delta v}{5(\ldots)}\right)$. Et supposant $\rho = r$, à cause que la hauteur du fluide n'est pas sensible, comparée à la grosseur du noyau, la formule se change en $\frac{\varphi r}{2p\left(1-\frac{3\delta}{5\Delta}\right)}$.

Or les valeurs $\frac{a}{m}$, c, $\frac{s}{p}$ sont dans ma démonstration les mêmes que $\frac{\varphi}{p}$, $2n$, $\frac{\delta}{\Delta}$ dans celle-ci; & par la substitution, la formule de M. d'*Alembert* revient à la mienne, savoir à $\frac{nr}{2m\left(1-\frac{3t}{5p}\right)}$.

Rapports de la densité du noyau à celle du fluide.

205. Considérons maintenant les divers rapports des densités t, p. Si la densité du fluide n'est pas sensible par rapport à celle du noyau, la fraction $\frac{3t}{5p}$ s'évanouit, & la formule se réduit à $\frac{nr}{2m}$: & cette formule, à mesure que p diminue par rapport à t, augmente toujours tandis que $\frac{3t}{5p}$ est au-dessous de l'unité, puisque le diviseur de la formule va toujours en diminuant. Enfin lorsque $p = t$, la formule se change en $\frac{nr}{2m\left(\frac{2}{5}\right)} = \frac{5nr}{4m}$, comme nous l'avons vu plus haut; d'où il suit que la valeur de x, dans le cas où la densité du noyau surpasse infiniment celle du fluide, est à sa valeur pour le cas d'homogénéité, comme $\frac{1}{2}$ est à $\frac{5}{4}$, ou comme 2 est à 5. Tous ces cas intermédiaires regardent un fluide homogène, dont les parties s'attirent en raison inverse des quarrés des distances, avec la masse du centre qui attire en raison simple directe des distances; & ils se réduisent à celui d'une masse réunie au centre, laquelle attire en raison inverse des quarrés des distances, & par conséquent à un noyau solide également dense à égales distances du centre, mais dont la moyenne densité surpasse celle du fluide, & qui, moyennant l'addition de AM, T,

a une force d'attraction mutuelle, égale à celle du fluide. Or dans tous ces cas on peut appliquer sans risque la solution du problême, pourvu que la force centrifuge soit très petite en comparaison de la gravité, puisqu'alors la valeur exprimée par la formule est très petite par rapport à r, c'est-à-dire que l'élévation est petite, comme on l'a supposé dans la déduction de cette formule, en calculant sur cette supposition la différence d'attraction sous l'équateur & sous le pôle.

Cas où ce rapport approche de celui de 3 à 5.

206. Si le noyau est moins dense que le fluide, en ce cas, outre le sphéroïde du fluide homogêne, on imagine au centre une masse répulsive, égale à la quantité de matiere qu'il faut ajouter au noyau pour le réduire à l'homogénéité. Mais alors même la valeur de la formule est positive, tant que le rapport de p à t, c'est-à-dire de la densité du solide à celle du fluide, surpasse celui de 3 à 5, & elle va toujours en augmentant; & lorsque ces rapports different encore au point que $1 - \frac{3t}{5p}$, ou $\frac{5p-3t}{5p}$ est une fraction beaucoup moindre que $\frac{n}{2m}$, l'ellipticité est petite, & l'on peut se servir de la formule. Mais du moment qu'ils se rapprochent de trop près, la valeur de la formule augmente à l'infini, & devient ensuite négative. Pour lors il feroit inutile de chercher de l'exactitude dans la formule, puisque ce n'est que dans la supposition d'une petite excentricité qu'on a déterminé la différence tant des attractions sous l'équateur & le pôle, que de la force répulsive de la masse réunie au centre.

Cas d'une ellipticité excessive.

207. Si dans un ellipsoïde, ou applati, ou allongé à volonté, on exprimoit généralement le rapport précis de la gravité sous le pôle à celle de l'équateur, par les demi-axes de l'ellipse génératrice, comme l'a fait M. *Mac-Laurin*, & que cette force répulsive proportionnelle à la distance, & son rapport à la force centrifuge sous l'équateur, qui est constant, fussent également exprimés par ces mêmes lignes, & avec la même précision, l'on pourroit aussi employer les demi-axes à former une expression exacte du rapport de la force totale sous l'équateur à celle du pôle; & si l'on mettoit les demi-axes en raison inverse de ces forces, on auroit une équation d'où l'on pourroit tirer la valeur précise des demi-

axes, & une construction générale du problême dans toute l'exactitude géométrique, pour le cas même où les demi-axes seroient d'une inégalité extrême. La figure ainsi trouvée, on y feroit les corrections nécessaires par la méthode exposée (n. 183 & suiv.), en ajoutant ou retranchant AM ou AM', qui répond au triangle LGI ou L'G'I'. Mais cette addition même AM, T*t* deviendra alors assez considérable pour demander une nouvelle correction. Or tous ces cas n'ont aucun rapport au sujet que nous traitons, puisque nous savons que l'ellipticité de la Terre est si petite, qu'elle approche beaucoup de la figure d'une sphere.

Cas où le rapport est moindre que celui de 3 à 5.

208. Si le rapport de p à t est moindre que celui de 3 à 5, la valeur de la formule devient négative ; ce qui fait voir qu'on ne peut alors trouver l'équilibre dans un sphéroïde applati, mais seulement dans un sphéroïde allongé. Et si ce rapport n'est pas de beaucoup moindre, la formule donnera une petite valeur qu'on pourra prendre sans risque. Car si par exemple p est à t, comme 3 est à 6, on aura $\frac{3t}{5p} = \frac{18}{15} = \frac{6}{5}$, & la formule se réduira à $-\frac{5nr}{2m}$, valeur assez petite. Cette valeur diminue ensuite continuellement à mesure que le noyau devient moins dense, jusqu'à ce que cette densité étant nulle, & le noyau entierement vuide, la valeur $1 - \frac{3t}{5p}$ devient infinie, & celle de la formule se réduit à zéro.

Conséquences qui s'en suivent.

209. Ceci nous mene à des conséquences fort ressemblantes à des paradoxes. Car il s'ensuit en premier lieu qu'avec une force centrifuge des plus petites, qui deviendroit même absolument insensible, & une rotation des plus lentes, qui s'acheveroit à peine en mille ans, on pourroit avoir un applatissement très sensible. Car quelque petit que soit le rapport de n à m, si $3t$ est une quantité assez approchante de $5p$, la formule donnera une valeur assez grande. Le fluide sera donc applati par un mouvement si insensible, jusques-là même qu'en certains cas cet applatissement augmentera à l'infini. Car quoique la formule déterminée dans l'hypothese d'un petit applatissement, puisse être fausse dans le cas d'un grand applatissement, ensorte que le passage par l'infini ne se fasse pas à l'en-

valeur ne peut en croissant devenir négative, sans passer quelque part par l'infini. Or il n'y aura aucun point de passage au-delà duquel on ne puisse, avec un mouvement & une force centrifuge presque insensible, trouver un applatissement énorme. D'un autre côté il paroît évident, & évident par soi-même, qu'une force centrifuge si petite ne doit pas détourner sensiblement la direction de la gravité ; & par conséquent elle ne doit pas sensiblement troubler l'équilibre de la figure sphérique. Elle le trouble pourtant, & du moment qu'elle l'a obligé de s'écarter tant soit peu de sa sphericité dans le cas d'une valeur négative, la différence sous le pôle & sous l'équateur, allant toujours en augmentant, la force répulsive de la matiere réünie au centre devenant toujours plus grande sous l'équateur, on aura une nouvelle cause d'une élévation ultérieure, & cette élévation va toujours en croissant jusqu'à ce que la valeur de la formule devenant positive, on ait l'équilibre. Mais dès que cette valeur redevient négative, le fluide s'écarte à l'infini, sans jamais trouver l'équilibre, & fuit sans retour & pour jamais.

Allongement de la figure joint au mouvement de rotation.

210. Autre paradoxe : si la densité du fluide surpasse de beaucoup celle du noyau, le mouvement de rotation doit se rencontrer avec l'allongement de la figure. Or il semble que quelque soit le rapport des densités dans un sphéroïde allongé, ni les canaux ne peuvent y être en équilibre, ni la direction de la gravité perpendiculaire à la superficie. Cependant tout cela s'y trouve parfaitement : car il y aura un dégré d'allongement & d'élévation vers les pôles, qui se rencontrera avec l'équilibre. La raison est que dans un sphéroïde allongé la gravité est moindre sous le pôle que sous l'équateur, suivant ce qui a été dit (n. 156). De plus, cette masse placée au centre, & qui repousse en raison simple & directe des distances, agissant également sur des canaux d'égale longueur, repoussera plus fortement le fluide d'un canal aboutissant au pôle, comme plus long que celui d'un canal terminé à l'équateur ; & l'excès de la force répondra à celui de cette longueur. De là il peut bien arriver que la force centrifuge qui répond à un canal terminé à l'équateur, compense exactement la double diminution de gravité dans un canal terminé au pôle ; & c'est précisément ce

qui arrive dans le cas où la valeur de la formule devient négative, comme il seroit aisé de le démontrer immédiatement, en appliquant la démonstration à ce cas particulier.

211. Mais alors même il est à observer que si on donne au fluide une figure sphérique, sans aucune force centrifuge, il sera encore dans un équilibre parfait. Si on le fait tourner sur son axe, le poids diminue dans le canal qui aboutit à l'équateur, & la figure s'applatit. Mais plus il arrivera de changement dans la figure, plus il y aura d'inégalité dans les poids des canaux, l'inégalité de pesanteur dans chaque partie étant trop grande pour pouvoir être compensée par aucune inégalité de longueur dans les canaux. Le fluide ne pourra donc jamais parvenir à la figure requise pour l'équilibre, je veux dire à une figure allongée. Bien loin de là, il s'en écartera de plus en plus jusqu'au point de se dissiper. La force répulsive du centre, & la force centrifuge produite par le mouvement de rotation, l'emportant toujours sur la force d'attraction qui agit sur le sphéroïde, elles repousseront le fluide, & lui feront parcourir un espace infini.

Que si on dérange l'équilibre de ce sphéroïde, il s'en écarte toujours plus.

212. Il s'ensuit que pour avoir l'équilibre en ce cas, il faut commencer par recourir à cette figure allongée qui s'accorde avec l'équilibre. Dès que le fluide aura pris cette figure, il la conservera toujours. S'il venoit à la perdre, & qu'il arrivât quelque diminution, quelque petite qu'elle fût, dans son élévation sous les pôles, il ne reviendroit point à cette figure; au contraire, il s'en écarteroit toujours plus à l'infini. Car à mesure qu'il approche de la figure sphérique, le canal aboutissant au pôle perd moins de son poids que celui qui aboutit à l'équateur; d'où il suit que la hauteur du fluide doit augmenter continuellement dans ce dernier canal; ce qui augmentant de plus en plus l'inégalité des poids, le fluide toujours moins allongé s'applatira enfin, & s'applatira à l'infini. Pour finir sur cet article, ajoutons que s'il arrivoit par hasard que le fluide s'élevât sous les pôles plus qu'il ne convient à l'équilibre, je pense que l'inégalité des poids devroit augmenter pareillement, & que le fluide s'éloigneroit toujours plus de l'équilibre.

Moyen de trouver l'équilibre: qu'il se perd par le plus léger mouvement.

213. On verroit arriver pour lors la même chose que dans

Qu'on trouve ici la même chose qu'au passage de *non-cohésion.*

ma théorie de physique générale sur les points indivisibles qui, à certaines distances se repoussent, à d'autres distances s'attirent mutuellement, suivant une certaine loi. Dans la supposition que les distances aillent toujours en augmentant, les points peuvent passer de la force répulsive à l'attractive, ou de l'attractive à la répulsive. J'appelle le premier passage *de cohésion*, & le second *de non-cohésion*. Quant au passage de la premiere espece, du moment qu'il s'y trouve deux points réunis, il les conserve si bien, que si on les en chasse de force, ils s'y rétablissent d'eux-mêmes. Pour celui de la seconde espece, il conservera ses points, tandis qu'on les laissera à leur place; mais pour peu qu'on les en fasse sortir, ils s'en écarteront d'eux-mêmes de plus en plus. Il en est de même ici : le fluide conserve l'équilibre que lui a donné la valeur positive de la formule; & si on l'en écarte, il y revient de lui-même. Quant à l'équilibre exprimé par une valeur négative, il se perd par le plus léger mouvement; dès qu'il est perdu il ne peut être recouvré par le fluide, il s'en éloigne même à l'infini. Concluons que cette derniere sorte d'équilibre ne paroît nullement propre à déterminer la figure de la Terre, dans l'hypothese de son mouvement diurne, ou dans celle du flux & du reflux de la mer.

Théorie de M *Clairaut* sur le noyau elliptique.

214. C'est pourquoi si la Terre en tournant sur son axe, étoit un sphéroïde allongé, il vaudroit mieux se servir de la théorie de M. *Clairaut*, dans laquelle on suppose un noyau allongé & recouvert d'un fluide qui s'allonge lui-même ensuite, mais moins que le noyau; quoique M. d'*Alembert* paroisse avoir eu en vue cet endroit de M. *Clairaut*, lorsqu'après avoir déterminé l'allongement du fluide mis en équilibre sur un noyau sphérique de moindre densité, il conclut qu'on peut par ce moyen trouver cet allongement, même hors de l'hypothese d'un noyau solide allongé : car M. *Clairaut* avoit donné une formule générale pour la figure d'un fluide qui couvre un noyau elliptique; formule qui dans le cas d'un noyau sphérique & d'une petite hauteur du fluide, se réduit à celle de M. d'*Alembert* & à la mienne, laquelle, dans la supposition que le rapport de la densité du noyau à celle du fluide soit moindre que celui de 3 à 5, donne une valeur négative,

négative, d'où l'on conclut l'allongement de la figure (1).

215. M. *Clairaut*, dans son Livre *sur la figure de la Terre*, imprimé en 1743, propose au paragraphe 31 de la seconde partie, une formule générale pour l'ellipticité d'un fluide — Formule de M. *Clairaut*.

(1) M. d'*Alembert* faisant allusion à ce passage dans le premier volume de ses opuscules, page 246, opuscule VIII, n°. 1, s'exprime ainsi : » J'ai dit dans mes recherches sur la cause générale des vents, article 31, » page 42, que si la Terre eût été un sphéroïde allongé, il n'eût pas été » nécessaire d'avoir recours, pour expliquer ce phénomene, comme l'ont » fait quelques Auteurs, à un noyau allongé, & qu'il auroit pu se faire » qu'avec un noyau intérieur applati, la Terre eût été allongée vers les » pôles. Cette vérité est une suite nécessaire & immédiate des formules » que j'ai données au même endroit que je viens de citer. Cependant un » Géometre Italien, qui a du nom dans les mathématiques, l'a attaqué » par cette considération, que si le noyau intérieur étoit applati, & qu'on » dérangeât le fluide extérieur de son état d'équilibre, il n'y reviendroit » jamais, au lieu qu'il y reviendroit de lui-même si le noyau intérieur » étoit allongé ; d'où il conclut que cette derniere hypothese est la seule » propre à rendre raison de l'équilibre.

» Je pourrois d'abord répondre que dans toutes les recherches qu'on » a faites jusqu'ici sur *la figure de la Terre*, il n'a jamais été question que » de l'état d'équilibre, & que jusqu'à ce Géometre on n'avoit encore pensé » à y ajouter cette condition, que le fluide dérangé de cet état se rétablît » de lui-même : ainsi en partant de la maniere ordinaire d'envisager cette » question, je ne devois point, ou du moins je n'étois pas obligé à faire » entrer cette considération nouvelle dans mon calcul. Cependant à l'e- » xemple du Géometre dont je viens de parler, je vais y avoir égard, & » je prouverai qu'il n'est pas nécessaire dans cette hypothese même que le » sphéroïde intérieur soit allongé pour que la Terre le soit.

Pour remplir cet engagement, M. d'*Alembert* démontre que quelque puisse être la figure du noyau, la figure requise pour l'équilibre se rétablira ou ne se rétablira pas, suivant que le rapport de la densité du noyau à la densité du fluide qui le couvre sera plus grande ou moindre que $\frac{3}{5}$. Et après l'avoir démontré, il ajoute : » Ce n'est donc point la figure du » noyau intérieur, comme le Mathématicien dont nous avons parlé, » semble l'avoir cru, qui empêche que l'équilibre troublé ne se rétablisse, » ou qui contribue à le rétablir : c'est le rapport de la densité du fluide » extérieur à la densité du noyau.

Nous observerons ici en premier lieu que notre Auteur est Dalmate & de Raguse, non Italien : & c'est pour cela que M. *Mazucheli*, dans un ouvrage récent sur les Auteurs Italiens, n'en fait aucune mention. Cependant

qui couvre un n
homogêne, mai
demi-diametre
du noyau $= a$,
diametre de l'é

---

vû le long séjour
en quelque sort
a du nom dans
parle du P. *Bos*
il jouit; mais
rieurs de son
suffi pour le
que le R. P
pagnie com
premier mé
ment quest
M. d'*Al*
fuit nécef
touchant
il affirm
allongée
Afin qu
exposer
M.
Terre
y avoi
densi
appl
le ra
de
pôl
no
sa
ri
s'
(

diametre de l'équateur $= a$, la densité du fluide $= 1$, celle du noyau $= 1 + f$, le rapport de la force centrifuge à la gravité sous l'équateur $= \varphi$; & sa formule générale pour l'ellipticité est $\frac{6a^5fa+5a^3f\varphi+5\varphi}{10a^3f+4}$.

---

cas on auroit à la vérité l'équilibre, mais un équilibre tel qu'étant dérangé par un petit changement dans la figure, la figure même ne seroit point rétablie, mais que le fluide s'en écarteroit de lui-même toujours de plus en plus, au point de la changer totalement. De là il a conclu que cette sorte d'équilibre n'étoit point propre à expliquer la figure allongée de la Terre, supposé que la Terre fût en effet allongée : & il l'a conclu avec beaucoup de raison, car la Terre doit être stable au point que si une cause extérieure y occasionne quelque léger changement, sa figure se rétablisse d'elle-même; sans quoi le moindre vent suffiroit pour la détruire.

Voilà pour ce qui concerne le premier chef. Il s'ensuit à la vérité de la formule de M. d'*Alembert*, que dans le cas en question il y a équilibre; & notre Auteur, loin d'en disconvenir, le confirme positivement au moyen d'une formule toute semblable qu'il a trouvée par une méthode très différente & beaucoup plus simple : mais ce dont il ne peut convenir avec M. d'*Alembert*; ce qui ne suit nullement de cette formule, & ce qui n'est rien moins qu'une vérité, comme le prouve manifestement la raison que le P. *Boscovich* en apporte, c'est que cet équilibre soit propre à expliquer la figure de la Terre, ce que M. d'*Alembert* avoit affirmé. Ainsi notre Auteur ne combat point ce qui suit nécessairement d'une formule démontrée : il ne conclut point ce que M. d'*Alembert* lui impute, que l'hypothese d'un noyau allongé soit la seule propre à donner un équilibre quelconque, mais seulement l'équilibre requis pour la figure de la Terre.

Quant à ce que M. d'*Alembert* ajoute, que de tous ceux qui ont traité de la figure de la Terre, il ne s'en est trouvé aucun avant notre Auteur qui ait pensé à ajouter une pareille condition; on peut répondre en premier lieu que c'est une chose qui fait honneur au P. *Boscovich* d'avoir été le premier à imaginer une condition qui est absolument nécessaire dans la matiere présente. Tous auroient du l'ajouter comme lui pour résoudre le problême en question. Car pour déterminer la figure de la Terre, il faut lui supposer une figure stable & permanente, & non une figure qui puisse être détruite par le moindre souffle d'air. En second lieu, on pourroit dire que si les Auteurs qui ont écrit avant le P. *Boscovich* n'ont pas eu la pensée de tenir compte de cette condition, & que s'ils se sont contentés de celles qui faisoient naître l'équilibre, c'est que nous n'avons sous les yeux d'autre espece d'équilibre que celui qui étant dérangé par

celle de M. *d'Alembert* & à celle de l'Auteur.

terme du numérateur s'évanouit. Si le fluide a peu de hauteur, on suppose $a=1$, & la formule devient $\frac{5f\varphi+5\varphi}{10f+4}$. Substituez dans cette formule les valeurs correspondantes dans la formule de M. d'*Alembert*, savoir $\frac{\varphi}{p}$ pour φ, $\frac{\Delta}{\delta}$ pour $\frac{1+f}{1}$, ou $\frac{\Delta}{\delta}-1$ pour f, & r pour 1; le numérateur deviendra $\frac{\varphi r}{p}\left(\frac{5\Delta}{\delta}-5+5\right)=\frac{\varphi r}{p}\times\frac{5\Delta}{\delta}$, & le dénominateur $\frac{10\Delta}{\delta}-6$. On aura donc la formule $\frac{\varphi r}{p}\times\frac{5\Delta}{10\Delta-6\delta}=\frac{\varphi r}{p}\times\frac{1}{2-\frac{6\delta}{5\Delta}}$

---

quelque cause extérieure, se rétablit de lui-même, comme on le voit dans une balance; & que cette autre sorte d'équilibre, où la figure ne se rétablit point, ne se présente pas si aisément à l'esprit. Notre Auteur l'avoit trouvé en traitant de sa théorie des forces. On voit dans cette théorie que les distances allant toujours en augmentant, si l'on passe de la force répulsive à l'attractive, on a l'équilibre du premier genre, & que si on passe au contraire de l'attractive à la répulsive, on a celui du second. C'est à dire que si deux points qui se trouvent dans l'équilibre du premier genre, en sont écartés par quelque force extérieure, ils y reviennent d'eux-mêmes; au lieu que dans le second genre d'équilibre, s'ils viennent à perdre leur position, ils s'en écartent d'eux mêmes de plus en plus. Voilà probablement (& l'Auteur semble lui-même le faire entendre au n°. précédent) ce qui a suggéré au P. *Boscovich* l'idée d'ajouter cette condition à l'équilibre simplement dit, afin de le rendre par-là même un équilibre du premier genre, qui étant troublé se rétablit, loin de se déranger de plus en plus. Mais de ce que le P. *Boscovich* a été le premier à imaginer une pareille condition; il ne s'ensuit nullement que cette condition ne soit pas nécessaire, ni qu'on puisse sans elle trouver ce qui est requis par la figure de la Terre.

Enfin quant à ce que M. d'*Alembert* ajoute, que le rétablissement de la figure dépend de ce rapport des forces & non de la figure allongée du noyau; il est vrai que la figure se rétablit si ce rapport de densité est plus grand que $\frac{3}{5}$; au lieu que s'il est plus petit, elle ne se rétablit point, quelque soit la figure du noyau; mais il est également constant par cette formule même, que le rapport de l'axe au diametre de l'équateur est dans le premier cas moindre dans le fluide que dans le noyau,

$= \frac{[illegible]}{2p\left(1-\frac{3\delta}{5\Delta}\right)}$, qui est entierement conforme à celle de M. d'*Alembert* & la mienne.

217. L'hypothese d'un noyau elliptique sert à concilier la rotation, non seulement avec l'allongement de la figure, mais encore avec un applatissement quelconque, & une différence absolue quelconque de gravité pour des latitudes différentes. C'est ce qu'il faudroit développer maintenant, & de la maniere que je me suis proposée d'abord, c'est-à-dire en n'y employant que la simple Géométrie. Mais comme un noyau sphérique peut aussi se concilier avec l'allongement du pendule, ainsi que nous le verrons bientôt, & qu'on connoît par la comparaison des dégrés que le globe terrestre n'est point elliptique, ni d'une figure entierement réguliere : je n'entrerai point ici dans cette discussion, & je me bornerai à traiter de

On se borne ici à traiter de la gravité, & pourquoi. Pl. IV. fig. 21.

& que dans le second cas il sera plus grand : d'où il s'ensuit que si le noyau est sphérique, & à plus forte raison s'il est applati, on ne peut, avec un mouvement de rotation joint à l'allongement du fluide, trouver l'équibre, à moins que ce rapport ne soit moindre que $\frac{3}{5}$. Ainsi par-là même que dans ce rapport on a l'équilibre, non du premier, mais du second genre, on ne peut avoir un équilibre qui se concilie avec le rétablissement de la figure, à moins que le noyau ne soit allongé. Notre Auteur ne dit nulle part que le rétablissement de la figure dépende immédiatement de la figure de ce noyau, non de ce rapport. Il dit que ce rétablissement, dans le cas dont il s'agit, est aussi lié avec l'allongement du noyau ; ce qui est constant : car sans l'allongement du noyau, le fluide allongé ne sera point en équilibre, à moins que le rapport des densités ne soit moindre que $\frac{3}{5}$: or ce rapport ne donne qu'un équilibre, ou la figure ne se rétablit point. Donc sans l'allongement du noyau on ne peut avoir cet équilibre qui est joint au rétablissement de la figure. Le rétablissement de la figure dépend à la vérité de ce rapport ; mais ce rapport est lié avec l'allongement du noyau dans le cas où la figure du fluide doit être allongée. Ainsi notre Auteur n'affirme ni ne suppose rien ici que de très vrai ; & tout ce que M. d'*Alembert* a trouvé après la recherche qu'il a dit vouloir faire à son exemple, ne prouve point ce qu'il s'étoit engagé de prouver, à savoir qu'*il n'est pas nécessaire dans cette hypothese même que le sphéroïde intérieur soit allongé pour que la Terre le soit.*

la gravité ſuivant les hypotheſes expliquées ci-deſſus. Si le fluide eſt homogêne au noyau, l'augmentation de la gravité depuis l'équateur juſqu'au pôle, ſera par le n. 174 en raiſon doublée du ſinus de la latitude, & la même choſe arrivera dans le cas d'hétérogénéité. Car il eſt démontré en général que ſi une grandeur quelconque D augmente ou diminue d'une petite quantité; celle dont augmentera ou diminuera la puiſſance D^m ſera exprimée par la puiſſance mD^{m-1} multipliée par cette petite quantité. D'où il ſuit que D étant à peu près conſtant, le changement de cette puiſſance ſera dans la même raiſon que celui de la quantité ſimple. Or dans la ſeconde hypotheſe qui demande une ellipſe parfaite, le total de la gravité à la ſuperficie, par le n. 134, eſt en raiſon de la normale, ou de la perpendiculaire à la ſurface terminée par l'axe, ou en raiſon inverſe de la perpendiculaire abaiſſée du centre ſur la tangente, c'eſt-à-dire à peu près en raiſon inverſe de la diſtance. De plus, il n'y a que la peſanteur ſur la maſſe placée au centre, qui dans cette hypotheſe ſoit en raiſon directe de la diſtance: celle qui prend ſa place, lorſqu'on paſſe de la ſeconde hypotheſe à la premiere, eſt en raiſon inverſe du quarré de la diſtance. Ainſi la différence de ces forces eſt dans la même raiſon que la différence des diſtances, c'eſt-à-dire en raiſon doublée du ſinus de la latitude. On a donc ce rapport dans la premiere hypotheſe auſſi bien que dans la ſeconde. A l'égard des petites quantités ſurajoutées AM, Tt, elles ne peuvent apporter ici aucune différence ſenſible, & on peut les négliger.

Formule pour la différence de gravité.

218. La différence des deux cas d'homogénéité & d'hétérogénéité, conſiſte dans la différence abſolue de la gravité ſous l'équateur à la gravité ſous les pôles. La gravité primitive ſous l'équateur, ſuivant le n. 155, eſt à ſa différence par défaut à la gravité ſous le pôle d'un ſphéroïde applati & homogêne, comme CA, ou ce qui en approche beaucoup, comme CE eſt à $\frac{1}{5}$ AE. Soit donc CE $= r$, AE $= x$, la gravité abſolue ſous l'équateur $= m$, la force centrifuge $= n$; la différence des gravités ſous l'équateur, & le pôle ſera $\frac{mx}{5r} + n$. Or par le n. 158, $x = \frac{5nr}{4m}$. Donc cette différence

est $\frac{1}{4}n + n = \frac{5}{4}n$. Soit encore le ſinus de la latitude $= s$, & le rayon $= 1$; l'excès de la gravité ſur celle de l'équateur ſera par-tout en raiſon du quarré de ce ſinus. Donc dans cette hypotheſe d'homogénéité, la différence de la gravité à celle de l'équateur ſera par-rout $\frac{5}{4}ns^2$.

219. Si les couches ſont hétérogênes entre elles, & que la maſſe du centre agiſſe dans la ſeconde hypotheſe en raiſon directe des diſtances; ſoit la denſité de la maſſe du centre à celle du reſte de la maſſe en raiſon de q à t, & $t + q = p$, comme ci-deſſus (1); on aura par le n. 199 l'analogie ſuivante: *Pour la ſeconde hypotheſe.*

r eſt à $\frac{tx}{5p} - \frac{qx}{p} + \frac{nr}{m}$, ou ſubſtituant pout q ſa valeur $p - t$, r eſt à $\frac{tx}{5p} - x + \frac{tx}{p} + \frac{nr}{m}$, comme la gravité m eſt à la différence de la gravité, qui ſera $\frac{6mtx}{5pr} - \frac{mx}{r} + n$. Or par le n. 199, $x = \frac{nr}{2m\left(1 - \frac{3t}{5p}\right)}$. Donc par la ſubſtitution de cette valeur de x, la différence de la gravité ſera $\frac{3tn}{5p\left(1 - \frac{3t}{5p}\right)} - \frac{n}{2\left(1 - \frac{3t}{5p}\right)} + n$, ou bien $\frac{6tn}{10p - 6t} - \frac{5pn}{10p - 6t} + \frac{10pn - 6tn}{10p - 6t} = \frac{5np}{10p - 6t} = \frac{n}{2\left(1 - \frac{3t}{5p}\right)}$, dans laquelle le rapport de t à p eſt celui de la denſité de nos mers à la moyenne denſité de la Terre.

220. Mais dans la premiere hypotheſe, où la maſſe du centre agit en raiſon inverſe des quarrés des diſtances, la différence des gravités ſera plus conſidérable. Car des trois différences de forces que nous venons de prendre du n. 199 pour former la premiere analogie, la premiere différence $\frac{tx}{5p}$, qui agit ſur le ſphéroïde homogêne, & la troiſieme, qui eſt celle de la force centrifuge, demeurent abſolument les mêmes lorſqu'on *Pour la premiere hypotheſe. Pl. IV. fig. 11.*

(1) N°. 196.

passe de la seconde hypothese à la premiere; mais la seconde, savoir $\frac{-qx}{p}$, qui a rapport à la masse du centre, & qui est exprimée dans la figure 21 par la petite ligne HI, se change en $\frac{2qx}{p}$ exprimée dans la même figure par la petite ligne HL double de HI, & prise de l'autre côté du point H. Donc pour avoir une formule de différence de gravité pour la premiere hypothese, il n'y aura d'autre changement à faire à la formule précédente $\frac{5pn}{10p-6t}$, que d'en retrancher $-\frac{mqx}{rp}$, & d'y ajouter $\frac{2mqx}{rp}$, ou ce qui est le même, d'y ajouter $\frac{3mqx}{rp}$. Or $\frac{5np}{10p-6t} = \frac{5n}{2} \times \frac{p}{5p-3t}$, & parceque $x = \frac{nr}{2m\left(1-\frac{3t}{5p}\right)} = \frac{5pnr}{2m(5p-3t)}$, on aura $\frac{3mqx}{rp} = \frac{3q}{p} \times \frac{5pn}{2(5p-3t)} = \frac{5n}{2} \times \frac{3q}{5p-3t} = \frac{5n}{2} \times \frac{3p-3t}{5p-3t}$. Cette formule sera donc $\frac{5n}{2} \times \frac{4p-3t}{5p-3t}$.

Théorèmes remarquables tirés de cette formule.

221. Ceci nous conduit à un très beau théorème que M. *Clairaut* a trouvé par une méthode fort différente de la nôtre, & qui fait voir l'admirable liaison de mes deux hypotheses, lesquelles se ressemblent pour la figure qu'elles donnent, mais qui pour la différence absolue de la gravité sont elles-mêmes fort différentes. Prenez le rapport de la différence trouvée à la gravité totale m, lequel sera $\frac{5n}{2m} \times \frac{4p-3t}{5p-3t}$; ajoutez-y l'ellipticité $\frac{x}{r}$, ou bien $\frac{5pn}{2m(5p-3t)} = \frac{5n}{2m} \times \frac{p}{5p-3t}$, pour avoir $\frac{5n}{2m} \times \frac{5p-3t}{5p-3t} = \frac{5n}{2m}$. Nous avons vu que l'ellipticité pour le cas d'homogénéité est $\frac{5n}{4m}$. Donc le double de l'ellipticité dans le cas d'homogénéité est égal à une fraction qui exprime le rapport de la différence des gravités sous l'équateur & le pôle à la gravité totale, plus l'ellipticité qu'auroit la Terre si elle étoit homogêne à égales distances du centre; & l'on aura cette derniere ellipticité en ôtant ce rapport du double de

l'ellipticité

l'ellipticité pour le cas d'homogénéité, c'est à-dire de $\frac{1}{115}$. Car cette ellipticité, comme nous l'avons vu (n. 159), est $\frac{1}{230}$ du demi-axe; & le double de $\frac{1}{230}$ est $\frac{1}{115}$.

Autre Théorème qu'on en déduit.

222. Or dans ma premiere hypothese, l'ellipticité n'est autre chose que cette différence même des gravités, divisée par la gravité totale, puisque par le n. 121, les forces totales aux extrémités des demi-axes, sont en raison inverse des demi-axes, quoique les densités nous fournissent une autre expression de cette différence de gravité. D'où il suit que si on appelle ellipticité de la seconde hypothese, celle qu'on tire de la différence des gravités déterminée par les observations; & ellipticité de la premiere hypothese, cette premiere ellipticité qui répond à un noyau également dense à égales distances du centre; on aura ce beau théorème: *l'ellipticité, dans le cas d'homogénéité, est moyenne proportionnelle arithmétique entre les ellipticités de ces deux hypotheses.*

Usage des observations du pendule.

223. On sait de plus que les observations du pendule, faites en divers lieux, peuvent servir à déterminer la figure de la Terre, & à connoître la nature de la gravité primitive, supposé que la Terre soit homogêne à égales distances du centre. Car c'est un principe reconnu, que la longueur des pendules isochrones est en raison de la gravité. Donc si les allongemens du pendule depuis l'équateur jusqu'au pôle, ne sont pas dans la même raison que les quarrés des sinus de la latitude; ou l'hypothese de gravité établie par *Newton* manque de justesse, ou la Terre n'est pas homogêne, & dans ce cas les couches concentriques ne sont point homogênes, la gravité ne se dirige point à un centre donné, de telle sorte qu'elle soit constante, ou en raison de la distance au centre; car dans ces hypotheses, le pendule isochrone doit s'allonger constamment suivant ce rapport.

On en tire l'ellipticité.

224. Si la longueur du pendule augmente dans cette proportion, & que les couches concentriques soient homogênes & pesent dans le sens de *Newton*, on pourra avec deux observations du pendule, faites l'une sous l'équateur, l'autre dans un lieu considérablement moins éloigné du pôle, déterminer par la méthode exposée (n. 220) l'ellipticité de la Terre. Car on a cette analogie: comme le quarré du sinus de la latitude du

lieu est au quarré du rayon, ou bien comme la moitié du sinus verse d'une latitude double est au rayon, ainsi la différence de la longueur du pendule au lieu donné, & de sa longueur sous l'équateur, est à un quatrieme terme qui sera la différence de la longueur du pendule sous le pôle; puisque le rayon est le sinus de la latitude de 90°, & le diametre le sinus verse d'une latitude double. Divisez cette différence par toute la longueur du pendule, pour avoir l'ellipticité dans la seconde hypothese. Retranchez cette ellipticité de $\frac{1}{115}$, & vous aurez l'ellipticité cherchée pour le cas d'une Terre homogêne à égales distances du centre, & assujettie à la gravité newtonienne.

Formule pour le rapport de la densité.

225. On peut encore, par les observations de la longueur du pendule, déterminer le rapport des densités en se servant de la formule $\frac{5n}{2m} \times \frac{4p-3t}{5p-3t}$, qui exprime la différence de la gravité sous l'équateur & le pôle. Soit h la différence trouvée dans la longueur du pendule pour les deux lieux en question, & l toute la longueur du pendule; on aura $\frac{5n}{2m} \times \frac{4p-3t}{5p-3t} = \frac{h}{l}$. Donc $\frac{4p-3t}{5p-3t} = \frac{2mh}{5nl}$, ou $20npl - 15ntl = 10mph - 6mth$, ou $20npl - 10mph = 15ntl - 6mth$. D'où l'on tire la formule $\frac{t}{p} = \frac{20nl-10mh}{15nl-6mh}$, qui se réduit à l'unité, & fait voir que la densité du fluide est égale à celle du noyau, lorsqu'on a $20nl - 10mh = 15nl - 6mh$, ou $5nl = 4mh$, ou $\frac{h}{l} = \frac{5n}{4m}$, qui dans ce cas représente l'ellipticité & le rapport de la différence des gravités à la gravité.

Comparaison de la gravité à l'ellipticité.

226. Il ne sera pas plus difficile d'en conclure, pour le cas d'un léger applatissement, que si les gravités au pôle & à l'équateur different plus que de $\frac{1}{230}$ (différence requise pour l'homogénéité), la densité sera plus grande vers le centre dans la premiere hypothese, & l'ellipticité plus petite. Car dans la formule $\frac{5n}{2m} \times \frac{4p-3t}{5p-3t}$, le terme $5p$ surpassera de beaucoup

$3t$; d'où il suit que $4p-3t$ sera une quantité positive. A mesure que p augmentera, le numérateur & le dénominateur iront toujours en croissant; mais parcequ'on retranche toujours de l'un & de l'autre la même quantité $3t$, le rapport du premier au second augmentera toujours, & par conséquent aussi le rapport de la différence de la gravité à la gravité totale, exprimé par cette formule, laquelle étant soustraite de $\frac{1}{115}$, l'ellipticité ira en diminuant.

227. Si l'allongement du pendule depuis l'équateur jusqu'au pôle ne suit pas la raison doublée des sinus de la latitude, mais un autre rapport quelconque, on pourra trouver une hypothese de gravité dirigée au centre, qui s'accorde avec cette nouvelle proportion; & on la trouvera fort aisément dans la figure 2, si la force centrifuge est assez peu considérable par rapport à la gravité sous l'équateur, dans le sens que je l'ai expliqué (n. 73). Car ayant formé un angle quelconque FRB & coupé FK de telle grandeur qu'on ait FK : FC :: $\frac{1}{2}$ Fr : FV: ensuite ayant mené Ks parallele à FV, qui rencontrera Cr au point s, il suffira de prendre sQ telle qu'elle ait à RV le même rapport que la longueur du pendule, ou la gravité sous l'équateur à la longueur du pendule, ou à la gravité dans une latitude mesurée par un angle très approchant de celui de FRB. Car la courbe qui passera par tous les points Q déterminera l'hypothese de gravité qui répond à la nouvelle proportion. On trouvera encore ici que l'applatissement est au demi-diametre de l'équateur, comme la moitié de la force centrifuge sous l'équateur est à la gravité; & la diminution de la distance sera à très peu près en raison doublée du sinus de la latitude.

Hypothese pour un allongement irrégulier du pendule.
Pl. IV. fig. 2.

228. Or dans tous ces cas, & la gravité primitive & la gravité absolue devront être les mêmes dans des latitudes égales, quelque différence qu'il y ait dans les longitudes. Car la figure du fluide doit être un sphéroïde engendré par la révolution d'une courbe autour de son axe; tous les cercles décrits par chaque point de cette courbe seront exactement paralleles entre eux; & la gravité dans chaque parallele constamment la même. Mais s'il arrive qu'à différentes longitudes, quoique dans la même latitude, la gravité soit différente, pour lors

Pour la différence de la gravité dans la même latitude.

il ne pourra abſolument ſe faire que la gravité primitive ſoit dirigée à un centre unique; mais il y aura ſouvent moyen de concilier cette inégalité avec l'équilibre dans l'hypotheſe de la gravitation générale, pourvu que la différence de denſité ſuive celle de la gravité; c'eſt-à-dire ſi la denſité change, même à égales diſtances du centre, dans un rapport conſtant ou totalement irrégulier, ſelon que la gravité changera dans un rapport conſtant ou totalement irrégulier, à différentes longitudes ou latitudes.

On ſe borne à traiter quelques articles.

229. Si l'on fait varier conſidérablement la denſité, quoiqu'à égales diſtances du centre, & qu'on lui faſſe ſuivre certain rapport, ou qu'on donne certaine figure au noyau, on aura autant de différentes figures de la Terre, autant de variations différentes de la gravité; mais le détail en ſeroit trop long, & d'ailleurs ces hypotheſes arbitraires n'auroient aucune application. Je ne m'arrêterai donc point à tout cela, & je me contenterai d'ajouter ici quelques articles qui ont rapport à des inégalités de denſité & à des irrégularités de figure, qui très probablement exiſtent dans la nature; articles qui ſerviront à éclaircir ce qui nous reſte à dire dans ce chapitre, & dont nous ferons encore uſage dans le chapitre ſuivant.

Action d'un globe ſur le fil à plomb, & différence de gravité. Pl. IV. fig. 22.

230. Soit (fig. 22) une Terre BAD de figure ſphérique & homogêne à égales diſtances du centre. Repréſentons-nous à ſa ſuperficie un globe E, dont le demi-diametre ſoit de mille pas géographiques, ou la ſoixantieme partie d'un dégré moyen d'un grand cercle. Le poids ſuſpendu en F ſeroit dirigé par FG au centre C de la Terre, s'il n'étoit attiré par ce globe. Mais la force attractive du globe détournera ſa direction en FI, de telle ſorte qu'ayant abaiſſé ſur FC la perpendiculaire IG, IG ſoit à FG comme la gravitation du poids ſur le globe à ſa gravitation ſur la Terre. Or ſuivant ce qui a été démontré par *Newton*, ce rapport eſt le même que celui du demi-diametre du globe au demi-diametre de la Terre. On peut donc de ceci déduire deux choſes, premierement l'angle IFG de la déviation du pendule, en ſecond lieu, l'augmentation de la gravité FI ſur FG.

231. A l'égard du premier article, on aura cette proportion: comme le demi-diametre de la Terre, qui eſt à peu

près de 3438 milles géographiques, est au demi-diametre du globe E, qui est de 1 mille, ainsi FG est à GI; ou bien, ainsi le rayon 100000 est à la tangente de l'angle cherché GFI, qu'on trouvera égale au nombre 29, lequel répond à la tangente d'une minute. Ainsi le pendule sera détourné par cette masse, & l'angle de sa déviation sera d'une minute. Mais un globe plus grand ou plus petit, plus ou moins dense, pourvu toutefois qu'il soit toujours très petit en comparaison de la masse de la Terre, afin que la déviation soit elle-même très petite & proportionnelle à sa tangente; ce globe, dis-je, détournera plus ou moins le pendule, suivant le rapport de l'augmentation ou de la diminution de son diametre ou de sa densité, & moins à une plus grande distance du petit globe, en raison inverse du quarré de la distance à son centre.

Calcul pour la déviation du fil à plomb.

232. Pour ce qui est de l'augmentation de la gravité, elle est à la gravité totale, comme la différence de FG & FI est à FG. Cette différence, suivant ce qui a été démontré dans le quatrieme Livre (n. 349), est à peu près la troisieme proportionnelle au double de FG & à GI. Elle sera donc $\frac{29 \times 29}{200000} = \frac{841}{200000}$, moindre que $\frac{1}{200}$. Donc le rapport de la gravité totale à l'accroissement de la gravité sera plus grand que celui de 100000 à $\frac{1}{200}$, ou de 20000000 à 1; par où l'on voit que cet accroissement est insensible.

L'augmentation de la gravité n'est pas sensible.

233. Mais si ce globe étoit sous le point G & sur la ligne FC, ensorte que se trouvant placé au-dessous de la superficie, il augmentât d'autant plus la densité dans l'espace qu'il occuperoit, en ce cas la déviation du pendule seroit nulle, & l'augmentation de la gravité seroit à la gravité totale, comme 1 à 3438. Cette augmentation dans un pendule à secondes n'est point à négliger. Car suivant le n. 68, la longueur du pendule sous l'équateur, où elle est moindre qu'en aucun autre endroit, est presque de 440 lignes. D'où il suit que le pendule se trouveroit trop court de plus de $\frac{1}{8}$ de ligne, & que s'il y avoit au-dessous de la surface une masse huit fois plus dense, ou d'un demi-diametre huit fois plus grand, le pendule seroit trop court d'une ligne entiere.

Cas où le globe est au-dessous du fil à plomb.

Autres positions & distances diverses du globe.

234. Si le globe parcourt un quart-de-cercle de A en E, sa déviation ira toujours en augmentant, & le raccourcissement du pendule en diminuant; & il produira ces deux effets à une petite distance du pendule. Car si ce pendule n'étoit éloigné du globe que de dix milles, il devroit encore en éprouver un effet cent fois moindre. Il est de plus évident que si ce globe est placé au-dessous & fort près de la surface, & que le pendule ne soit point directement au-dessus de lui, mais à côté, la gravité augmentera à peine de quelque chose, mais que la déviation du pendule sera encore fort considérable; & que le même effet sera produit par une cavité qui se trouvera proche la surface de la Terre, & du côté opposé, puisque la matiere manquera de ce côté-là, & que de ce même côté la gravité sera moindre qu'elle ne seroit sans cette cavité. Si le globe est enfoncé beaucoup plus avant dans la Terre, il attirera beaucoup moins de côté le poids placé en F; par conséquent il augmentera plus la gravité qu'il n'en détournera la direction. Mais pour produire le même effet, il lui faudra un diametre, ou une densité plus grande en raison doublée de la nouvelle distance du centre, puisque la pesanteur de chaque partie décroît en raison inverse du quarré de la distance.

Accroissement de la gravité comparé à la déviation du pendule.

235. On voit encore que l'accroissement de la gravité, lequel augmente la longueur du pendule à secondes, devra, dans la situation qui lui est la plus favorable, causer beaucoup moins de dérangement dans la suite des longueurs du pendule, que n'en cause dans la suite des dégrés la déviation d'un pendule immobile, dans la situation la plus favorable à la déviation. Car cette masse qui, comme nous venons de le voir, augmenteroit la longueur du pendule de $\frac{1}{8}$ de ligne, ce qui ne revient pas à $\frac{1}{3500}$ du tout, le pendule ayant près de 439 lignes, cette masse, dis-je, produit une déviation d'une minute, qui fait la soixantieme partie d'un dégré; d'où il suit que si on ne mesure qu'un dégré à la fois, l'erreur est de $\frac{1}{60}$ de dégré, c'est-à-dire de près de 950 toises; erreur qui surpasse de beaucoup la différence qu'on a trouvée entre les dégrés du méridien sous l'équateur & le cercle polaire. Que si l'on en mesure trois à la fois, l'erreur est encore de $\frac{1}{180}$ de dégré,

ou de plus de 310 toises, erreur encore excessive.

236. Il est visible (& ceci mérite aussi d'être bien remarqué) que tous ces inconvéniens sont beaucoup moindres; si la Terre est beaucoup plus dense vers le centre que proche la superficie; mais qu'ils sont aussi beaucoup plus grands si elle l'est moins; & plus encore si son noyau est vuide. Si les endroits voisins de la surface sont plus denses vers le pôle que sous l'équateur, il suit de ce que nous venons de démontrer, que cela doit encore diminuer la gravité sous l'équateur; & une densité deux fois plus grande sous les pôles, & de 8 milles de profondeur, produiroit seule dans la longueur du pendule à secondes une différence d'une ligne. Effet de la différence de densité.

237. *Newton* a cru que la densité devoit plutôt prévaloir sous l'équateur, à cause que la Terre y est desséchée par les ardeurs du soleil. Je pense au contraire que le froid & la chaleur doivent produire dans la Terre le même effet qu'ils produisent dans tant d'autres corps que la chaleur dilate & que le froid condense; & que par cette raison même la densité doit plutôt être moindre sous l'équateur que vers les pôles. Mais la chaleur & le froid extérieurs ne pénetrent pas assez avant dans la Terre pour pouvoir produire de part ni d'autre un effet sensible. Densité au pôle & à l'équateur;

238. Une observation qui semble marquer un excès de densité dans les parties internes de la Terre, c'est celle de MM. *de la Condamine* & *Bouguer*, par laquelle ils ont trouvé de 7 secondes l'effet de l'attraction d'une grande montagne d'Amérique sur le fil à plomb; déviation peu considérable, & qui dans un quart-de-cercle aussi petit que le leur, étoit à peine sensible; mais qui auroit dû être bien plus grande, eu égard à la grosseur de la montagne, si la densité de sa masse eût égalé la moyenne densité de la Terre. Mais les montagnes se forment, je pense, pour la plupart par l'effet d'une chaleur interne qui souleve les couches de la Terre les plus proches de la surface; & s'il en est ainsi, cette élévation n'ajoute aucune nouvelle matiere, & le vuide renfermé dans l'intérieur de la montagne compense la masse qui le couvre. Dans l'intérieur de la Terre.

239. Je croirois volontiers que la déviation du pendule pourroit être beaucoup plus considérable sur un terrein qui

Effet d'une couche de terre d'une certaine grandeur.

va toujours en s'élevant dans une grande étendue de pays, (tel que l'Italie qui s'éleve continuellement d'une mer à l'autre, de la mer de Toſcane à la mer Adriatique), qu'auprès d'une montagne qui s'éleve en forme de cône. Il arrivera même dans le premier cas qu'une hauteur beaucoup moindre ſera plus que ſuffiſante pour produire un grand effet. Dans une Diſſertation que je publiai en 1742 ſur les obſervations aſtronomiques, je propoſe au n. 21 un problême où il eſt queſtion de trouver l'attraction qu'éprouve un corpuſcule placé au centre d'une ſphere, d'une couche de cette ſphere, terminée par ſa ſurface & par trois plans, dont les deux premiers, l'un vertical, l'autre horizontal, paſſent par le centre, & le troiſieme eſt parallele au plan horizontal, & placé à une diſtance donnée de ce plan. Suppoſé que la gravité de chaque partie ſoit exprimée par ſa maſſe diviſée par le quarré de la diſtance, enſorte que le rapport du rayon à la circonférence étant $\frac{1}{c}$, l'attraction d'un corpuſcule placé à la ſurface d'une ſphere, dont le rayon eſt r, ſoit $\frac{2}{3}cr$, ſuivant le n. 154; ſi l'on fait le rayon de la couche ſphérique propoſée $= m$, la diſtance des deux plans horizontaux $= 1$, laquelle doit être aſſez petite par rapport à m, pour pouvoir négliger les termes diviſés par m^2, m^4, &c. je trouve l'attraction $= 2$ log. de $m + 2.96$. Or je trouve de là pour une hauteur de 50 pieds ou de dix pas, dont le demi-diametre de la terre en contienne 4000000, qui eſt à peu près le nombre de pieds (meſure de *Paris*) contenu dans le demi-diametre de la Terre, de ſorte qu'il contienne 400000 dixaines de pas, & pour une diſtance m de 100 milles, enſorte que l'on ait $m = 10000$ dixaines de pas, je trouve, dis-je, que la gravité $\frac{2}{3}cr$ eſt à l'attraction ſur cette couche, comme 10000000 à 128, qui eſt le rapport du rayon à la tangente de 2″, 38‴; & telle ſeroit l'aberration du pendule qui ſeroit placé auprès de cette couche, ſi ſa denſité étoit égale à la moyenne denſité de la Terre.

Que cet effet eſt à peu près en raiſon de l'épaiſſeur de la couche.

240. Il eſt encore à obſerver que quoiqu'on augmente ou qu'on diminue notablement le rayon de la ſphere, d'où eſt priſe cette couche, on changera à peine le logarithme de l'attraction, ſi m exprime un grand nombre, puiſque les logarithmes

rithmes des grands nombres changent peu, d'où il suit que la valeur de la formule sera presque la même ; mais que si l'on augmente ou diminue l'épaisseur de la couche, cette valeur change presque dans la même raison ; & que si l'on change enfin la densité moyenne de la Terre, sans toucher à celle de la couche, la valeur changera en raison inverse de la densité changée.

241. Or il suit de là qu'un terrein qui va toujours en s'élevant dans un espace de 100 milles, & à la hauteur de 100 pas, comme il arrive en plusieurs endroits, produit une déviation de 20″, 280‴ = 24″, 40‴ ; & s'il s'élevoit à la hauteur de 1000 pas la déviation seroit de plus de 4 minutes.

Effet d'une couche de terre qui va en s'élevant.

242. J'ai déduit de là au même endroit de ma Dissertation une méthode pour connoître le rapport de la moyenne densité de la Terre à la densité de l'eau. Si dans quelqu'endroit de la Manche, où la marée s'éleve quelquefois à 50 pieds de hauteur, il y avoit au bord de la mer une tour où l'on eût placé un long pendule ; dès qu'à marée haute une couche d'eau de 50 pieds d'épaisseur & de plusieurs milles d'étendue, auroit pris la place de la couche d'air, elle devroit un peu attirer à soi le pendule, & le microscope rendroit ce mouvement très sensible. Si la déviation étoit d'environ deux secondes, on en concluroit que la moyenne densité de la Terre est égale à la densité de l'eau, & que l'excès de densité des marbres & des métaux est compensée par les concavités de la Terre : si elle étoit plus grande ou plus petite, le rapport de densité seroit plus petit ou plus grand. Je ne connois point de méthode plus propre à donner une estimation de la quantité de matiere qui compose le globe terrestre ; je doute même qu'on en ait jamais proposé d'autre qui valût celle-ci.

Déterminer la moyenne densité de la Terre.

243. Mais laissons ce point, & revenons à notre sujet. Il est clair qu'on trouve par-tout plusieurs inégalités proche la superficie de la Terre, des sols plus élevés les uns que les autres, des cavernes ouvertes ou fermées, des montagnes, des mines ou autres choses semblables, dont il paroît que l'action peut égaler celle d'un globe de mille pas de rayon. Ainsi l'on ne doit point compter que l'allongement du pendule de l'équateur au pôle, suive une progression si réguliere,

Irrégularité de tissure proche la superficie.

qu'il ne s'écarte de quelques centiemes de ligne de l'augmentation proportionnelle au sinus verse d'une latitude double; & l'on ne doit point se flatter non plus de pouvoir éviter toutes les déviations du pendule, qui répandent encore bien plus de confusion dans la mesure des dégrés.

Même sujet.

244. Ceci peut encore servir de démonstration pour plusieurs points proposés dans le premier Livre (n. 46 & suiv.), & fournit une méthode pour connoître la figure & la densité de la Terre par les observations du pendule à secondes, dont la longueur, ainsi que nous l'avons déja remarqué, est proportionnelle à la gravité.

Choix des observations sur la longueur du pendule.

245. On trouve dans plusieurs Auteurs des observations de la longueur du pendule à secondes; M. *de Bremond* en a recueilli une assez longue suite dans les notes qu'il a ajoutées à sa traduction des *Transactions philosophiques.* Mais plusieurs de ces observations ont été faites avec très peu d'exactitude. La plupart n'ont été faites ni avec les soins nécessaires, ni avec des instrumens aussi parfaits que ceux dont on se sert aujourd'hui. De ce grand nombre d'observations, je n'en choisirai que cinq, dont les quatre premieres se trouvent dans le Livre de M. *Bouguer* sur la figure de la Terre (p. 342) avec les corrections qu'y a faites l'Auteur pour le retardement de l'air, en les réduisant à des observations faites dans le vuide, & pour l'inégalité de la chaleur. Je tire la cinquieme des précédentes, & de la différence de 59″ que M. *de Maupertuis* a trouvée sur 24 heures, dans un pendule de *Graham*, à *Pello* dans la Laponie, & à *Paris;* d'où l'on conclut que le rapport des gravités pour ces lieux, est celui de 100137 à 100000; ce qui donne cette proportion: comme 100000 est à 137; ainsi la longueur du pendule à *Paris* dans le vuide, qui, selon M. *Bouguer*, est de 440.67 lignes à un quatrieme terme qu'on trouvera de 0.60, qui, ajouté à la longueur du pendule de *Paris*, donne pour sa longueur à *Pello* 441.27.

Observations du pendule à *Rome.*

246. Nous fîmes ensemble le mois dernier, M. *de la Condamine* & moi, plusieurs observations sur la longueur du pendule au collège romain, avec le même pendule qui lui a servi en Amérique, puis à M. l'Abbé *de la Caille* au *Cap* de Bonne Espérance. Mais M. *de la Condamine* n'ayant pas apporté

avec lui son Mémoire, & n'ayant point encore publié le nombre précis d'oscillations qu'il a trouvé dans ce pendule tant à *Paris* qu'en Amérique, & qu'il publiera dans la suite avec bon nombre d'autres observations de sa façon ; je ne puis comparer pour le présent ces gravités avec celles de *Paris*, & de la ligne équinoxiale, ni déterminer exactement pour ces lieux la longueur du pendule. Je n'entrerai donc point ici dans le détail de ces observations que je donnerai quelque jour, ou plutôt que M. *de la Condamine* donnera lui-même au public. En attendant je me bornerai aux cinq observations mentionnées dans l'article précédent, & qu'on trouvera dans la table suivante.

247. La premiere colonne marque le lieu de l'observation; la seconde, la latitude de ce lieu ; la troisieme, la moitié du sinus verse d'une latitude double pour un rayon = 10000 ; la quatrieme, la longueur du pendule exprimée en lignes de pieds (mesure de *Paris*) ; la cinquieme, la différence de cette longueur à la premiere, ou à celle qu'on trouve sous l'équateur. **Autres observations du pendule.**

Lieu de l'Observation.	Latitude.		½ du sinus verse.	Longueur du pendule.	Différence.
Sous l'Equateur . . .	0°	0′	0	439.21	0
A Portobelle . . .	9	34	271	439.30	09
Au Petit Goave . . .	18	27	1002	439.47	26
A Paris	48	50	5667	440.67	1.46
A Pello	66	48	8450	441.27	2.06

248. Il est maintenant aisé de voir de combien la longueur du pendule s'écarte du rapport du sinus verse du double de la latitude, par cette analogie : comme la différence de la premiere moitié de sinus verse à la derniere, ou comme 8450 est au rayon 10000 ; ainsi la différence du premier & du dernier pendule, savoir 2.06, est à la différence du premier & de celui qu'on auroit sous le pôle ; cette différence se trouve de 2.44. Ensuite il faut faire cette autre analogie : comme le rayon est à une autre moitié quelconque de sinus verse, ainsi **Accord des différences calculées avec les observées.**

ce nombre 2.44 est à un quatrieme terme ; ce sera la différence qu'on devroit avoir dans le rapport exact des sinus verses du double de la latitude. De cette sorte on trouvera ces différences du premier pendule aux suivantes, 0, 7, 24, 138, 206, lesquelles s'accordent, à quelques centiemes de ligne près, avec celles de la table : la seconde ne s'en éloigne que de 2 centiemes, la troisieme d'autant, la quatrieme de 8, ce qui ne forme que des différences peu sensibles.

Comparaison des longueurs du pendule prises deux à deux.

249. Ces cinq longueurs différentes du pendule peuvent se combiner deux à deux de dix manieres différentes ; & si l'on fait pour chacune cette proportion, comme la différence des moitiés des sinus verses de latitude, est au rayon, de même la différence des pendules répondans à ces sinus verses, est à un quatrieme terme, cette quatrieme proportionnelle sera la différence de la longueur du pendule sous le pôle. Mais parceque les trois premieres longueurs different peu entre elles, on pourra les omettre & se contenter de sept combinaisons, deux à deux. Elles ne s'éloignent pas beaucoup les unes des autres, dans la détermination de cette différence totale, & la différence trouvée dans chaque combinaison représente, suivant le n. 225, l'ellipticité pour la seconde hypothese du n. 221, si on la divise par la longueur du pendule sous l'équateur ; & pour la premiere hypothese, si on retranche cette ellipticité de la fraction $\frac{1}{115}$.

Table pour cette comparaison.

250. Nous donnerons ces allongemens du pendule & ces ellipticités dans la table suivante. La premiere colonne représente les longueurs qu'on compare, exprimées par des chiffres qui marquent le rang qu'elles occupent dans la table du n. 247 ; la seconde, la différence totale trouvée ; la troisieme, l'ellipticité qui en provient pour la seconde hypothese, & la quatrieme, l'ellipticité pour la premiere hypothese.

1 & 5	2.44	$\frac{1}{180}$	$\frac{1}{319}$	1 & 4	2.58	$\frac{1}{170}$	$\frac{1}{355}$
2 5	2.41	$\frac{1}{182}$	$\frac{1}{312}$	2 4	2.54	$\frac{1}{173}$	$\frac{1}{343}$
3 5	2.42	$\frac{1}{182}$	$\frac{}{312}$	3 4	2.57	$\frac{1}{171}$	$\frac{1}{351}$
4 5	2.16	$\frac{1}{203}$	$\frac{1}{265}$				

Accord des résultats.

251. On voit par cette table, que ces déterminations ne different pas beaucoup entre elles ; car si on en excepte la quatrieme qui, étant faite sur des observations peu distantes l'une de l'autre, est un peu plus différente, elles se rapprochent assez, surtout pour la premiere hypothese. Prenant donc un milieu entre ces déterminations, sans avoir égard à la quatrieme, on aura pour différence moyenne 2.49 ; ce qui donne pour l'ellipticité de la seconde hypothese $\frac{1}{176}$, & pour celle de la premiere $\frac{1}{335}$.

Densité de la Terre comparée à celle des mers.

252. Mais dans le cas d'homogénéité, la différence totale, suivant le n. 218, devroit être $\frac{5}{4}n$, c'est-à-dire $\frac{1}{230}$ du tout ; d'où il suit que les observations sont contraires à cette hypothese : & comme les observations donnent une plus grande différence de gravité, il est aisé de conclure que si la Terre est composée de couches sphériques homogênes, sa densité, suivant le n. 226, doit surpasser celle de nos mers.

Suite.

253. Or on pourra déterminer la densité moyenne par la formule du n. 225, connoissant la longueur du pendule sous l'équateur, & sa différence à un pendule placé dans un lieu quelconque plus voisin du pôle. Mais il sera mieux de se servir de la différence moyenne qu'on a trouvée de 2.49 lignes, ou plutôt du rapport de cette différence à la gravité totale, lequel est $\frac{1}{176}$. Alors il suffira de substituer cette valeur dans la formule du n. 225, dans laquelle $\frac{t}{p} = \frac{20nl - 10mh}{15nl - 6mh}$, ou $\frac{20 - 10 \times \frac{mh}{nl}}{15 - 6 \times \frac{mh}{nl}}$. Car $\frac{n}{m} = \frac{1}{289}$, $\frac{h}{l} = \frac{1}{176}$. Donc $\frac{mh}{nl} = \frac{289}{176}$, & l'on aura par la substitution $\frac{3520 - 2890}{2640 - 1734} = \frac{630}{906} = \frac{105}{151}$, qui fait environ $\frac{2}{3}$. C'est-à-dire que la densité de la mer est à la moyenne densité de la Terre, comme 105 est à 151, ou comme 2 à 3.

Rapport des densités dans la seconde hypothese.

254. Dans ma seconde hypothese, la mer seroit au contraire plus dense que la Terre : car alors la différence de la gravité, divisée par la gravité, suivant les n. 219 & 222, est $\frac{n}{2m\left(1 - \frac{3t}{5p}\right)}$, qui étant supposé égal à $\frac{h}{l}$, donne $\frac{t}{p} = \frac{5}{3}$

$-\frac{5nl}{6mh} = \frac{5}{3} - \frac{880}{1734} = \frac{1005}{867}$, qui fait à peu près $\frac{7}{6}$. Mais nous aurons encore lieu de parler de ceci à la fin du chapitre ſuivant.

CHAPITRE II.

De la figure de la Terre, déterminée par la meſure des dégrés.

Du dégré: en particulier de celui de la ſphere.

255. ON appelle dégré terreſtre l'intervalle de deux points de la ſurface de la Terre, tel qu'ayant mené par ces points des perpendiculaires à la ſurface, elles forment entre elles un angle d'un dégré. Si la Terre eſt ſphérique, toutes les perpendiculaires à la ſurface ſe rencontrent au centre; d'où il ſuit que ſi on la coupe par un plan quelconque, les normales qui ſont dans ce plan, leſquelles ne ſont point paralleles entre elles, ſe rencontreront quelque part; & ſi les points de la ſection d'où elles partent ſont à une diſtance ſuffiſante, elles formeront un angle d'un dégré. Ainſi une ſphere a des dégrés en tous ſens, & tous les dégrés des ſections qui paſſent par le centre, ou des grands cercles, ſont égaux.

Dégré du méridien dans d'autres ſolides.

256. Si le ſolide n'eſt pas ſphérique, les perpendiculaires à la ſurface ne ſe rencontreront pas toujours. S'il eſt engendré par la circonvolution d'une courbe autour de ſon axe, & qu'on le coupe par un plan qui paſſe par l'axe, cette ſection, qui dans le globe terreſtre s'appelle méridien, ſera toujours égale à la courbe génératrice, & toutes les perpendiculaires à la ſuperficie, tirées des points d'une pareille ſection, ſeront dans le plan de la ſection; d'où il ſuit que ſi elles ne ſont point paralleles, elles ſe rencontreront quelque part, & formeront un angle au point de rencontre; & ſi cet angle eſt d'un dégré, l'arc de la ſection intercepté par les perpendiculaires eſt appellé dégré du méridien.

Dégré du parallele. Comparaiſon des dégrés.

257. Si ce ſolide eſt coupé par des plans perpendiculaires à l'axe, il eſt clair que toutes les ſections ſont des cercles paralleles entre eux: auſſi les appelle-t-on *cercles paralleles*, ou ſimplement *paralleles*. Si des lignes tirées des extrémités

de l'arc d'un parallele forment, au point de l'axe où elles se rencontrent, un angle d'un dégré, cet arc est appellé dégré du parallele. On voit que dans la supposition tous les dégrés d'un parallele quelconque sont égaux, & que les dégrés de différens paralleles sont comme leurs rayons, ou comme les ordonnées de la courbe génératrice perpendiculaires à l'axe, qui sont les rayons de ces cercles paralleles. On voit encore que les dégrés de tous les méridiens, pris au même parallele, sont égaux entre eux, puisque la même courbe par sa circonvolution se confond successivement avec tous les méridiens.

Du cercle osculateur.

258. Mais les dégrés du même méridien ne sont point égaux. Si on vouloit avoir leur rapport exact, dans les courbes même les plus connues, le problême ne seroit pas d'une petite difficulté. Mais un arc de méridien qui ne passe pas deux dégrés, peut être pris pour un arc de cercle; & on regarde un degré du méridien comme le dégré d'un cercle d'une courbure égale à la courbure moyenne de cet arc du méridien, laquelle se trouve vers le milieu de cet arc. En général la courbure d'une ligne dans un de ces points quelconques, est celle du cercle qui la touche en ce point sans la couper. Or on appelle cercle osculateur d'une courbe non celui dont l'arc se confondroit exactement avec l'arc de la courbe; ce qui n'arrive jamais, quelque petit qu'on suppose cet arc, mais celui qui en approche plus qu'aucun autre cercle, de sorte qu'on ne puisse pas faire passer un autre cercle dans l'angle formé par la courbe & le cercle osculateur au point de contact, comme *Euclide* a démontré qu'entre le cercle & sa tangente on ne peut tirer par le point de contact aucune autre ligne droite.

Propriétés des arcs des courbes par rapport au rayon de courbure.

259. Or on peut démontrer fort exactement par la Géométrie, comme je me propose de le faire au quatrieme tome de mes Elémens, qu'il n'y a aucun arc continu, de quelque courbe que ce soit, dans lequel on ne puisse trouver une infinité de points qui ont chacun leur cercle osculateur; & quoique dans les courbes d'ordre supérieur il se trouve quelquefois de ces points que j'appelle irréguliers (*puncta anomala*), lesquels n'ont point de cercle osculateur, la courbure y étant plus grande ou moindre que toute courbure circulaire, ces points ne peuvent occuper toute la longueur d'un

arc continu, quelque petit qu'il ſoit, mais ils doivent laiſſer entre eux quelque intervalle, de ſorte que chaque point de l'intervalle ait un cercle oſculateur; & ſi l'on imagine dans cet arc un point quelconque, qui s'approche par un mouvement continu de l'un des points irréguliers, le rayon du cercle oſculateur, qu'on appelle auſſi rayon oſculateur, change continuellement, & le point mobile tombant ſur le point irrégulier, le rayon devient nul ou infini.

Du centre du cercle oſculateur.

260. C'eſt encore une vérité connue, que dans toute courbe le centre du cercle oſculateur eſt dans la ligne perpendiculaire à la courbe & menée par le point de contact; de plus, que tous les centres des cercles oſculateurs d'une courbe quelconque ſe trouvent dans ſa développée, c'eſt-à-dire dans une courbe telle, que l'ayant d'abord entourée ou enveloppée d'un fil d'une juſte longueur, on puiſſe enſuite en la développant continuellement, décrire par l'extrémité du fil la premiere courbe; & qu'au contraire ſi une courbe eſt décrite par le développement d'une autre courbe quelconque, toutes les tangentes de la développée ſeront perpendiculaires à la courbe décrite, & que la partie de la tangente interceptée par la courbe décrite & la développée, ſera toujours le rayon du cercle qui touche en ce point la courbe décrite, & dont le centre eſt le point où ce rayon touche la développée.

De quelques propriétés de ce cercle.

261. Or ſi deux lignes perpendiculaires à une courbe quelconque paſſent par deux de ſes points infiniment proches l'un de l'autre, & qu'elles ſe rencontrent quelque part, il eſt démontré que leur point de concours eſt le centre du cercle oſculateur. Il peut encore ſe faire qu'un arc d'un dégré differe notablement d'un dégré du cercle oſculateur de cet arc; ce qui peut arriver lorſque d'une extrémité de l'arc à l'autre la courbure va d'abord en augmentant, puis en diminuant, ou au contraire; mais lorſque la courbure augmente ou diminue dans toute la longueur de l'arc, un dégré de la courbe, dans le ſens que nous avons dit, ſera toujours égal à celui d'un cercle qui le touche dans un point intermédiaire, quoiqu'il puiſſe être fort différent du dégré du cercle qui touche la courbe au milieu de cet arc.

262. Tout ceci peut ſe démontrer exactement par la ſimple Géométrie,

Géométrie, & sans le secours d'aucune autre méthode; mais lorsque la courbure est à peu près la même, le dégré de la courbe ne differe pas sensiblement de celui du cercle qui la touche vers le milieu de l'arc; d'où il suit qu'ayant la mesure du dégré, on aura par-là même le rayon du cercle qui touche la courbe vers le milieu du dégré, que l'on trouvera aisément en multipliant le dégré par 180, & en formant cette proportion : comme 355 est à 113, ainsi ce produit est au rayon.

En quel cas on peut prendre un dégré de la courbe pour celui du cercle.

263. Il suit de là que dans un pareil solide, connoissant un dégré d'un parallele, on a l'ordonnée à la courbe génératrice, qu'on trouve par la même méthode; & qu'étant donné un dégré du méridien, on a le rayon du cercle qui touche la courbe vers le milieu de cet arc; de même que connoissant l'ordonnée, on connoîtra le dégré du parallele, & qu'ayant le rayon du cercle osculateur, on aura le dégré du méridien pris de part & d'autre du point touchant. On les trouvera, dis-je, par cette analogie: comme 113 est à 355; ainsi cette ordonnée, ou ce rayon, est à un quatrieme terme qui, étant divisé par 180, donnera le dégré que l'on cherche.

Rapports de l'ordonnée & du rayon de courbure aux dégrés.

264. De plus, si le solide est un sphéroïde, dont la courbe génératrice soit de figure ovale, par exemple une ellipse, le parallele dont le plan passe par le centre, est appellé équateur de ce solide. Et si d'un autre point quelconque de la surface on tire une perpendiculaire qui, étant dans le plan du méridien de ce point, doit rencontrer quelque part l'axe du solide & le diametre de l'équateur, l'angle droit, ou moindre qu'un droit formé par cette ligne & le rayon de l'équateur, s'appelle la latitude de ce point du méridien; d'où il arrive que l'angle que fait cette ligne avec l'axe, est le complément de la latitude. Il n'est cependant pas nécessaire de connoître la figure du méridien pour déterminer les latitudes terrestres; il n'est besoin pour cela que des observations astronomiques. On peut encore déterminer, pour une latitude donnée, un dégré du méridien par la méthode que j'ai indiquée dans le premier Livre, & que j'ai expliquée au long dans le quatrieme. Enfin il y a une autre méthode pour connoître le dégré d'un parallele; mais elle n'a aucun rapport à la matiere présente.

Ce que c'est que diametre, latitude dans un sphéroïde.

Connoître la figure par les dégrés ;

265. Or pour connoître un cercle, il suffit d'en connoître un dégré. De même étant donné un dégré de la ſphere, ſoit que ce ſoit un dégré du méridien ou d'un parallele quelconque, dont on connoît la latitude, on aura le rayon de la ſphere, & la ſphere même. Dans l'ellipſe d'*Apollonius*, ſi l'on a la meſure de deux dégrés, dont ont connoiſſe les latitudes, on aura par-là même les deux rayons oſculateurs, au moyen deſquels on décrira l'ellipſe ; & dans le ſphéroïde engendré par la circonvolution de cette ellipſe autour de l'un de ſes axes, connoiſſant deux dégrés de deux paralleles, ou deux dégrés d'un même méridien, ou un dégré du méridien & un dégré d'un parallele, pour des latitudes données, ſoit que dans ce dernier cas le dégré du parallele & celui du méridien ſoient dans la même latitude, ou en des latitudes différentes, on peut trouver l'ellipſe génératrice & le ſphéroïde même. Quant aux courbes des dégrés plus élevés, on a beſoin pour les déterminer de connoître un plus grand nombre de cercles oſculateurs, par la même raiſon que deux points ſuffiſent pour déterminer une ligne droite, qu'il en faut trois qui ne ſoient point dans la même direction pour déterminer un cercle, cinq pour une ſection conique, & ainſi de ſuite.

Par les rayons de courbure.

266. En général, de même qu'étant donné un certain nombre de points, on peut trouver une infinité de courbes d'eſpeces fort différentes qui paſſent par ces points, & que ce n'eſt qu'une ſuite continue de points qui détermine une courbe ; ainſi étant donné un nombre quelconque de rayons de courbure pour des latitudes données, on peut trouver une infinité de courbes qui leur conviennent. Il faudroit donc l'expreſſion générale du rayon oſculateur par la latitude pour déterminer la courbe. Il pourroit ſe faire auſſi que le ſphéroïde étant applati, le rayon oſculateur fût néanmoins plus court au pôle qu'à l'équateur, la courbure étant plus petite à l'équateur qu'au pôle, ſi la courbe génératrice n'eſt pas une ellipſe, mais une autre eſpece d'ovale.

Des irrégularités de la Terre.

267. Comme la théorie de la gravité univerſelle donne une ellipſe du premier genre pour la courbe génératrice, ſoit dans l'hypotheſe qui fait la terre entierement homogêne, & d'une denſité égale à celle de la mer, ſoit dans celle où l'on ſe

contente de la faire homogêne à égales distances du centre; on a d'abord cru qu'étant donnés deux dégrés, pourvu qu'ils fussent à une distance suffisante l'un de l'autre, on pouvoit connoître la figure de la Terre. Mais comme après en avoir mesuré plus de deux, on a trouvé qu'il en résultoit des figures différentes, on a commencé à soupçonner de l'irrégularité dans la figure ou dans la densité du noyau; & ce soupçon reçoit un nouveau dégré de vraisemblance de la comparaison de notre mesure avec celle du dégré le plus méridional de France.

Sujet de ce chapitre.

268. Voilà donc à quoi se réduit tout le sujet de ce dernier chapitre. On y trouve plusieurs problêmes qui ont rapport à la matiere présente, avec leurs solutions purement géométriques; j'en donnai quelques-unes, il y a plusieurs années, dans ma premiere Dissertation sur la figure de la Terre; mais je les propose toutes ici par ordre & avec plus d'étendue.

Théorème sur les cercles osculateurs dans l'ellipse.

269. Premierement pour ce qui regarde les cercles osculateurs dans les sections coniques, j'en ai traité fort au long dans le troisieme tome de mes Elémens, sans employer d'autre méthode que celle de la Géométrie ordinaire; & j'ai démontré dans les corollaires de la neuvieme proposition plusieurs théorèmes qui y ont rapport, & dont nous ferons usage. De ce nombre est celui du n. 520: *les rayons des cercles osculateurs sont en raison inverse des cubes des perpendiculaires tirées du centre sur les tangentes, & en raison directe des cubes des normales terminées à l'un des axes;* d'où l'on tire celui-ci du n. 523: *le rayon du cercle osculateur est le quatrieme terme d'une proportion continue, dont le premier est la moitié du parametre du grand axe, & le second, la normale tirée du point touchant sur cet axe.* On auroit pu également en tirer ce théorème encore plus général, que *le rayon du cercle osculateur est le quatrieme terme d'une proportion continue dont le premier est la moitié du parametre de l'un des axes indifféremment, & le second, la normale à la courbe, terminée par cet axe.*

Propriétés de l'ellipse. Pl. IV. fig. 23.

270. De plus, étant donnée la latitude du lieu, on a le rapport qui se trouve entre l'ordonnée à l'axe & la normale, ou la sous-normale, qui est celui du co-sinus de la latitude au rayon ou au sinus, ou celui du rayon à la sécante de la

latitude, ou à sa tangente. Car si l'on suppose (fig. 23) que CB soit le demi-diametre de l'équateur, Ee l'axe, HI l'ordonnée perpendiculaire à l'axe, IF la normale, HF la sous-normale; la latitude du lieu I sera mesurée par l'angle HIF, puisqu'à mesure que l'ordonnée HI, parallele à CB, devient plus grande, elle se rapproche de l'équateur, & la normale FI du zénith. Or en prenant la normale FI pour le rayon, HI est le co-sinus, HF le sinus de l'angle HIF; & si l'on prend pour rayon la perpendiculaire HI, IF devient la sécante, & HF la tangente de cet angle.

Autres propriétés.

271. Or il y a deux propriétés de l'ellipse qui nous seront ici d'un très grand usage. La premiere connue de tout le monde, que si sur le diametre Ee on décrit un demi-cercle qui rencontre l'ordonnée HI en A, & le demi-axe CB en D, HI sera à HA dans le rapport constant de CB à CD, ou CE; la seconde, que la sous-normale HF est à l'abscisse HC, dont l'origine est au centre, comme CB^2 à CD^2, ou CE^2, comme il est démontré au troisieme tome de mes Elémens, n°. 462. Cela supposé, nous n'aurons pas de peine à résoudre les problêmes qui se présentent ici. J'en donnerai même des solutions différentes de celles qu'on lit dans ma Dissertation de la figure de la Terre, quoique celles-ci soient aussi très simples, très faciles, & également géométriques.

Problême préparatoire.

272. Je commence par ce problême: *étant connue l'ordonnée dans une latitude donnée, & l'espece de l'ellipse, trouver l'axe & le diametre de l'équateur.* Puisqu'on a la latitude, on connoîtra le rapport de la ligne donnée HI à HF, ou du rayon à la tangente de la latitude. On aura donc HF. Or on connoît aussi le rapport de CB à CE, qui est celui de HI à HA, & par conséquent le rapport de CB^2 à CE^2, qui est celui de HF à HC. Donc on aura HA & HC, qui sont les côtés d'un triangle rectangle, dont on trouvera encore l'hypoténuse CA, & par conséquent CE; & parceque le rapport de CE à CB est connu, on aura aussi CB.

Construction.

273. Soit le rapport du demi-diametre de l'équateur au demi-axe exprimé par la fraction $\frac{m}{n}$; menez l'ordonnée HI qui est donnée, faites l'angle HIF égal à la latitude donnée,

$m : n :: HI : HA$, & $m^2 : n^2 :: HF : HC$; & ayant pris sur CH prolongée la ligne $CE = CA$, & tiré CB perpendiculaire à CE de telle grandeur que CE soit à CB dans la raison de n à m, vous aurez les demi-axes cherchés.

Solution. Autre lemme.

274. Or par le n. 263 étant donné un dégré d'un parallele, on a l'ordonnée HI. Donc connoissant ce dégré & l'espece de l'ellipse, on connoîtra les axes. Mais nous aurons encore besoin du lemme suivant : *dans l'ellipse la différence des quarrés de deux ordonnées quelconques à celui des axes qu'on voudra, est à la différence des quarrés des sous-normales correspondantes, comme le quarré de ce demi-axe au quarré de la moitié de son conjugué.*

Démonstration.

275. Car puisqu'on a, par le n. 271, $HI^2 : HA^2 :: CB^2 : CE^2$, & $hi^2 : ha^2 :: CB^2 : CE^2$; on aura $hi^2 - HI^2 : ha^2 - HA^2 :: CB^2 : CE^2$. Or à cause que $CA = Ca$, la différence des quarrés de ha & HA sera la même que celle de HC^2 à hC^2; & comme par le même n. 271, $HC^2 : HF^2 :: EC^4 : CB^4$, & $hC^2 : hf^2 :: CE^4 : CB^4$; on aura aussi $HC^2 - hC^2 : HF^2 - hf^2 :: CE^4 :: CB^4$. Donc $hi^2 - HI^2$ est à $HF^2 - hf^2$ en raison composée de celle de CB^2 à CE^2, & de celle de CE^4 à CB^4, ou en raison de CE^2 à CB^2. C. Q. F. D.

Trouver l'ellipse génératrice par deux dégrés de paralleles.

276. De ce lemme coule comme de source la solution du problême qui suit : *étant donnés dans un sphéroïde elliptique deux dégrés de deux paralleles, dont on connoît les latitudes, trouver l'espece & la grandeur de l'ellipse génératrice.* Car puisqu'on a ces deux dégrés, on aura, par le n. 263, les ordonnées HI, hi; & puisqu'on connoît les latitudes, on connoîtra, par le n. 270, les sous-normales HF & hf. On aura donc le rapport de la différence des quarrés des ordonnées, à la différence des quarrés des sous-normales, rapport qui fera connoître celui du quarré de CE au quarré de CB, & par conséquent la raison sous-doublée de ce rapport, qui est celle de CE à CB, d'où l'on déduira l'espece de l'ellipse. Or, par par le n. 272, connoissant l'espece de l'ellipse & l'une de ces ordonnées, on connoîtra la grandeur des demi-axe CE, CB.

Construction pour l'espece. Pl. IV. fig. 23. 24.

277. S'il étoit uniquement question de trouver l'espece de l'ellipse, on pourroit exprimer les ordonnées HI, *hi* par les mêmes nombres qui expriment les dégrés; & le problême pourroit se construire géométriquement en cette sorte: sur l'un des côtés de l'angle droit IHF (fig. 24), ayant pris à discrétion le segment HI, puis H*i* de telle grandeur qu'elle soit à HI dans la même raison que le dégré le plus grand au plus petit, je fais les angles HIF, H*if* égaux aux latitudes correspondantes, & des points I & *f* comme centres, & avec les rayons H*i*, HF, je cherche sur les côtés de cet angle droit prolongés, les points B, E. Le demi-diametre de l'équateur sera au demi-axe, comme HB à HE. Car les lignes HI, H*i* de la figure 24 exprimeront les ordonnées de la figure 23; HF H*f* les sous-normales; & le rapport de HE^2 à HB^2 celui de la différence des quarrés des ordonnées à la différence des quarrés des sous-normales. Donc, par le n. 274, le rapport de HE à HB sera celui des demi-axes.

Par deux dégrés, l'un du parallele, l'autre du méridien dans la même latitude. Pl. IV. fig. 23.

278. Si l'on cherche l'espece & la grandeur de l'ellipse par deux dégrés connus, l'un du parallele, l'autre du méridien, dans la même latitude, la solution du problême est beaucoup plus simple. Mais il faut auparavant démontrer cette propriété des sections coniques. Si du point F (fig. 23), où l'axe est rencontré par la normale, on mene jusqu'à l'ordonnée une ligne FL parallele au rayon CA, elle sera égale à la moitié du parametre de l'axe E*e*, & les lignes HL, HI, HA seront en proportion continue. Car FL est à CA ou CE, comme FH à CH, ou bien, par le n. 271, comme le quarré de CB au quarré de CE, ou comme la moitié du parametre de l'axe E*e* à la même ligne CE. Donc FL est égale à la moitié du parametre de cet axe. Mais puisque $HI^2 : HA^2 :: CB^2 : CE^2 :: HF : HC :: HL : HA$; il est clair que HL, HI, HA sont en proportion continue.

Solution.

279. Or étant donné un dégré du parallele en I, on a, par le n. 263, l'ordonnée IH; & comme on a la latitude HIF, on connoît IF. De plus, connoissant un dégré du méridien dans la même latitude, on a le rayon osculateur de l'ellipse en I, & par conséquent le rapport de ce rayon à la normale FI qui est connue. Or par le n. 269 ce rapport est la raison

doublée de FI à la moitié du parametre de l'axe Ee, puiſque ce rayon eſt le quatrieme terme d'une proportion continue dont les premiers termes ſont la moitié du parametre de l'axe & la normale. On aura donc le parametre de l'axe; & du point F comme centre, & à la diſtance de la moitié de ce parametre, on trouvera le point L. Enſuite ayant pris HA, troiſieme proportionnelle à HL & HI, on aura le point A; d'où ayant mené AC parallele à LF, cette ligne déterminera le centre C, & le demi axe CE égal à AC. L'autre demi axe CB ſera moyen proportionnel entre CE, & cette moitié du parametre. Ainſi l'on connoîtra l'eſpece & la grandeur de l'ellipſe.

280. Mais ſi les dégrés connus du méridien & du parallele ne ſont pas dans la même latitude, le problême eſt d'une toute autre difficulté, & l'on a beſoin pour le réſoudre de recourir à des courbes de genres beaucoup plus élevés (1). Je me contenterai d'indiquer la maniere de le réſoudre par le calcul ordinaire, ſur les mêmes principes que ci-deſſus. Soit la moitié du parametre de l'axe E$e = x$, CE $= y$, le rayon oſculateur en i, qu'on connoîtra par le dégré donné du méridien dans cette latitude; $= a$, l'ordonnée HI $= b$, le ſinus de la latitude en $i = s$, ſon co-ſinus $= c$, pour un rayon $= 1$, la tangente de la latitude en I $= t$. Puiſqu'on a le quatrieme terme d'une proportion continue, dont les premiers ſont x, & la normale if, on aura $if = \sqrt[3]{ax^2}$. Donc $hi = c\sqrt[3]{ax^2}$, & $hf = s\sqrt[3]{ax^2}$. — *Dans différentes latitudes. Pl. IV. fig. 25.*

281. Or à cauſe que HI $= b$, on a HF $= bt$. De plus, $x : y$ :: HI^2 : HA^2 :: $hi^2 : ha^2$ :: HF : HC :: hf : hC. On aura donc des expreſſions analytiques des quarrés de HA, HC, ha, hC; & comme la ſomme des deux premiers eſt y^2, & que pareillement la ſomme des deux derniers eſt y^2, on a autant d'équation que d'inconnues; mais l'équation qui en — *On a une équation d'un dégré fort élevé.*

(1) Voyez le n. 331 où l'Auteur donne une ſolution très ſimple de ce problême.

résulte est d'un dégré si élevé, que je n'ai pas jugé à propos de donner une solution géométrique de ce problême qui, ne pouvant se construire qu'au moyen d'une courbe fort composée, ne présenteroit rien moins qu'une solution simple & facile. Il pourroit se faire qu'on en eût donné une solution plus aisée, qui ne fût point parvenue à ma connoissance; mais en tout cas elle ne peut être d'un grand usage, vu le peu de précision qu'on peut se promettre dans la mesure d'un dégré d'un parallele.

Connoître l'espece de l'ellipse par deux dégrés du méridien. Pl. IV. fig. 23.

282. Un autre problême bien plus utile, c'est celui où avec deux dégrés du méridien, à diverses latitudes, on cherche l'espece & la grandeur de l'ellipse. Ce problême se résoud avec beaucoup plus de facilité, & il revient à peu près au même que le premier des trois précédens. On le propose en ces termes; *connoissant deux dégrés du méridien en des latitudes différentes trouver l'espece & la grandeur de l'ellipse.* Puisqu'on a ces dégrés, on aura leur rapport & la raison soustriplée de ce rapport, & par conséquent, par le n°. 269, le rapport qu'ont entre elles les normales IF, *if*. Donc puisqu'on a aussi les latitudes, & par-là même, suivant le n°. 270, les rapports de ces normales aux ordonnées HI, *hi*, & aux sous-normales HF, *hf*; on aura pareillement le rapport de HI & *hi*, à HF & *hf*, & le rapport de la différence des quarrés des premieres lignes, à la différence des quarrés des dernieres, qui, par le n°. 276, déterminera l'espece de l'ellipse.

Lemme pour la grandeur de l'ellipse.

283. Connoissant l'espece de l'ellipse, on en connoîtra aisément la grandeur par le lemme suivant qui est tiré du traité des sections coniques: la tangente de l'angle HAC est à la tangente de l'angle HIF, comme CE à CB. Car la premiere tangente est à la seconde, en raison composée de la raison directe de CH à FH, & de la raison inverse de HA à HI; c'est-à-dire en raison composée de la raison directe doublée de CE à CB, & de la raison simple & directe de CB à CE, ou seulement en raison simple & directe de CE à CB.

Connoître sa grandeur.

284. Ce lemme supposé, puisqu'on connoît l'espece de l'ellipse & la latitude HIF avec sa tangente, on connoîtra aussi la tangente de l'angle HAC, & par conséquent cet angle même. Donc on aura encore le rapport de CA ou CE à FI, puisqu'il

puisqu'il est composé de la raison de CA à AH, ou du rayon au co-sinus de l'angle CAH, de la raison de AH à HI, ou de CE à CB, qui est donnée à cause qu'on connoît l'espece de l'ellipse, enfin de la raison de HI à IF, ou du co sinus de l'angle HIF au rayon, lesquelles, sans parler du rayon, se réduisent à deux raisons, savoir celle du demi-diametre de l'équateur au demi-axe, & celle du co-sinus de la latitude au co-sinus de l'angle, dont la tangente est à la tangente de la latitude, comme le demi-axe au demi-diametre de l'équateur. Or on a le rapport de la moitié du parametre de l'axe Ee à CE, qui est doublé de la raison de CB à CE. Donc on aura le rapport de la moitié de ce parametre à IF, & la raison doublée de ce rapport sera celle de la normale IF au rayon du cercle osculateur, ce rayon étant le quatrieme terme d'une proportion continue, dont les premiers sont ce demi-parametre, & cette normale, par le n. 269. Donc connoissant ce rapport & le rayon osculateur, on aura IF; d'où l'on pourra remonter à la connoissance de CA ou CE, ensuite de CE à CB, qui prises ensemble détermineront la grandeur de l'ellipse.

285. Nous allons maintenant déterminer par une construction l'espece de l'ellipse. Soient (fig. 24) les angles HIF, HIO placés du même côté, & égaux aux latitudes données, le premier à la plus grande, le second à la plus petite. Prolongez OI jusqu'en *o*, de sorte que O*o* soit à IF en raison sous-triplée de celle du dégré qui répond à la latitude HIO au dégré correspondant à la latitude HIF. Menez *oi* parallele à HO, qui rencontrera HI en *i*; puis *if* parallele à *o*O; & des points I & *f* comme centres, & avec les rayons H*i*, HF, cherchez, comme ci-dessus, les points E, B; le rapport de HE à HB sera celui du demi-axe au demi-diametre de l'équateur. Car IF est à *if*, ou *o*O, comme dans la figure 23 IF à *if*. Or les angles HIF & H*if*, ou HIO de la figure 24, sont égaux aux angles HIF, *hif* de la figure 23. Donc les rapports de FI, *fi* (fig. 24) à HI, H*i*, & HF, H*f* sont les mêmes que ceux de FI, *fi* (fig. 23) à HI, *hi*, & HF, *hf*. Ainsi comme les différences des quarrés dans la figure 23 sont entre elles comme CE^2 à CB^2, elles seront

Construction pour l'espece. Pl. IV. fig. 24.

dans la figure 24 comme HE^2 à HB^2.

Construction pour la grandeur. *Pl. IV. fig. 23.*

286. A l'égard de la construction pour la grandeur de l'ellipse, soit décrit (fig. 23) un demi-cercle EDe, dans lequel on prendra un angle ECA dont la tangente soit à la tangente de la latitude, comme dans l'ellipse dont on vient de trouver l'espece, CE est à CB. Menez AH, & faites HI de telle longueur, qu'elle ait à AH le rapport qu'on a trouvé entre CB & CE; ensuite ayant fait l'angle HIF égal à la latitude donnée, vous prendrez une troisieme proportionnelle à CE prise à volonté, & à CB déterminée par l'espece de l'ellipse qu'on suppose connue, puis une quatrieme proportionnelle en proportion continue, dont les deux premiers termes soient celle-ci (1) & IF. Enfin vous ferez cette analogie : comme cette quatrieme proportionnelle est à CE, ainsi le rayon osculateur qu'on trouvera par le dégré, est au demi-axe ; & connoissant le demi-axe, vous aurez par l'espece de l'ellipse le demi-diametre de l'équateur.

Formule pour l'espece de l'ellipse.

287. Comme nous ferons souvent usage de ce dernier cas, il ne sera pas hors de propos d'en dresser une formule algébrique. Soit $CE = 1$, $CB = x$, le dégré le plus proche de l'équateur $= g$, le plus éloigné $= G$; soit encore $g^{\frac{1}{3}} = a$, $G^{\frac{1}{3}} = A$; on aura les normales if, $IF = g^{\frac{1}{3}}$, $G^{\frac{1}{3}}$ ou a, A. Si l'on suppose le sinus de la premiere latitude $= s$, pour le rayon 1, celui de la seconde latitude $= S$, le co sinus du premier $= c$, celui du second $= C$; on aura $hi = ac$, $HI = AC$, $hf = as$, avec cette analogie $a^2c^2 - A^2C^2 : A^2S^2 - a^2s^2 :: 1 : xx = \frac{A^2S^2 - a^2s^2}{a^2c^2 - A^2C^2}$, & parceque $c^2 = 1 - ss$, $C^2 = 1 - SS$, on aura $xx = \frac{A^2S^2 - a^2s^2}{a^2 - a^2s^2 - A^2 + A^2S^2}$. Donc $\frac{1}{xx} = \frac{A^2S^2 - a^2s^2 + a^2 - A^2}{A^2S^2 - a^2s^2}$ $= 1 \frac{-A^2 + a^2}{A^2S^2 - a^2s^2}$.

Pour l'excentricité.

288. Cette équation donne la proportion suivante, $xx : 1 :: 1 : 1 - \frac{A^2 + a^2}{A^2S^2 - a^2s^2}$. Donc $xx : xx - 1 :: 1 : \frac{A^2 - a^2}{A^2S^2 - a^2s^2}$.

---

(2) C'est la moitié du parametre de l'axe, puisqu'elle est troisieme proportionnelle à CE & CD.

$:: A^2S^2 - a^2s^2 : A^2 - a^2$. Et parceque que $x^2 - 1$ est le quarré de la distance du foyer au centre, ou de l'excentricité, l'excentricité sera au demi-axe conjugué en raison sous-doublée de $A^2 - a^2$, à $A^2S^2 - a^2s^2$.

Pour le cas d'une petite excentricité.

289. Si l'excentricité est petite, il sera aisé d'avoir une formule beaucoup plus simple pour la différence du demi-diametre de l'équateur au demi-axe. Car on aura à très peu près $x = 1$. Donc $xx - 1 = \frac{A^2 - a^2}{A^2S^2 - a^2s^2}$. Or $xx - 1 = CB^2 - CD^2 = DB \times Bd$ (en faisant $Cd = CD$), ou bien à très peu près $= 2\,CD \times BD$, ou, à cause que $CD = CE = 1$, à peu près $= 2\,BD = \frac{A^2 - a^2}{A^2S^2 - a^2s^2}$. Mais parceque $AA = G^{\frac{2}{3}}$, & $aa = g^{\frac{2}{3}}$, & que G est peu différent de g, on aura à peu de choses près $A^2 - a^2 = \frac{2}{3} \times G^{-\frac{1}{3}} \times (G - g)$, ou $\frac{2}{3} \times g^{-\frac{1}{3}} \times (G - g)$. Donc $BD = \frac{1}{3} \times \frac{G - g}{GSS - gss}$, même formule que celle qu'a trouvée M. *de Maupertuis* par une méthode fort différente, & qui se voit dans les Mémoires de l'Académie royale des Sciences à l'année 1737, exprimée en ces termes $\frac{E - F}{3(ESS - Fss)}$; car les valeurs E, F, S, s sont les mêmes dans cette formule que G, g, S, s dans la mienne.

Pour les dégrés au pôle & à l'équateur.

290. Lorsque le point i tombe sur l'équateur en B, s s'évanouit, & la formule se réduit à $\frac{1}{3} \times \frac{G - g}{GSS}$. Si de plus le point I tombe sur le pôle en E, où l'on a le sinus $S = 1$, la formule se change en $\frac{G - g}{3G}$, d'où l'on tire ce théorème: *le demi-diametre de l'équateur est à très peu près à sa différence au demi-axe, comme le dégré du méridien sous l'équateur au tiers de la différence des dégrés sous l'équateur & le pôle.*

Théorème général.

291. On peut tirer du n. 269, pour ce dernier cas qui est le plus simple, & pour une ellipticité quelconque, quelque grande qu'elle puisse être, un théorème beaucoup plus beau, savoir: *le demi-diametre de l'équateur est au demi-axe en rai-*

son sous-triplée de celle du dégré sous l'axe du dégré sous l'équateur. Car les dégrés sont en raison inverse des cubes des perpendiculaires abaissées du centre sur les tangentes; & dans le cas où le point de contact est à l'extrémité des axes, ces perpendiculaires sont ces demi-axes eux-mêmes terminés au point de contact. Mais parceque dans les quantités qui different peu entre elles, le cube est à la différence des cubes à très peu près, comme la quantité simple est au triple de la différence de ces quantités simples; il s'ensuit que si l'ellipticité est petite, on pourra de ce dernier théorême déduire le précédent.

Augmentation ou diminution des dégrés.

292. De ce que les dégrés sont en raison inverse des cubes des perpendiculaires abaissées du centre sur la tangente, il est encore aisé de conclure que l'augmentation des dégrés depuis l'équateur jusqu'au pôle, sera à peu près dans la même raison que le quarré du sinus de la latitude, ou que le sinus verse d'une latitude double; même rapport que celui de la diminution de la distance à l'augmentation de la gravité de l'équateur au pôle. Car dès que les différences des quarrés, des cubes & des puissances quelconques, sont fort petites, elles sont en même raison que les différences des côtés ou des racines. Ainsi les augmentations des dégrés seront en même raison que les diminutions des perpendiculaires sur les tangentes. Or dans une ellipse peu différente d'un cercle, la distance du centre au point de contact peut être prise pour la perpendiculaire tirée du centre sur la tangente, même lorsqu'il s'agit de la différence d'une perpendiculaire à une autre; car la perpendiculaire est le côté d'un triangle rectangle dont cette distance est l'hypothénuse, & ces deux lignes forment un angle qui répond à l'ellipticité; d'où il est aisé de démontrer par une méthode semblable à celle dont nous nous sommes servis plus haut (n. 232), que la différence de la perpendiculaire à la base, ou l'erreur que l'on pourroit commettre, est un infiniment petit du second ordre, & de nulle conséquence. Donc la diminution de la perpendiculaire, & par conséquent l'augmentation du dégré, est à très peu près comme la diminution de la distance, ou dans le même rapport que nous avons dit.

293. De là on tire une proportion pour la diminution du dégré, qui a lieu aussi dans l'augmentation de la distance, & la diminution de la gravité depuis le pôle jusqu'à l'équateur, comme nous l'avons démontré (n. 174), savoir que toutes ces diminutions & augmentations sont à très peu près comme le quarré du co-sinus de la latitude, ou comme le sinus verse du double du complément de la latitude. Car les quarrés du sinus & du co-sinus sont ensemble égaux au quarré du rayon, quantité constante; de même que la différence par excès d'un dégré quelconque sur un dégré pris sous l'équateur, jointe à sa différence par défaut au dégré du pôle, est égale à la différence totale & constante de la gravité sous le pôle & l'équateur. Ainsi le quarré du rayon étant au quarré du sinus, comme la différence totale est à la différence par excès; le même quarré du rayon sera au quarré du co-sinus, comme la différence totale à la différence par défaut, qui sera par conséquent en raison du quarré du co-sinus. Or ce quarré est en raison du sinus verse d'un arc double, ou du sinus verse du double du complément; & c'est la même démonstration pour la distance & la gravité.

En quel rapport ils diminuent.

294. On peut tirer de ce théorème, ou du théorème précédent d'où celui-ci est déduit, une méthode assez facile pour déterminer l'espece de l'ellipse par deux dégrés quelconques du méridien, pourvu qu'ils soient pris en des latitudes différentes, comme nous l'avons déterminé à la fin du chapitre précédent par deux longueurs du pendule, observées en des lieux qui different en latitude. Car on aura d'abord cette proportion : comme la moitié de la différence des sinus verses des latitudes doubles est au rayon, ainsi la différence des dégrés dont on a la mesure, est à un quatrieme terme, qui sera la différence des dégrés sous l'équateur & le pôle : puis celle-ci : comme le tiers de cette différence est à l'un ou l'autre de ces dégrés indifféremment, pris pour le dégré moyen; ainsi la différence du demi-diametre de l'équateur au demi-axe, ou, ce qui revient au même, ainsi l'applatissement est à un demi-diametre moyen de la Terre. Cette seconde analogie est une suite du n. 291; la premiere se démontre ainsi : puisque les diminutions des dégrés sont comme

Déterminer l'espece de l'ellipse par deux dégrés.

nutions de ces dégrés comparés au dégré du pôle, qui sera la même que la différence de ces dégrés entre eux, sera à la diminution qui convient au quart-de-cercle entier, comme la différence des sinus verses des latitudes doubles, correspondantes à ces dégrés, est à la différence des sinus verses d'une latitude double, & d'un double quart-de-cercle, dont le premier sinus $= 0$, le second est le diametre ou le double du rayon. Donc la différence de ces sinus verses est au double du rayon, ou bien la moitié de cette différence est au rayon, comme la différence de ces dégrés est à la différence de deux autres dégrés du méridien, pris l'un à l'équateur, l'autre au pôle.

Déterminer l'ellipticité.

295. A l'égard de l'ellipticité qui est le rapport de la différence des demi-axes de l'ellipse génératrice, à l'un de ces demi-axes, on la trouvera sans peine, en divisant le tiers de la différence qu'on vient de trouver entre les dégrés sous l'équateur & le pôle par un dégré entier. Dès qu'on aura l'ellipticité qui résulte de deux dégrés, il sera aisé d'avoir celle qui est déterminée par deux autres, puisque cette ellipticité est en raison directe de la différence des dégrés, & en raison inverse de la différence des sinus verses des latitudes doubles.

Gravité newtonienne & densité de la Terre comparées à la mesure des dégrés.

297. De là on peut aisément connoître si la gravité newtonienne, jointe à une densité égale à égales distances du centre, s'accorde avec la mesure des dégrés, de même que sur la fin du chapitre premier nous avons examiné si elle pouvoit se concilier avec les observations du pendule à secondes. Les dégrés dont nous avons une mesure exacte se réduisent à ceux-ci : celui que M. *de Maupertuis* avec trois autres Académiciens, a mesuré dans la Laponie; ceux qui ont été mesurés en France par MM. *Cassini* & *de la Caille*, & dont la longueur, après quatre changemens faits au dégré de M. *Picart*, est enfin assurée; celui que MM. *Bouguer* & *de la Condamine* ont déterminé au Pérou; celui que M. l'Abbé *de la Caille* vient de mesurer au *Cap* de Bonne Espérance; auxquels on me permettra d'ajouter celui que nous avons mesuré dans les Etats du Pape. Toutes ces opérations ont été faites avec beaucoup d'exactitude, & avec des mesures prises toutes

ſur la même toiſe. On y a eu égard à tous les mouvemens des étoiles fixes; on s'y eſt ſervi d'excellens ſecteurs; on y a apporté toutes les précautions néceſſaires pour en aſſurer le ſuccès. Il y a encore des dégrés qui ont été meſurés en d'autres lieux, comme celui de *Norwood* en Angleterre, celui que *Snellius* meſura autrefois en Hollande, & qui a été réformé d'abord par *Muſchembroek*, enſuite par M. *Caſſini*. Mais il n'y a aucun doute qu'on ne doive faire beaucoup moins de fonds ſur ces opérations que ſur les précédentes. Celle de *Norwoode* n'eſt pas à beaucoup près aſſez préciſe, & l'on ne connoît point aſſez exactement la longueur de la meſure dont il s'eſt ſervi; d'ailleurs l'Aſtronomie pratique n'étoit pas encore aſſez parfaite pour qu'on puiſſe comparer ſon dégré avec les nôtres.

298. A la vérité le dégré de *Snellius*, réformé par M. *Caſſini de Thury*, eſt plus exact. On le trouvera avec les divers changemens qui y ont été faits, dans l'écrit de M. *de Thury*, inſéré dans les Mémoires de l'Académie royale des Sciences de l'année 1747. Ce dégré répond à une latitude de 50°, 4′, 17″. Suivant la méthode de *Snellius*, il ſeroit de 55020 toiſes. *Muſchembroek* a retenu les obſervations aſtronomiques de *Snellius*, & après avoir corrigé les triangles, il l'a trouvé de 57033 toiſes. M. *Caſſini* le fils répéta en 1701 les obſervations aſtronomiques, & le réduiſit à 56496 toiſes. Enfin M. *de Thury*, fils de ce dernier, ayant meſuré une nouvelle baſe, s'eſt ſervi des obſervations aſtronomiques de ſon pere, & a trouvé le dégré de 57145 toiſes. Je crois qu'on peut ſans témérité ſoupçonner des erreurs de quelques ſecondes dans ces opérations aſtronomiques, vu que la pratique de l'Aſtronomie & les inſtrumens qui ſont à ſon uſage, n'étoient pas alors au point de perfection où nous les voyons aujourd'hui. Dégré de *Snellius*.

299. Nous allons donner une liſte des dégrés ſur leſquels on ne peut former aucun doute raiſonnable. Les chiffres de la premiere colonne marquent le rang de chaque dégré en particulier, afin qu'on puiſſe les déſigner chacun par ſon rang; ceux de la ſeconde marquent les latitudes des dégrés correſpondans; & ceux de la troiſieme, la grandeur des dégrés, exprimée en toiſes. Le premier dégré eſt celui qui a été me- Autres dégrés.

suré dans la Laponie. Je l'ai tiré de l'ouvrage que M. *de Maupertuis* a publié à ce sujet; mais comme on n'y avoit point eu d'égard à la réfraction, j'en ai retranché 16 toises, selon qu'il se pratique aujourd'hui à l'égard de ce dégré. Les onze dégrés qui suivent sont tirés du Livre de M. *Cassini de Thury*, intitulé *Méridienne vérifiée ;* le treizieme est celui que nous avons mesuré ; le quatorzieme est tiré des ouvrages de M. *Bouguer* & de M. *de la Condamine*, en prenant un milieu ; le quinzieme, d'un petit écrit de M. l'Abbé *de la Caille* qui l'a mesuré.

	Latitudes.	Dégrés en toises.		Latitudes.	Dégrés en toises.
1	66°. 20′	57422	9	45°. 45′	57050
2	49 . 56	57084	10	45 . 43	57040
3	49 . 23	57074	11	44 . 53	57042
4	49 . 3	57069	12	43 . 31	57048
5	47 . 58	57071	13	43 . 1	56979
6	47 . 41	57057	14	0 . 0	56753
7	46 . 51	57055	15	—33 . 18	57037
8	46 . 35	57049			

A ces dégrés du méridien on peut ajouter le dégré du parallele que M. *Cassini de Thury* & M. l'Abbé *de la Caille* ont trouvé de 41618 toises, dans la latitude de 43°, 32′ (1).

---

(1) On peut aujourd'hui ajouter encore d'autres nombres qui ont rapport à de nouvelles mesures faites les unes en Italie par le P. *Beccaria*, les autres en Allemagne par le P. *Liesganig*, & qui sont tirés des manuscrits envoyés de *Turin* & de *Vienne*. Les mesures du P. *Liesganig* s'impriment actuellement; celles du P. *Beccaria* paroîtront à la fin de la collection de ses ouvrages qui sont également sous presse.

La latitude de *Mondovi* est de 44°, 23′, 3″; celle de *Turin* de 45°, 4′, 14″; celle d'*Andrate* de 45°, 31′, 18″.

On a trouvé en toises de *Paris*, entre *Mondovi* & *Turin*, 38680; entre *Turin* & *Andrate* 26140. *Andrate* est situé au pied d'une montagne fort élevée, & qui de ce côté est le commencement d'une des plus grosses & des plus hautes montagnes des Alpes, située vers le nord. De ces mesures & de ces latitudes on tire la table suivante.

300. Ceci donneroit déja le moyen de faire quantité de comparaisons, puisque des dégrés quelconques du méridien, pris deux à deux, déterminent l'applatissement de la Terre dans l'hypothese de l'ellipse de *Newton*. Mais on ne doit point comparer ensemble deux dégrés trop proches l'un de l'autre, parceque les différences étant alors trop petites, une erreur fort légere dans les observations en produiroit une fort considérable dans le résultat. Si donc de tous les dégrés de France on ne prend que le troisieme, qui est celui de M. *Picart*, pour une latitude de 49°, 23', dégré sur lequel on a repassé tant de fois, & avec une exactitude si scrupuleuse; il restera cinq dégrés, savoir le premier qui est celui de la Laponie, le troisieme qui est un dégré de France, & les trois derniers qui sont ceux d'Italie, de la Province de *Quito* & du *Cap* de Bonne Espérance. On peut d'abord examiner, ainsi que nous l'avons fait pour le pendule à la fin du premier chapitre, si les différences du premier dégré du méridien, qui est le plus proche de l'équateur aux quatre autres dégrés, Cinq dégrés choisis.

Entre	Amplitude de l'arc.	Mesure de l'arc en toises de *Paris*.	Valeur du dégré en toises de *Paris*.
Mondovi & Turin . . .	40'41"	38680	57075
Turin & Andrate . . .	27. 4	26140	57990
Mondovi & Andrate .	1°. 7.45	64820	57405

La latitude de *Vienne* en Autriche est de 48°, 12'. La toise de *Vienne* est à celle de *Paris*, comme 100000 à 102764. De ce rapport, & des mesures, & des arcs interceptés, on tire la table suivante.

Entre	Amplitude de l'arc.	Mesure de l'arc en toises de *Vienne*	Valeur du dégré en toises de *Paris*.
Vienne & Sobieschitz . .	1°. 2' . 29"0	61092.5	57082.3
Vienne & Brunn	0 . 58 . 53.5	57585.0	57090.8
Vienne & Gratz	1 . 8 . 24.8	66682.9	56909.6
Gratz & Varadin . . .	0 . 45 . 49.9	45019.3	57351.3
Vienne & Varadin . . .	1 . 54 . 16.5	111702.2	57717.7
Sobieschitz & Varadin .	2 . 56 . 45.5	172794.7	57076.9

répondent aux ſinus verſes des latitudes doubles, ou de combien elles s'en écartent. Je l'ai fait, & j'ai cherché enſuite la différence que donne la comparaiſon des dégrés pris deux à deux, dans cette hypotheſe de proportionnalité avec les ſinus verſes: différence qui ſeroit par-tout la même, ſi les différences des dégrés ſuivoient toujours cette proportion. Or le tiers de cette différence, diviſé par le dégré le plus proche de l'équateur, détermine l'ellipticité, & je réduis cette fraction, ſans en changer la valeur, à une fraction dont le numérateur eſt l'unité.

Explication des deux tables ſuivantes.

301. Je propoſerai donc deux tables: la premiere a ſept colonnes, dont la premiere contient par ordre les noms des dégrés; la ſeconde, leur latitude; la troiſieme, la moitié du ſinus verſe d'une latitude double; la quatrieme, le nombre

---

On voit de part & d'autre l'action des montagnes ſur le fil à plomb du ſecteur (nous en avons déja fait mention dans la note du n°. 65, Liv. I). Si l'on compare les deux premiers dégrés du P. *Beccaria*, qui ſe touchent, le différence eſt de 915 toiſes; différence qui ſurpaſſe celle des dégrés meſurés ſous l'équateur & le cercle polaire, au lieu qu'elle ne devroit être que d'un très petit nombre de toiſes. Le fil à plomb, attiré vers le nord par les montagnes des Alpes, a changé de direction, & renvoyé du côté oppoſé le zénith qu'il indiquoit, en le rapprochant de celui de *Turin:* d'où il eſt arrivé que l'arc intercepté par les deux zéniths, s'eſt trouvé trop petit & le dégré trop grand. Pour évaluer l'action de ces montagnes, nous ſuppoſerons en ce lieu un dégré qui répond à peu près à cette latitude, déduit du précédent, & d'autres dégrés meſurés ailleurs, ſavoir de 57095 toiſes: c'eſt le plus qu'on puiſſe lui donner, & il devroit plutôt être moindre. On en déduit l'arc par cette analogie: 57095 eſt à 57990, comme l'arc qu'on a trouvé de 27′ 4″, = 1624″, eſt à 1649″ qu'on auroit du avoir. La différence eſt 25″, & c'eſt auſſi la différence par excès de l'attraction des montagnes vers le nord à *Andrate*, ſur leur attraction à *Turin*. Elle eſt plus grande que celle de la montagne de *Chimboraço* en Amérique; mais c'eſt encore peu de choſe, eu égard à la grandeur de ces montagnes: ce qui prouve, ou qu'il y a dans ces montagnes mêmes de grandes cavernes, ou que la Terre eſt beaucoup plus denſe vers le centre que vers la ſurface.

Des montagnes plus petites ont une action moindre à la vérité, mais qui ne laiſſe pourtant pas d'être aſſez conſidérable. C'eſt ce qui ſe voit dans deux dégrés du P. *Lieſganig*, l'un entre *Gratz* & *Vienne*, l'autre entre *Gratz* & *Varadin*. Ces dégrés, quoique contigus, different de 442 toiſes.

de toises de chaque dégré ; la cinquieme, leur excès sur le premier dégré dont la latitude = 0. ; la sixieme, ce même excès calculé dans l'hypothese de la proportionalité avec les sinus verses ; la septieme, l'erreur ou la différence de l'excès calculé à l'excès observé. Cette premiere table nous donnera le moyen de construire la seconde, qui n'a que trois colonnes ; dont la premiere contient les rangs des dégrés combinés ; la seconde, l'excès qu'on en conclut pour un dégré sous le pôle sur un dégré proche l'équateur ; la troisieme, la fraction que donne le tiers de cet excès divisé par le premier dégré, c'est-à-dire l'ellipticité. L'excès du dégré de M. l'Abbé *de la Caille* sur le nôtre, prouve l'allongement de la figure. C'est pour cela que dans la seconde table j'ai marqué du signe négatif sa différence & son ellipticité comparée à celle de notre

---

Il nous est encore venu depuis peu un autre dégré, mesuré dans l'Amérique septentrionale par MM. *Masson* & *Dixon*, dans la latitude de 39°, 12', & qui s'est trouvé de 56888 toises de *Paris*. On le voit dans les Transactions philosophiques, *année* 1768, *tome* 58, *page* 327. Il y a en cet endroit une table de plusieurs dégrés, du nombre desquels sont le premier dégré du P. *Beccaria*, & un dégré moyen du P. *Liesganig*, tels qu'ils les ont eux-mêmes envoyés à la Société royale, avec une réduction d'un petit nombre de toises. On y voit aussi deux dégrés choisis sur tous ceux qui ont été mesurés en France. Les deux dernieres colonnes font connoître les Auteurs de la mesure, & l'année où elle a été faite. Nous proposons ici cette table dont nous ferons usage dans les notes suivantes.

Dégrés en toises.	Latitude moyenne.	Année de la mesure.	Auteurs de la mesure.
57422	66°. 20' sept.	1736 & 1737	M. *de Maupertuis*.
57074	49 . 23	1739 & 1740	MM. *de Maupertuis* & *Cassini*.
57091	47 . 40	1768	Le P. *Liesganig*.
57028	45 . 0	1739 & 1740	M. *Cassini*.
57069	44°. 44	1768	Le P. *Beccaria*.
56979	43 . 0	1752	Les PP. *Boscovich* & *Maire*.
56888	39 . 12	1764 & 1768	MM. *Masson* & *Dixon*.
56750	00 . 00	1736 & 1743	MM. *de la Condamine* & *Bouguer*.
57037	33 . 18 mérid.	1752	M. l'Abbé *de la Caille*.

dégré, & que j'ai donné le même ſigne à ſon erreur dans la premiere table que voici.

DÉGRÉ.	Latitude.	$\frac{1}{2}$ ſin. verſ. pour un ray. de 10000.	Nombre de toiſes.	Différence au premier dégré.	Différence calculée.	Erreur.
De QUITO . . .	0°. 0′	0	56751	0	0	0
Du CAP DE B. E.	33 . 18	2987	57037	286	240	—46
De ROME . . .	42 . 59	4648	56979	228	372	144
De PARIS . . .	49 . 23	5762	57074	323	461	138
De LAPPONIE .	66 . 19	8386	57422	671	671	0 (1)

Irrégularité de la premiere.

302. Dans la derniere colonne de cette table on voit de combien les dégrés intermédiaires s'écartent de la raiſon doublée des ſinus des latitudes, ou de la raiſon des ſinus verſes des latitudes doubles, ſuppoſé que le premier & le dernier

---

(1) A cette table nous en ſubſtituerons une plus grande, tirée des 9 dégrés de la note précédente, nº. 299, & nous mettrons ici le dégré de M. *de la Caille* dans le rang que requiert ſa latitude, comme ſi cette latitude étoit ſeptentrionale. L'ordre des dégrés eſt indiqué par les nombres naturels, en commençant par le dégré de l'équateur. Nous ferons uſage de cette table dans la note ſur le nº. 303.

ORDRE des dégrés.	Valeur des dégrés.	Latitude.	$\frac{1}{2}$ du ſinus verſe d'une latit. double pour le ray. 10000.	Différence obſervée au premier dégré.	Différence calculée.	Erreur.
1	56750	00°. 00′	0000	000	000	00
	57037	33 . 18	3015	287	242	—45
3	56888	39 . 12	3995	138	320	192
4	56979	43 . 0	4651	229	373	144
5	57069	44 . 44	4954	319	397	78
6	57028	45 . 0	5000	278	401	123
7	57091	47 . 40	5465	341	438	97
8	57074	49 . 23	5762	324	462	138
9	57422	66 . 20	8389	672	672	0

ſoient juſtes. La différence calculée du troiſieme & du quatrieme dégré étant poſitive, celle du ſecond eſt négative. Quand même il arriveroit quelque léger changement dans le premier & le dernier dégré, le ſecond ne s'éloigneroit pas ſenſiblement de ce rapport. Il n'en eſt pas ainſi du troiſieme & du quatrieme : la différence eſt déja trop ſenſible pour qu'on puiſſe les concilier avec la raiſon doublée. Voyons maintenant dans la ſeconde table l'excès du dernier dégré ſur le premier provenant de la comparaiſon des dégrés pris deux à deux, & l'ellipticité qui en réſulte.

Dégrés comparés.	Excès du dégré au pôle ſur le dégré à l'équateur.	Ellipticité.	Dégrés comparés.	Excès du dégré au pôle ſur le dégré à l'équateur.	Ellipticité.
1 . 5	800	$\frac{1}{213}$	2 . 4	133	$\frac{1}{128}$
2 . 5	713	$\frac{1}{239}$	3 . 4	853	$\frac{1}{200}$
3 . 5	1185	$\frac{1}{144}$	1 . 3	491	$\frac{1}{347}$
4 . 5	1327	$\frac{1}{128}$	2 . 3	—350	$-\frac{1}{486}$
1 . 4	542	$\frac{1}{314}$	1 . 2	957	$\frac{1}{78}$

303. On pourroit auſſi comparer le dégré du parallele meſuré par MM. *Caſſini de Thury* & *de la Caille* avec ceux qu'on voudroit de ces dégrés, par le problême du n. 280. Mais un dégré du parallele ne peut ſe meſurer avec une préciſion ſuffiſante. Or on voit par cette table quelle eſt l'irrégularité des

Irrégularité de la ſeconde.

Cette ſuite, comme on voit, n'eſt point réguliere ; ce qui vient de l'irrégularité de tiſſure des parties internes de la Terre, & des inégalités de ſa ſurface. Les erreurs ci deſſus ne ſont aſſurément point légeres, quoi qu'en diſent quelques Auteurs qui les attribuent à des obſervations dont ils ne connoiſſent pas le dégré de certitude, n'en ayant jamais fait de ſemblables. Il eſt aiſé de ſe convaincre par la lecture de ce Livre, que pour peu qu'un Obſervateur ſoit attentif, les erreurs commiſes dans ſes obſervations ne produiront pas dans le dégré une différence de 20 toiſes. Nous pourrions ajouter auſſi à la table du n°. ſuivant un ſupplément pour en tirer une ellipticité moyenne ; mais ce ſupplément même ſe trouvera beaucoup mieux placé dans la note ſur le n°. 305.

dégrés, puisqu'ils donnent des combinaisons si différentes. Si l'on prend un milieu entre ces dix combinaisons, le tiers de l'excès moyen sera 222, qui donne pour l'ellipticité $\frac{1}{155}$. Mais si l'on rejette la sixieme & la neuvieme qui sont si différentes des autres, & dont les dégrés sont peu éloignés entre eux, le milieu sera 286, & l'ellipticité $\frac{1}{198}$. Mais ce milieu même differe encore beaucoup de plusieurs d'entre ces huit déterminations (1).

Que ces dégrés ne sont point ceux d'une ellipse.

304. Ainsi il est évident que les déterminations de ces dégrés ne peuvent se concilier avec l'ellipse de *Newton*, ni avec aucune ellipse plus ou moins applatie. Car cinq dégrés pris à volonté devroient toujours donner la même ellipse; or l'on voit par le peu d'accord qu'ils ont entre eux, que les différences observées ne sont point proportionnelles aux sinus verses des latitudes doubles. Si elles l'étoient, chaque combinaison de dégré, ainsi que nous l'avons dit, donneroit la même ellipticité.

M. *Euler* tâche de les concilier.

305. Il y en a qui pour concilier toutes choses font violence aux observations; comme a fait récemment le célebre M. *Euler* dans un Mémoire dont M. *de la Condamine*, actuellement à *Rome*, m'a fait l'honneur de me communiquer le précis. L'Auteur retranche 19 toises à chacun des dégrés de Lapponie, d'Afrique & de *Quito*; & moyennant cette diminution, il les concilie avec l'ellipse newtonienne. Mais il ne lui faut pas moins qu'une correction de 169 toises pour le dégré de M. *Picart*, qu'il dit pour cela même lui être fort suspect, de sorte qu'il desire qu'on fasse de nouvelles opérations en France. Mais il n'est pas vraisemblable qu'il puisse se trouver une si grande erreur dans des opérations faites avec tant de soins, & par de si habiles Astronomes. On a déterminé en France tant de dégrés par le moyen de plusieurs bases si souvent vérifiées, & de tant d'observations réitérées, qui s'écartent unanimement de la mesure que deman-

(1) La note relative à ce n°. est trop longue pour pouvoir être insérée ici: on a jugé plus à propos de la mettre à la fin de ce Livre en forme d'appendix.

deroit M. *Euler*, qu'il ne paroît pas qu'on puisse faire avec fondement un changement si considérable au dégré de France. D'ailleurs la différence qui se trouve entre ces dégrés comparés entre eux, & à celui de M. *Picart*, est trop inférieure à celle qu'il faudroit supposer pour cette erreur prétendue. Enfin notre dégré d'Italie s'accorde trop bien avec celui de M. *Picart* (puisqu'il en differe de 95 toises pour une différence de 6°, 23′ en latitude; ce qui revient à 15 toises, ou environ, pour chaque dégré, comme cela doit être) pour que le sentiment de M. *Euler* ait de la vraisemblance. Ceci paroîtra encore plus évident, si l'on se rappelle ce que j'ai exposé dans le quatrieme Livre touchant les limites où doivent être renfermées les erreurs que l'on pourroit craindre aujourd'hui dans de pareilles opérations (1).

Hypothese de M. *Bouguer*. Déterminer la courbe par les dégrés.

306. Il y en a qui ont recours à d'autres hypotheses: telle est celle de M. *Bouguer*, suivant laquelle les augmentations des dégrés sont, non plus comme les quarrés, mais comme les quarrés de quarrés des sinus de la latitude. Mais cette hypothese, qui d'ailleurs s'accorde assez bien avec les dégrés de Lapponie, de France, du Pérou & d'Italie, est détruite par celui que M. l'Abbé *de la Caille* a mesuré au *Cap* de Bonne Espérance (2). Ajoutez qu'il n'y a aucune cause physique sur laquelle on puisse appuyer cette proportion plutôt qu'une autre. Au reste M. *Bouguer* résoud généralement par le calcul infinitésimal, le problême dans lequel étant donnée la suite des dégrés, on cherche la courbe; & de cette solution générale il déduit quelques cas particuliers, nommément celui dont nous venons de parler, & dont l'hypothese lui réussit pour lors, mais qui ne peut plus absolument subsister, comme

(1) Depuis l'impression de cet ouvrage on a vérifié encore ce dégré, & l'on n'y a trouvé aucune différence.

(2) M. *de la Condamine* l'avoit prédit. *N'y a-t-il pas lieu de craindre*, dit-il, *que la mesure d'un nouveau dégré, que j'ose prévoir que nous aurons bientôt & de bonne main, ne nous oblige à chercher un nouveau rapport qui ne conviendroit peut-être pas mieux aux différences observées entre les longueurs du pendule à différentes latitudes?* Mes. des trois prem. dég. du mérid. art. 30.

je l'ai dit, depuis les opérations de M. l'Abbé *de la Caille*. Comme ce problême est curieux, j'en vais donner une construction, sans autre secours que celui de la Géométrie pure dont je me suis jusqu'ici contenté; & après que j'aurai comparé quelques dégrés, je proposerai mon sentiment dont j'ai déja insinué quelque chose dans le premier Livre sur la figure de la Terre.

Par le développement d'une courbe. Pl. IV. fig. 25.

307. Pour trouver le méridien par les dégrés, considérez dans la figure 25 le quart FHG de la circonférence d'une courbe qui par son développement produit le quart ADB d'un méridien. Soit une tangente quelconque HD de cette développée, qui rencontre le demi-diametre AC de l'équateur au point M, & le méridien en D, & qui doit être égale au rayon du cercle osculateur de la courbe en D, & à l'arc HF ajouté au premier rayon FA. Soit une partie de cet arc infiniment petit H*h*, qu'on pourra prendre pour une partie de la tangente continuée; menez HL, *hl*, DE perpendiculaires à AC, & *h*I parallele à la même ligne AC.

Trouver la développée.

308. L'angle EMD exprime la latitude du lieu, puisque MA prolongée aboutit à l'équateur, & MD au zénith. Ainsi l'angle H*h*I, qui est égal à l'angle interne & opposé *h*M*l*, & par conséquent à l'angle EMD, sera égal à la latitude du lieu. Donc H*h* est à HI, comme le rayon au sinus de la latitude; & H*h* est à *h*I ou *l*L, comme le rayon au co-sinus de cette latitude. Or H*h* est l'augmentation de l'arc FH, & par conséquent du rayon du cercle osculateur, qui est donné par-là même qu'on connoît le dégré pour une latitude quelconque. On aura donc un moyen très facile de construire le problême par la quadrature des courbes. Car de l'analogie précédente, il suit que le rectangle sous H*h*, & le sinus de la latitude, est égal au rectangle sous le rayon, & l'augmentation HI de l'ordonnée LH; & que le rectangle sous H*h*, & le co-sinus de la latitude, est égal au rectangle sous le rayon, & *h*I ou L*l*, qui est l'augmentation de l'abscisse FL. D'où il suit que l'ordonnée entiere LH est égale à la somme des premiers rectangles, divisée par le rayon, & que l'abscisse entiere FL est égale à la somme des derniers, divisée de même par le rayon; c'est-à-dire que l'une & l'autre est égale

à

à une aire donnée, (puisqu'on connoît tous les rayons des cercles osculateurs qui répondent à toutes les latitudes), divisée par une ligne donnée.

309. Soit par exemple (fig. 26) ADA' un quart-de-cercle, dont le rayon FA soit égal au rayon FA de la figure 25, qui est le rayon du cercle osculateur en A sous l'équateur, & déterminé par le premier dégré pris sous l'équateur même. Ayant coupé sur AF, A'F prolongées un rayon osculateur AH, A'H', pour une latitude quelconque exprimée dans la figure 26 par l'arc AD; menez DI, HI paralleles à AF, F'A', & qui se rencontreront en I, & DI', H'I' paralleles à A'F, FA, & qui se rencontreront en I'. Si par tous les points I, I' on trace les courbes FIL, AI'M', ces courbes seront données, puisqu'on aura par les latitudes tous les rayons de courbure. Prenons maintenant dans la figure 25 une abscisse FL égale à l'aire AFH'I' de la figure 26, divisée par FA; & dans la même figure 25 une ordonnée LH égale à l'aire FHI (fig. 26), pareillement divisée par FA; le point H (fig. 25) sera à la courbe FHG, qui est la développée de la courbe cherchée ADB, de sorte que si on l'entoure en GHF d'un fil augmenté de la longueur FA égale à FA de la figure 26, on pourra décrire par son développement cette courbe cherchée. Construction. Pl. IV. fig. 25. 26.

310. Car H*h* & H'*h'* (fig. 26) doivent être égales à H*h* de la figure 25; de plus si les lignes DI, *di*, DI', *di'* rencontrent les rayons FA, FA' en E, *e*, E', *e'*, les sinus & co-sinus de la latitude seront DE & DE', ou HI & H'I'; & par conséquent les petites aires I'H'*h'i'*, IH*hi* doivent être égales aux produits du rayon FA par les petites lignes HI, *h*I (fig. 25). D'où il suit que les aires entieres AFH'I', FHI (fig. 26) sont égales aux produits de FA par les lignes entieres FL, HL (fig. 25); c'est-à-dire que FL, HL doivent être égales à ces aires divisées par FA. Or on les a pris précisément de cette longueur. Démonstration.

311. Ceci revient à la solution générale de M. *Bouguer* qui discute avec une très grande sagacité plusieurs points qui servent à l'éclaircir, & qui examine plusieurs hypotheses particulieres. Il s'attache principalement à deux: la premiere est celle dans laquelle les accroissemens des dégrés, ou des lignes Premiere hypothese de M. *Bouguer*.

la latitude; & la seconde celle où ils sont comme les quarrés-quarrés de ces sinus. Il avoit trouvé que la premiere hypothese, qui est la même que celle qui a lieu dans la théorie de *Newton*, supposé que la Terre soit de figure elliptique, s'accordoit avec tous les dégrés qu'on avoit jusqu'alors mesurés, celui de la Lapponie, celui de *Quito*, & même celui de France mesuré par M. *Picart*, & réformé par les observations astronomiques des Académiciens qui étoient revenus du cercle polaire, & qui lui avoient assigné 57183 toises. Ce dégré ainsi corrigé s'accordoit assez bien avec cette hypothese; & ce qui confirmoit le plus M. *Bouguer* dans son sentiment, c'est qu'en déterminant par-là la grandeur du sphéroïde, le dégré même du parallele, mesuré par MM. *de Thury* & *de la Caille*, s'accordoit à 11 toises près avec celui que donne le calcul.

Seconde hypothese du même Auteur.

312. Mais on découvrit peu après que M. *Picart* ne s'étoit pas seulement trompé dans les observations astronomiques, mais encore dans les mesures géodésiques qu'on a répétées pour cette raison plusieurs fois, & avec toute l'exactitude possible; d'où l'on a connu enfin que les erreurs de M. *Picart* s'étoient, par le plus grand bonheur du monde, compensées mutuellement, & que le dégré qu'il avoit trouvé de 57060 toises, étoit de 57074. Pour lors il fallut abandonner cette hypothese & en chercher une nouvelle. Or M. *Bouguer* a trouvé que les différences du dégré de *Quito* à ceux de Lapponie & de France, suivoient à peu près le rapport des quarrés-quarrés, ou quatriemes puissances des sinus des latitudes. Il a donc embrassé cette hypothese, & il a donné une solution du problême pour ce cas particulier.

Elle est détruite par le dégré de M. l'Abbé *de la Caille*.

313. Notre dégré même d'Italie ne s'écarte pas beaucoup de la nouvelle hypothese; car dans la seconde table de l'Auteur, page 305, on trouve que pour une latitude de 43°, le dégré du méridien est de 56961 toises; & le nôtre qui est situé dans la même latitude, est de 56979; ce qui ne donne qu'une différence de 18 toises. Le dégré du parallele ne s'en écarte pas non plus de beaucoup : suivant la table de M. *Bouguer* il devroit être de 41633 toises; on l'a trouvé de 41618;

la différence n'eſt que de 15 toiſes. Mais le dernier dégré de MM. *Caſſini* & *de la Caille* s'en éloigne bien plus; car il eſt de 57048 toiſes pour une latitude de 43°, 31', tandis que ſuivant la table de M. *Bouguer* il ne devroit être que de 56969, c'eſt-à-dire moindre de 79 toiſes. Néanmoins M. *Bouguer* ne s'en inquiétoit pas beaucoup, puiſqu'il n'a fait aucune mention de cette différence, quoique *la Méridienne de France vérifiée* de M. *Caſſini* eût déja paru cinq ans auparavant. Mais le dégré que vient de meſurer M. l'Abbé *de la Caille* au *Cap* de Bonne Eſpérance contrarie bien davantage la nouvelle hypotheſe: il ne devroit être, ſuivant la table de M. *Bouguer*, que de 56841 toiſes dans une latitude de 33°, 18'; M. *de la Caille* l'a trouvé de 57037, ou de près de 200 toiſes plus long; ce qui renverſe totalement l'hypotheſe dont nous parlons.

Ce dégré s'accorde avec la premiere hypotheſe; au contraire des autres dégrés.

314. Ce dégré de M. l'Abbé *de la Caille* eſt bien plus conforme à la premiere hypotheſe, dans laquelle les accroiſſemens des dégrés ſont proportionnels aux quarrés des ſinus de la latitude. Car dans la premiere table de M. *Bouguer*, il eſt de 56986 toiſes, & ne differe par conſéquent que de 51 toiſes de la meſure de M. l'Abbé *de la Caille*; différence qui ſeroit encore bien moindre ſi l'on faiſoit quelque petit changement aux dégrés de *Quito* & de Lapponie; mais, comme nous l'avons vu, ceux de France & d'Italie y répugnent ſi fort, & s'accordent tellement entre eux, qu'on ne peut abſolument *ſuſpecter* les obſervations. De quelque côté qu'on ſe tourne, on ne voit rien de régulier, rien de fixe ni de conſtant.

Inutilité de pluſieurs autres hypotheſes.

315. A ces hypotheſes défectueuſes on pourroit en ſubſtituer ſucceſſivement pluſieurs autres qui s'accordaſſent avec un plus grand nombre de dégrés, ou déduire de toutes les opérations qui ont été faites juſqu'ici la courbe décrite par la développée de la figure 25, en ne prenant que ceux de ſes points qui ſont déterminés par les dégrés dont nous avons la meſure, leſquels ne feroient pas en ſi petit nombre, ſi l'on vouloit faire uſage de tous les dégrés du n. 299; enſuite on pourroit trouver les rayons oſculateurs des courbes déterminées par une gravité dirigée à un centre donné. Dans le chapitre

précédent nous avons recherché la nature de ces courbes pour déterminer la loi de gravité qui donne ces sortes de dégrés ; mais l'application de la méthode donneroit ici lieu à plusieurs difficultés ; & il est très probable que la loi de gravité qui donneroit ces dégrés, ne s'accorderoit pas avec l'augmentation de la gravité depuis l'équateur jusqu'au pôle, qui peut seule aujourd'hui déterminer cette loi.

Irrégularité de la figure prouvée par celle des dégrés.

316. La plus grande source d'irrégularité, c'est que les dégrés se trouvent quelquefois moindres à une plus grande distance de l'équateur ; ce qui n'arrive pas seulement dans une petite étendue de pays comme en France, où, suivant le n. 299, le dégré qui est à 45°, 45′ de latitude, est plus grand que celui qui est dans la latitude de 46°, 35′ ; mais à une distance bien plus grande, puisque le dégré de M. l'Abbé *de la Caille* au *Cap* de Bonne Espérance dans la latitude de 33°, 18′, est plus grand que notre dégré d'Italie qui est par les 43°, 1′ de latitude ; d'où il faut conclure, ou que l'hémisphere austral est bien différent du septentrional, ou que la courbe décrite par la développée de la figure 25 est bien irréguliere, puisque si elle alloit toujours en se courbant vers le centre C, comme il est représenté dans la figure, les dégrés devroient toujours augmenter de l'équateur au pôle.

Hypotheses détruites par le dégré de *Rome*.

317. Indépendamment de tout cela, notre dégré comparé à celui de M. *Cassini* dans la partie méridionale de France, & presque dans la même latitude, détruit toutes ces hypotheses de gravité dirigée à un centre unique. Ces dégrés different entre eux de 69 toises, au lieu qu'ils devroient être à 7 ou 8 toises près de la même longueur, puisqu'en cette hypothese la courbe génératrice doit, comme nous l'avons vu, dans sa révolution autour de l'axe, être toujours égale & semblable à elle-même. Pour se désabuser de toutes ces hypotheses, il suffiroit de faire attention à ce que j'ai indiqué dans le chapitre précédent, savoir qu'on ne doit point faire pour chaque effet naturel autant d'hypotheses différentes, & que tous les phénomenes célestes qui prouvent la gravitation réciproque, sont trop opposés à l'hypothese d'une gravité dirigée à un centre unique.

319. De là il suit que notre dégré prouve l'existence d'une

loi de gravité dépendante de la disposition diverse des parties de la matiere à laquelle cette gravité se dirige, puisqu'on ne voit pas que l'inégalité des dégrés du méridien sous le même parallele puisse être attribuée à d'autre cause qu'au changement occasionné par les différentes dispositions de la matiere dans la direction des graves, & en même tems dans la courbure indiquée par l'équilibre. Notre dégré d'Italie est donc très favorable à la théorie de la gravité newtonienne: de plus, il en exclut toute homogénéité de la matiere, & toute progression réguliere de densité depuis le centre à la superficie, ou plutôt proche la superficie même, depuis l'équateur jusqu'au pôle, & prouve par-là même de l'irrégularité dans le tissu des parties. Si l'on compare entre eux les dégrés de France dont on voit la suite au n. 299, ils prouvent la même chose, puisque dans une si petite différence de latitude, leurs différences sont assez irrégulieres, comme on pourra s'en convaincre au premier coup d'œil, cette irrégularité étant trop grande pour pouvoir être attribuée au défaut de méthode ou d'exactitude dans les observations, dans un tems surtout où l'Astronomie est portée à un si haut point de perfection. On en trouve encore une preuve, ou pour mieux dire une démonstration, dans la comparaison de notre dégré avec celui du *Cap de Bonne Espérance* plus grand que le nôtre, quoiqu'il soit de dix dégrés plus proche de l'équateur; & ce qui achevé de nous convaincre de cette irrégularité, c'est l'exemple que j'ai apporté vers la fin du premier Livre des changemens qui arrivent dans les ouvrages de la nature, aussi simple dans tous ses élémens que variée dans leur assemblage. *Ce dégré prouve la gravité newtonienne.*

320. Voici donc ce que je pense en général sur tout ceci. Je suis persuadé en premier lieu que l'entreprise formée de déterminer la grandeur & la figure de la Terre par la mesure des dégrés, loin d'être finie est à peine commencée. M. *de Maupertuis* crut d'abord pouvoir avec deux dégrés, celui de Lapponie & celui de France, terminer toute la question; & sans attendre davantage, il voulut satisfaire l'empressement du public sur un point qui tenoit toute l'Europe en suspens, en publiant sa détermination de la figure de la Terre: mais il a changé depuis de sentiment. Quelque tems après M. *Que la question sur la figure de la Terre n'est point encore résolue.*

Bouguer, sur les mêmes principes, mais avec des dégrés différens, à savoir le sien & celui de Lapponie, crût également d'abord avoir fini la dispute, vu surtout que sa détermination s'accordoit avec les autres mesures qu'on avoit pour lors: mais il fut obligé ensuite de changer d'avis. Le dégré de M. *Ricart* corrigé, M. *Bouguer* imagina une nouvelle hypothese, par laquelle il expliquoit tout, quoiqu'on ne pût en rendre aucune raison ni physique, ni méchanique. Enfin est venu le dégré de M. l'Abbé *de la Caille* qui a renversé cette hypothese de fond en comble. Le nôtre détruit encore plus efficacement quantité de points qu'on avoit regardés jusqu'ici comme indubitables; par exemple que tous les méridiens fussent égaux. Jusqu'à présent plus on a mesuré de dégré, plus la figure de la Terre est devenue incertaine.

Avantages de la mesure des dégrés.

321. On a cependant retiré de grands avantages de ces opérations multipliées. Le premier est qu'on doit exclure toutes les hypotheses d'une gravité tendante à un centre donné; dont nôtre dégré prouve l'insuffisance. Le second, que cette irrégularité de courbure dans la courbe déterminée par l'équilibre, & sur laquelle se prend la longueur des dégrés, rend beaucoup plus probable la gravitation réciproque des parties de la matiere: le troisieme, que des dégrés mesurés jusqu'ici, on peut déja conclure très vraisemblablement, que la Terre est applatie vers ses pôles, puisque tous les dégrés intermédiaires, je veux dire notre dégré d'Italie, celui de M. l'Abbé *de la Caille* en Afrique, & tous les dégrés de France, sont plus petits que celui de la Lapponie, & plus grands que celui de *Quito*.

Ce qu'il y a encore d'incertain.

322. Mais jusqu'à quel point la Terre est elle applatie? Quelle est la forme de chaque méridien? Quelle est la progression de la densité depuis le centre à la superficie? Autant de questions que nous ne pouvons résoudre par la seule mesure des dégrés, non plus que la suivante: si dans les entrailles de la Terre il y a une grande irrégularité dans le tissu des parties de la matiere, ou si toutes ces inégalités & irrégularités de dégrés sont l'effet de ces moindres inégalités que nous voyons à la superficie. Bien plus, puisque la mesure des dégrés détermine le dégré de courbure de la courbe de l'équilibre,

nous ne savons pas même au juste si la courbe de l'équilibre rentre en elle-même; ou si elle tourne toujours en spirale, sans jamais se rencontrer, comme il pourroit absolument se faire. Car si l'on fait passer par la direction des graves, dans un lieu pris à volonté, & par le pôle, un plan quelconque, dans lequel on imagine une courbe qui parte de ce point, & qui soit dans tous ses points perpendiculaire aux directions des graves, il est évident que dans la théorie de la gravitation universelle & réciproque, sa courbure doit être irréguliere à cause des inégalités que forment les montagnes & les vallées, & du tissu irrégulier des parties de la Terre qui sont proches de la superficie; & cette irrégularité pourroit être si grande, que la ligne se courbât dans un sens contraire, le cercle osculateur devenant infini ou nul, ou même négatif, quoique cette courbe ne fût pas fort différente, ou même ne différât pas sensiblement d'un cercle ou d'une ellipse; à moins peut-être que dans la supposition où la masse intérieure de la Terre seroit bien moins irréguliere, la pesanteur vers la masse totale ne prévalût au point de diminuer l'effet des irrégularités qui sont proche la superficie. Or l'irrégularité de la courbure est prouvée par celle des degrés, quoique ces degrés nous donnent aussi lieu de croire que l'effet de ces inégalités est arrêté sensiblement par une force prépondérante de la masse, puisque cette irrégularité même des degrés est très peu de chose, comparée à la grandeur des degrés. Avec tout cela néanmoins il pourroit se faire que la courbe de l'équilibre, par un changement continuel dans sa courbure, qui pour être petit, ne seroit pas tout à fait insensible, après avoir fait un tour entier sur ce plan, ne rentrât point en elle-même, mais que passant au-dessus ou au-dessous de ce point, elle se développât ou se repliât à l'infini. Nous ignorons absolument si un pareil effet a lieu dans la nature.

323. En général il n'y a rien de certain sur la figure de la Terre, si l'on ne fait attention qu'aux mesures des degrés; mais si on leur ajoute les longueurs des pendules isochrones, que nous avons déja par des observations assez exactes, nous pouvons conjecturer fort vraisemblablement que les irrégularités dans le tissu des parties sont plus grandes à la surface, *Que les irrégularités de la Terre sont fort près de sa surface.*

& près de la surface, que dans les entrailles de la Terre; car celles de la surface, comme nous l'avons vu (n. 243), causent beaucoup plus d'irrégularité dans la grandeur des dégrés que dans l'allongement du pendule, tout au contraire des autres; & nous avons déja vu que les longueurs du pendule s'accordent assez bien avec une figure réguliere & elliptique de la Terre, mais que les longueurs des dégrés sont fort irrégulieres.

D'une gravité égale à égales distances.

324. On peut encore conclure que les observations faites jusqu'ici ne sont pas, comme quelques-uns le croient, contraires à l'hypothese d'un noyau d'une densité égale, à égales distances du centre. M. *Clairaut* a démontré, & on peut le déduire de nos démonstrations du n. 221 & suivans, que si la différence de la gravité sous l'équateur & le pôle, divisée par le total de la gravité, donne une fraction qui surpasse $\frac{1}{230}$ du tout, comme il devroit arriver dans le cas d'homogénéité, & que le noyau soit également dense à égales distances du centre, & dans l'hypothese de la gravité newtonienne; la densité moyenne du noyau surpassera celle des mers, mais que l'ellipticité sera moindre que $\frac{1}{230}$, quantité qui a lieu dans l'hypothese d'homogénéité. Or il a trouvé que cette fraction étoit réellement plus grande, & il assure d'autre part que la mesure des dégrés donne une ellipticité plus petite; d'où il conclut qu'on ne peut concilier ces deux choses qu'en supposant un certain dégré d'ellipticité dans le noyau. Nous avons aussi trouvé cette fraction plus grande (n. 251), à savoir $\frac{1}{176}$; mais en prenant un milieu entre les dix combinaisons du n. 302, nous en avons tiré une ellipticité qui est non pas plus grande que $\frac{1}{230}$, mais plus petite, savoir $\frac{1}{255}$. Il est vrai que suivant le n. 251, la premiere fraction $\frac{1}{178}$ donneroit pour l'ellipticité de la premiere hypothese $\frac{1}{317}$, moindre encore que $\frac{1}{255}$; mais sans recourir à cette hypothese, il est certain premierement que si on prend un milieu entre toutes les combinaisons des cinq dégrés, comme cela doit se faire, on aura une fraction moindre que $\frac{1}{230}$; en second lieu, que si l'on suppose de légeres différences dans la direction des graves, & dans la force de la gravité, occasionnées par les irrégularités qui sont proche la superficie de la Terre, il pourra aisément

arriver

arriver qu'en diminuant d'un côté la premiere fraction déterminée par les longueurs du pendule, ce qui augmentera l'ellipticité; & diminuant d'autre part l'ellipticité moyenne provenante des combinaisons des dégrés, on trouve le moyen de concilier le tout, & de ramener les choses à l'égalité.

Moyen de rendre plus exacte la mesure des dégrés.

325. Mais nous n'avons encore que cinq observations exactes sur la longueur du pendule, & autant de dégrés mesurés avec précision; il est à souhaiter qu'on augmente de beaucoup le nombre des uns & des autres; & pour ce qui regarde la mesure des dégrés, il y a moyen de leur sauver l'erreur causée par les irrégularités qui sont proche la superficie; c'est premierement de faire les observations astronomiques au sommet des montagnes plutôt que dans les plaines; car alors tout ce qu'il pourroit y avoir de matiere plus dense, ou de vuides souterreins proche la superficie, agissant plus obliquement sur un poids placé sur une hauteur, causeroit beaucoup moins de déviation dans le fil à plomb des instrumens astronomiques. Si de plus on fait des observations astronomiques dans toutes les stations, du moins dans plusieurs des plus élevées, il arrivera que ces irrégularités agissant en sens contraires, on pourra, en prenant un milieu, déterminer avec beaucoup plus de certitude la longueur précise de chaque dégré. Je n'ignore pas que ceci engage à bien plus de travail & de dépense; car il faudroit bâtir sur ces montagnes autant de petits observatoires de bois; il faudroit y faire de longues stations; mais il n'y a rien dont ne puisse venir à bout la patience des Astronomes & la magnificence des Rois.

Du noyau elliptique : de la gravité newtonienne.

326. Que si après un grand nombre d'observations de cette espece on trouvoit que la fraction moyenne, tirée des longueurs du pendule, & l'ellipticité moyenne des dégrés excédassent $\frac{1}{230}$, ce ne seroit pas encore une preuve qu'on dût nécessairement recourir à l'ellipticité du noyau. Ma seconde hypothese, dans laquelle la masse du centre agit en raison directe des distances, demande une ellipticité qui, suivant le n. 224, est toujours égale à une fraction déterminée par la gravité. D'ailleurs si des dix combinaisons de dégrés on rejette la sixieme & la neuvieme, par les raisons que nous avons dites au n. 303, & qu'on rende par-là l'ellipticité égale à $\frac{1}{195}$;

comme celle qu'on tire des pendules isochrones, est, suivant le n. 251, égale à $\frac{1}{176}$, ces valeurs n'ont pas entre elles beaucoup de différence. Je sais que cette hypothese d'une masse agissante ainsi du centre, est une hypothese arbitraire, & qu'elle n'a aucune liaison avec les autres phénomenes de la nature; mais l'ellipticité du noyau, qui doit tout concilier, n'est pas moins arbitraire, puisqu'on pourroit tirer le même avantage de plusieurs autres figures. D'un autre côté je ne crois pas même qu'il soit fort sûr qu'à une si grande proximité de la surface de la Terre, la loi de la gravité suive d'assez près la raison inverse des quarrés des distances. Dans l'opinion où je suis, que les forces mutuelles de tous les points de la matiere sont toutes exprimées par une courbe que j'ai proposée dans quelques Dissertations, je crois que dans les plus grandes distances, comme celles des planettes au Soleil, ou de la Lune à la Terre, elle suit à très peu près ce rapport, & qu'elle s'en écarte extrêmement dans les plus petites. Il pourroit se faire que dans ces distances moyennes qui nous séparent des autres parties de la Terre, nous qui sommes placés à sa surface, elle s'en écartât assez pour que le total des forces égalât l'action d'un noyau sphérique homogêne à égales distances du centre, joint à une masse placée au centre, & agissant en raison directe des distances. S'il en étoit ainsi, les choses se concilieroient d'elles-mêmes.

Effet d'une augmentation de densité de l'équateur au pôle.

327. De plus, si la densité augmentoit continuellement, & suivant une progression réguliere de l'équateur au pôle, dans une couche de terre d'une certaine épaisseur, & placée auprès de la surface, elle pourroit augmenter considérablement l'inégalité du pendule, sans changer sensiblement celle des dégrés. Car, comme nous l'avons vu (n. 233), une masse équivalente à une sphere de huit mille de rayon, augmenteroit d'une ligne la longueur du pendule, & une couche continue l'augmenteroit beaucoup plus; mais si cette couche augmente dans une certaine proportion de l'équateur au pôle, à peine causera-t-elle quelque déviation dans le pendule, puisque cette déviation dépend de la seule différence qui se trouve entre la densité de la partie méridionale de la couche, & celle de sa partie septentrionale. Or elle changera encore

incomparablement moins la mesure des dégrés, puisque ce changement n'est occasionné que par la différence qui se trouve entre les déviations du pendule, d'une extrémité de l'arc à l'autre, lesquelles sont déja par elles-mêmes si petites.

328. Or ces deux causes, à savoir dans la gravité le changement de la raison inverse des quarrés des distances, & dans la densité une augmentation proche la superficie de la Terre, suivant une progression réguliere & simple, ou irréguliere, mais compliquée à proportion, ces causes, dis-je, pourront servir à expliquer les phénomenes qu'on pourra découvrir dans la suite par un plus grand nombre d'observations, tant sur les pendules isochrones que sur les dégrés, supposé que les uns & les autres soient tels que leurs différences soient dans la raison des quarrés des sinus de la latitude, mais ne donnent pas les mêmes valeurs pour l'ellipticité de la Terre, ou qu'elles ne soient pas même dans la raison des quarrés de ces sinus.

Deux causes qui serviront à expliquer les phénomenes.

329. Reprenons en peu de mots. Je suis convaincu que suivant les observations faites jusqu'ici, il est très probable que la Terre est applatie vers les pôles; qu'à la distance où nous sommes du centre de la Terre, il est très certain que la courbure de la surface, perpendiculaire à la direction des graves, est irréguliere; & que pour ce qui est de la véritable figure d'une surface réguliere, à laquelle on réduiroit celle de la Terre, en ôtant toutes les inégalités des montagnes & des vallées, elle est encore très incertaine, & qu'on ne sait pas mieux jusqu'à quel point la Terre est applatie vers les pôles.

Conclusion.

330. La connoissance exacte de la vraie ellipticité de la Terre sera un jour le fruit d'un long travail & d'un grand nombre d'observations & de savantes méditations. Pour la déterminer il ne faudra pas se borner à comparer entre eux, comme nous l'avons fait, les pendules isochrones & les mesures des dégrés; il faudra comparer encore les phénomenes du flux & du reflux de la mer, de la précession des équinoxes, & des parallaxes de la Lune, qui dépendent tous de la même cause. Cependant pour ce qui est des parallaxes de la Lune, je n'en espere que très peu, vu que l'augmentation d'un mille

Ce qui a rapport à l'ellipticité de la Terre.

dans l'élévation de la surface, ne produiroit dans la parallaxe horizontale de la Lune qu'une différence d'une seconde, de sorte que l'ellipticité entiere, qui, suivant *Newton*, ne passe pas 17 milles, changeroit à peine de 8 à 10 secondes cette parallaxe dans le méridien Or quand il est question d'un phénomene tel que cette parallaxe, qui ne peut presque jamais s'observer immédiatement, mais qui se doit déterminer en grande partie par les mouvemens de la Lune, j'ai peine à croire qu'on puisse jamais l'évaluer à quelques secondes près; mais tout cela demanderoit une trop longue discussion.

Solution plus simple du problême proposé n. 280.

331. Je finis par une solution très facile du problême que j'ai représenté au n. 280 comme extrêmement difficile, & dont j'ai indiqué une solution analytique dans le même endroit; c'est celui où étant donné un dégré d'un parallele dans une latitude, & un dégré du méridien dans une autre, on demande l'espece & la grandeur de l'ellipse génératrice. S'il s'agit de le résoudre universellement pour une ellipticité quelconque, quelque grande qu'elle soit, on ne peut disconvenir que le problême ne soit très compliqué; mais s'il n'est question que d'une petite ellipticité, telle qu'il nous la faut ici, on peut en donner une solution très simple, qui ne s'est présentée à moi qu'après que le reste de l'ouvrage a été imprimé. Cette solution dépend du théorème suivant: *si l'ellipticité est petite, la différence de la moitié du parametre de l'un des axes à la moitié de l'axe conjugué, est à la différence de cette moitié de parametre à la perpendiculaire terminée au premier axe, à très peu près dans la raison doublée du rayon au co-sinus de la latitude.*

Démonstration, Pl. IV. fig. 23.

332. Ce théorème se démontre aisément par ce qui a déja été démontré (n. 278), savoir que si FI (fig. 23) est perpendiculaire à la courbe, la ligne FL parallele à CA sera égale à la moitié du parametre de l'axe E*e*, & que HA, HI, HL seront en progression géométrique. Car si sur CB prolongée on prend C*l* égal à FL moitié du parametre, CD, CB, C*l* seront en progression géométrique, & dans la même raison: Donc B*l* est à IL, comme C*l* ou FL est à LH, ou à peu près comme FI est à IH, c'est-à-dire comme le rayon est au co-sinus de la latitude HIF. De plus, si FL rencontre l'ellipse

en O, comme FI est perpendiculaire à l'arc IO, & que cet arc est très petit, l'angle IOL pourra se prendre aussi pour un angle droit; & comme à cause que LO, IF sont presque paralleles, les angles ILO, HIF peuvent être censés égaux, les triangles rectangles LOI, IHF sont semblables. Donc LI est à LO dans la raison de FI à IH, ou du rayon au co-sinus de la latitude. Ainsi la ligne Bl, ou la différence de la moitié du parametre de l'axe Ee au demi-axe conjugué CB, est à LO (qui, à cause que l'angle FIO est droit, peut être pris pour la différence de la moitié FL du parametre à la normale FI) en raison doublée de FI à IH.

333. Soit maintenant le demi-parametre FL = 1, sa différence avec CB, savoir $Bl = x$, le co-sinus de la latitude du point I, pour le rayon 1, = C, celui du point $i = c$; on aura $1 : CC :: x : LO = CCx$. Donc la normale $FI = 1 - CCx$. De là on tire premierement la valeur de IH par cette proportion, $1 : C :: FI\ (1 - CCx) : HI\ (C - C^3x)$; en second lieu, le rayon du cercle osculateur de l'ellipse en I, qui, par le n. 269, étant le quatrieme terme d'une proportion continue, dont les deux premiers sont FL & FI, différera de FL à peu près du triple de LO, & sera par conséquent $= 1 - 3CCx$. Ainsi le rayon osculateur en i sera $= 1 - 3ccx$. Donc le rayon du parallele en I sera au rayon osculateur en i, comme $C - C^3x$ à $1 - 3ccx$. Or ces rayons sont entre eux, comme le dégré du parallele en I, que nous appellerons G, est au dégré du méridien, que nous appellerons g. On aura donc $C - C^3x : 1 - 3ccx :: G : g$; d'où l'on tire $Cg - C^3gx = G - 3ccGx$, & $3ccGx - C^3gx = G - Cg$, enfin $x = \frac{G - Cg}{3ccG - C^3g}$. Or cette fraction donne le rapport de x à 1, ou de Bl à Cl, ou de BD à CB, c'est-à-dire l'ellipticité. *D'où l'on tire la solution du problême.*

334. Si les dégrés sont dans la même latitude, on a $C = c$, & la formule $x = \frac{G - cg}{cc(3G - cg)}$. On peut encore résoudre par cette méthode le problême où sont donnés deux dégrés de deux paralleles, ou deux dégrés du méridien. Dans le premier cas, si l'on suppose les dégrés en I, & $i = G$ & g, on aura *Application à trois autres cas, & à d'autres problêmes.*

$C - C^3 x : c - c^3 x :: G : g$. Donc $x = \frac{cG - Cg}{c^3 G - C^3 g}$. Dans le second on a $1 - 3CCx : 1 - 3ccx :: G : g$, & $x = \frac{G - g}{3(ccG - CCg)}$; & parceque G differe peu de g, & que $cc - CC = SS - ss$, cette formule est très peu différente de celle que nous avons trouvée (n. 289), savoir $\frac{1}{3} \times \frac{G - g}{GSS - gss}$. De là encore étant donnée l'ellipse, & par conséquent Cl, lB; si l'on suppose le rapport du dégré au rayon, ou la fraction $\frac{355}{180 \times 113} = n$, le dégré du méridien pour une latitude quelconque, dont le co-sinus est C, $= n(1 - 3CCx)$, & le dégré du parallele $= n(C - C^3 x)$; on pourra aisément construire une table des dégrés de l'une & de l'autre espece pour l'ellipsoïde. On verra de plus que la différence des dégrés du méridien à celui du pôle est $= 3CCx$, c'est-à-dire en raison du quarré CC du co-sinus de la latitude; & que le dégré du méridien sera égal à celui de l'équateur, lorsque $n(1 - 3CCx) = n(1 - x)$, ou lorsque $3CC = 1$); c'est-à-dire lorsque le quarré du co-sinus de la latitude sera égal au tiers du quarré du rayon; ce qui arrive dans la latitude de 54° 44'.

Solution du second problème.

335. Or étant donnée l'espece de l'ellipse, & le rayon osculateur dans une latitude donnée, on trouve la grandeur de l'ellipse de la même maniere qu'au n. 284. Si donc on substitue à la place de G la valeur du dégré du parallele de France, qu'on a trouvé, ainsi que nous l'avons dit (n. 299) de 41618 toises, dans une latitude de 43° 32', & à la place de g celle des dégrés du méridien, qu'on trouve au n. 301; la formule du n. 333 donnera pour l'ellipticité les fractions suivantes: $\frac{1}{217}$, $\frac{1}{244}$, $\frac{1}{146}$, $\frac{1}{129}$, $\frac{1}{154}$; & prenant un milieu, on aura pour l'ellipticité moyenne $\frac{1}{167}$. Il feroit seulement à souhaiter qu'on eût le moyen de mesurer avec plus de précision le dégré d'un parallele, pour diminuer l'incertitude de ces derniers résultats.

F I N.

NOTE

POUR la fin du N°. 303, Liv. V.

ON doit tirer une certaine ellipticité moyenne de tous les dégrés connus par les observations, comparés entre eux, en ayant égard au rapport que doivent avoir leurs différences, & aux regles de la probabilité touchant la correction qu'il convient de leur faire pour les réduire à ce rapport. Le P. *Boscovich* l'a fait dans un autre ouvrage au moyen d'une méthode très curieuse, & qui peut servir en plusieurs autres cas. Il en a exposé le résultat dans un extrait inséré dans les actes de l'Institut de *Boulogne*. Il la développe dans ses Supplémens de la Philosophie en vers latins, composée depuis peu par M. Benoit *Stay*, *tome 1*, *page* 420. Nous insérerons ici cet article en entier. Le P. *Boscovich* y emploie les nombres pris de la table qui est à la fin de la page 407 de ces Supplémens : c'est la même que celle qu'il a mise dans ce Livre V, n°. 301, & à laquelle nous en avons substitué une plus ample dans la note sur ce même numéro. Nous appliquerons ensuite sa méthode à cette nouvelle table. Voici l'endroit en question.

» 385. Mais pour prendre ce milieu, tel qu'il ne soit point simplement » un milieu arithmétique, mais qu'il soit plié par une certaine loi aux » regles des combinaisons fortuites & du calcul des probabilités ; nous » nous servirons ici d'un problême que j'ai indiqué vers la fin d'une Dis- » sertation insérée dans les actes de l'Institut de *Boulogne*, *tome* 4, & où » je me suis contenté de donner le résultat de sa solution. Voici le pro- » blême : *étant donné un certain nombre de dégrés, trouver la correction* » *qu'il faut faire à chacun d'eux, en observant ces trois conditions : la* » *premiere, que leurs différences soient proportionnelles aux différences des* » *sinus verses d'une latitude double : la seconde, que la somme des corrections* » *positives soit égale à la somme des négatives : la troisieme, que la somme* » *de toutes les corrections, tant positives que négatives, soit la moindre* » *possible, pour le cas où les deux premieres conditions soient remplies.* La » premiere condition est requise par la loi de l'équilibre, qui demande » une figure elliptique : la seconde, par un même dégré de probabilité, » pour les déviations du pendule & les erreurs des Observateurs, dans » l'augmentation & la diminution des dégrés : la troisieme est nécessaire » pour se rapprocher autant qu'il se pourra des observations ; vu surtout » qu'il est très probable que les déviations sont fort petites, comme nous » l'avons vu plus haut ; & que l'exactitude scrupuleuse des Observateurs » ne permet pas de soupçonner des erreurs tant soit peu considérables » dans leurs observations.

» 386. Ce problême a rapport à la méthode *de maximis & minimis* ; » mais on ne peut le résoudre par la méthode ordinaire de l'analyse.

» Car l'expression algébrique ne distingue point les quantités positives des » négatives, mais elle les désigne par une même valeur générale. On aura » aisément la valeur des corrections qu'il faut faire pour remplir la pre- » miere condition, en nommant deux quantités quelconques, l'une x, » l'autre y, au moyen desquelles, & de la valeur des dégrés & des sinus » verses, on trouvera un autre dégré quelconque corrigé, dont la diffé- » rence au dégré donné, donnera en x & y, & autres valeurs connues, » la valeur analytique de la correction, & l'équation sera toujours du » premier dégré. Pour remplir la seconde condition, il faut égaler la » somme de toutes les valeurs à zéro: c'est la seule position qui puisse » rendre la somme des positives égale à celles des négatives. On tirera » de cette équation en x la valeur de y; & la substitution donnera en x » la somme de toutes les corrections. Mais cette somme même, exprimée » par l'analyse, sera un mélange de quantités positives & négatives, & » ne sera point variable; ce qui seroit nécessaire pour pouvoir être portée » à un *maximum*; mais elle sera toujours $= 0$. Ainsi supposant $dx = 0$, » on n'aura rien: toute la formule s'évanouira avec l'espérance du calcu- » lateur. Mais au moyen de la simple Géométrie, secondée par la mé- » chanique, on en vient aisément à bout, comme on va le voir.

Pl. I. fig. 7. » 387. Soit (fig. 7. pl. I.) AF le diametre d'un cercle, & AE, AD, » AC, AB les sinus verses des latitudes doubles, relatives aux dégrés » observés: menez, des points E, D, C, B, comme si chaque dégré avoit » été observé sous l'équateur, comme aussi du point A, qui est en effet » le lieu du dégré sous l'équateur, les droites indéfinies EE′, DD′, &c. » perpendiculaires à AF, & dont les segmens Ee, Dd, Cc, Bb, Aa, » pris du même côté, représentent les dégrés, afin qu'on puisse remar- » quer leurs extrémités e, d, c, b, a.

» 388. On voit d'abord que si l'on tire une droite quelconque, comme » A′H, qui rencontre ces droites en M, L, K, I, A′, elle déterminera » des dégrés où la premiere condition sera remplie. Car ayant mené A′F′ » parallele à AF, & qui rencontre ces droites en E′, D′, C′, B′, les diffé- » rences par excès des dégrés sur celui de l'équateur, savoir E′M, D′L, » C′K, B′I, zéro, seront proportionnelles aux droites A′E′, A′D′, A′C′, » A′B′, zéro, c'est-à-dire aux sinus verses AE, AD, AC, AB, zéro. » Mais le problême est encore indéterminé par deux endroits, puisque » cette droite peut être tirée à une distance quelconque, & qu'on peut » lui donner telle inclinaison qu'on voudra. Deux dégrés pourront déja » en quelque sorte la déterminer; après quoi elle déterminera elle-même, » par son intersection avec une des droites paralleles, qui a rapport à une » latitude quelconque donnée, le dégré qui lui répond, suivant la mé- » thode proposée ci-dessus (n°. 292 de ce Livre V); & cette détermina- » tion donnera en x & y les valeurs indiquées n°. 386.

» 389. La seconde condition déterminera un point de cette droite. Les » corrections seront eM, dL, cK, bI, aA′, positives ou négatives,

» selon

» par rapport à AF. Il faudra donc, eu égard à la seconde condition, » que la somme des corrections qui sont en-deçà, soit égale à la somme » de celles qui sont au-delà; & c'est ce qu'on aura, si la droite passe par » le centre commun G de gravité des points *e*, *d*, *c*, *b*, *a*, puisque » par une propriété fort connue du centre de gravité, la somme des » distances de tous les points placés d'un côté, selon une direction quelconque, est égale à la somme de toutes celles qui sont au côté opposé. » Or ces points étant donnés, on a aussi leur centre commun de gravité G. » On a donc un point de la droite cherchée, déterminé par la seconde » condition. Cette détermination équivaut à cette valeur de *y*, qu'on » doit trouver, suivant le nº. 386, par l'équation qui suppose la somme » de toutes les corrections = o.

» 390. Le problème reste encore indéterminé, puisqu'on peut mener » par ce point une infinité de droites qui satisferont toutes aux deux conditions précédentes. La ligne ne détermine donc encore qu'un dégré; » c'est celui qui sera représenté par GS perpendiculaire à AF, & qui répondra à une latitude dont le sinus verse sera exprimé par AS. Tout » autre dégré pris à volonté détermineroit cette droite, & par-là même » les autres dégrés. Mais elle doit être déterminée par la troisieme condition, ensorte que la somme de toutes les corrections (car de part & » d'autre elles sont toujours égales) soit la moindre possible. Pour cela » imaginons une droite A'GH, qui parte de la position SGT, en tournant à droite ou à gauche autour du point G. D'abord, & tant que » l'angle qu'elle formera avec elle sera fort petit, toutes les corrections » *a*A, *b*I, *c*K, *d*L, *e*M seront énormes; ensuite elles iront toujours » en diminuant, jusqu'à ce que la droite atteigne quelqu'un des points » *a*, *b*, *c*, *d*, *e*: mais dès qu'elle l'aura passé, la correction qui répond à » ce point changera directement de position, & commencera à croître, & » elle ira toujours en croissant, tandis que celles qui ont rapport aux » points non encore atteints par la droite mobile, continueront de décroître. Or la somme de toutes les corrections diminuera jusqu'à ce que » la somme des différences relatives aux corrections croissantes, soit plus » grande que celle des différences des décroissantes; & elle sera la moindre » possible, dès que celle-là cessera d'être moindre que celle-ci. Mais aussitôt que la somme de toutes les corrections sera la moindre possible, la » somme des seules corrections positives sera aussi la moindre possible, de » même que la somme des seules négatives, puisque ces sommes doivent » être chacune la moitié de la somme totale, à cause qu'elles sont toujours » égales entre elles.

» 391. Or les différences ou changemens de chaque correction, répondant aux divers changemens de position de la droite mobile, seront » proportionnels aux distances AS, BS, CS, DS, ES, soit qu'ils soient » des accroissemens ou des diminutions. Car ces différences ou changemens

Ttt

» seront des bases de triangles semblables, & dont le sommet sera en G,
» & ces bases seront comprises entre deux positions des droites GA',
» GI, GK, GL, GM; par conséquent elles seront en raison de ces
» droites; c'est-à-dire, par la propriété des paralleles, en raison de AS,
» BS, CS, DS, ES. C'est pourquoi si l'on observe en quel ordre la
» droite mobile doit atteindre les points *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, & qu'on
» ajoute ensemble dans le même ordre celles des droites AS, BS, CS,
» DS, ES qui répondent à ces points; tandis que cette somme sera
» moindre que la moitié de la somme de toutes ces droites prises ensemble,
» ou moindre que la somme de celles qui sont de part ou d'autre du point
» S (car les deux sommes prises l'une à droite, l'autre à gauche de ce
» point, sont égales entre elles); la somme des différences relatives aux
» corrections croissantes, sera encore moindre que celle des décroissantes;
» la somme de toutes les corrections ira encore en diminuant, & cette
» somme sera la moindre possible, quand la somme de celles des droites
» AS, BS, CS, DS, ES qui ont rapport aux points déja rencontrés
» par la droite mobile, cessera d'être moindre que la moitié de la somme
» de toutes ces droites, ou que la somme de celles qui sont de part ou
» d'autre du point S.

» 392. Or on trouvera aisément le centre de gravité G, & l'ordre
» dans lequel la ligne mobile rencontre chaque point, & cela par un
» calcul numérique qui n'est rien moins que pénible. Ce calcul consiste à
» ajouter ensemble les sinus verses AE, AD, AC, AB, zéro, & de
» diviser le total par le nombre des points pour avoir AS, puisque la
» distance du centre de gravité à un plan quelconque A*a*, est égal à la
» somme de la distance de tous les points, divisée par leur nombre. De
» même si l'on divise la somme de tous les dégrés E*e*, D*d*, &c. par leur
» nombre, on aura SG. Il suffira même de prendre les différences par
» excès des dégrés sur le premier, d'en faire une somme qu'on divisera de
» même par leur nombre, & d'ajouter le quotient au premier dégré. Car
» si *af* est parallele à AF, & qu'elle coupe les droites EE', DD', CC',
» SG, BB', AA' en R, Q, P, N, O; NG sera la somme des excès R*e*,
» Q*d*, &c. divisée par le nombre des points.

» 393. Maintenant pour trouver l'ordre dans lequel les points sont
» rencontrés par la droite mobile, on ménera par le point G une droite
» parallele à AF, qui rencontrera les droites FF', EE', DD', CC', BB',
» AA' en Y, *r*, *q*, *p*, *o*, X; & l'on verra d'abord dans lequel des angles
» SGY, YGT, TGX, XGS se trouve chaque point. Car un point quel-
» conque doit être à gauche ou à droite de SGT, suivant que son sinus
» verse est moindre ou plus grand que AS; & au dessous ou au dessus de
» XGY, selon que son dégré sera plus petit ou plus grand que SG. On
» n'aura pas de peine non plus à trouver la tangente de l'angle formé par
» GS ou GT avec la droite mobile passant par un point quelconque.
» Qu'elle passe par exemple par le point *e*, on aura cette analogie:

» laquelle sera par conséquent en raison de $\frac{Gr}{re}$: il en est ainsi des autres.

» Les tangentes des petits angles sont les plus petites; & les points qui » répondent à de petits angles sont plutôt rencontrés par la droite mobile » dans les angles SGX, YGT; tout au contraire de ce qui arrive dans » les angles TGX, YGS. Donc puisque G*r* est la différence du sinus » verse du point *e* au sinus verse AS, & que *re* est la différence du dé- » gré E*e* au dégré SG; on aura la regle suivante: *divisez pour chaque » point la différence de son sinus verse au sinus verse AS par la différence du » dégré qui y répond, au dégré SG; & que les quotients des points qui se » trouvent dans deux angles opposés au sommet, considérés ensemble, soient » rangés par ordre, en commençant par les plus petits; qu'ensuite on range » aussi les quotients des autres points, placés dans les deux autres angles; » en commençant par les plus grands. C'est dans cet ordre que la droite mo- » bile atteindra tous ces points, si elle commence à se mouvoir dans les deux » premiers angles; & ce seroit le contraire si elle commençoit à se mouvoir » dans les deux derniers.* Mais sans qu'il soit besoin de recourir au calcul, » la construction seule, pourvu qu'elle soit exacte, suffira d'ordinaire » pour connoître avec beaucoup plus de facilité l'ordre dans lequel les » points sont rencontrés par la droite mobile.

» 394. Par ce moyen on a tout ce qui est requis pour les corrections » cherchées, & pour avoir, même sans leur secours, l'ellipticité. Car le » dégré sur lequel repose la droite mobile reste sans correction, comme » on voit; par conséquent au moyen de ce dégré & du dégré SG, on » aura par le n°. 348 (& par le n°. 301 de ce Livre V), tous les autres » dégrés, & par là même leur différence aux dégrés observés, c'est-à-dire » la correction, & la différence totale qui donnera l'ellipticité qu'on cher- » che.

» 395. Or on voit que la méthode est générale pour la correction de » tous les termes qui doivent suivre une raison donnée; car en substituant » cette raison à celle des sinus verses, tout revient au même. Mais il faut » appliquer ici la méthode aux dégrés. Nous nous servirons des valeurs » de la premiere table, n°. 355 (& n. 301 de ce Livre), & pour faciliter » davantage le calcul, nous prendrons la moitié des sinus verses pour les » sinus verses entiers. Les valeurs AB, AC, AD, AE sont ici les » mêmes que dans la troisieme colonne de cette table, & en divisant leur » somme par 5, on a AS ou *a*N $=$ 4356.6. O*b*, P*c*, Q*d*, R*e* sont les » mêmes valeurs que celles de la cinquieme colonne, dont la somme di- » visée par 5 donne NG $=$ 301.6, d'où l'on tire le dégré SG $=$ 56751 » $+$ 301.6 $=$ 57052.6, pour une latitude telle, que la moitié du sinus » verse d'une latitude double soit 4356.6 pour le rayon 10000, c'est-à- » dire pour la latitude de 41° 15': mais nous ne ferons ici aucun usage » de ce calcul. Les distances *a*N, ON, PN, QN, RN des points

» 4356.6 = *a*N, aux nombres de la troisieme colonne ; & par consé-
» quent 4356.6, 1369.6, — 291.4, — 1405.4, — 4029.4, la somme tant des positives que des négatives, étant 5726.2 : & les distances *a*X, *bo*, *cp*, *dq*, *er* à la droite XY seront les différences du second 301.6 = NG aux nombres de la cinquieme colonne ; & par conséquent 301.6, 15.6, 73.6, — 21.4, — 369.4. Les distances qui ont des signes semblables, se rapportent aux angles SGX, TGY ; & celles qui ont des signes différens appartiennent aux autres angles TGX, SGY. Ainsi les premieres sont celles des points *a*, *b*, *d*, *e* ; le point *c* est le seul de la seconde espece. Or si l'on divise les termes de la premiere suite par ceux de la seconde, on aura, pour les tangentes des angles avec la droite SGT, 14, 88, 4, 66, 11. Ainsi les quatre points qui se trouvent dans les premiers angles, savoir *a*, *b*, *d*, *e*, suivent en commençant par les moindres angles l'ordre des nombres 11, 14, 66, 88, c'est-à-dire *e*, *a*, *d*, *b* ; auxquels ajoutant le point *c*, la droite rencontrera les points dans cet ordre *e*, *a*, *d*, *b*, *c*. La premiere distance du premier point *e*, savoir 4029.4 est moindre que la somme 5726.2 des deux positives, ou des trois négatives ; mais si on lui ajoute la distance du point suivant, *a* = 4356.6, on aura 8386, qui surpasse déja cette somme. Ainsi on aura le *minimum* qu'on cherche, lorsque la droite atteindra le point *a*, & la position de cette droite *a*GV corrigera tous les dégrés, à l'exception du seul dégré A*a* de l'équateur, qui restera sans correction.

» 396. Si la droite se meut dans un sens contraire, elle rencontrera les points dans un ordre contraire *c*, *b*, *d*, *a*, *e*, & l'on voit que pour avoir une somme qui surpasse 5726.2, il faudra ajouter ensemble les premieres distances des quatre premiers points, à savoir 291.4, 1369.6, 1405.4, 4356.6 ; ensorte que ce mouvement contraire donnera encore le *minimum* à la rencontre du même point *a*.

» 397. Ayant trouvé la position requise pour le *minimum* cherché, on aura d'abord l'ellipticité. Car la position de la droite sera ici *a*GV, le dégré de l'équateur restant le même, ce qui se rencontre heureusement pour trouver tout d'un coup la différence totale & l ellipticité. Car on aura cette analogie : *a*N = 4356.6 est à NG = 301.6, comme *af* = 10000 à la différence totale *f*V = 692 : on divisera le dégré 56751 par le tiers de cette différence, & on ajoutera 2 au quotient, suivant le n°. 350 (on en donnera plus bas la démonstration), pour avoir l'ellipticité $\frac{1}{248}$. Le calcul donne pour les cinq dégrés *a*, *b*, *c*, *d*, *e* les corrections suivantes : 0, — 79.2, + 9.8, + 75.9, — 90 5.

Appliquons cette méthode aux nombres de la grande table proposée dans la précédente note sur le n°. 301, en retenant A*a* pour le dégré de l'équateur, B*b* pour un dégré quelconque antérieur à SG, D*d* pour un dégré quelconque postérieur. On trouvera les valeurs suivantes. Divisez

& cinquieme colonne, vous aurez AS = aN = 4581.2, NG = 287.6 : de là le dégré SG = SN + NG = Aa + NG = 57037.6 ; & puisque la moitié du sinus verse d'une latitude double est AS = 4581.2, la latitude de ce dégré sera de 42° 36'.

Si l'on compare le nombre 4581.2 = AS, avec tous les nombres de la quatrieme colonne qui représentent les droites AB, AD, en le soustrayant de ces nombres, on aura la premiere suite de toutes les SB négatives, & de toutes les SD positives. De même si l'on compare le nombre 287.6 = NG avec tous les nombres de la cinquieme colonne qui représentent les droites Ob, Qd, on aura la seconde suite de toutes les ob négatives, & de toutes les qd positives. Nous nommerons la premiere suite A, & la seconde B. Si l'on divise chaque terme de la suite A par celui qui lui répond dans la suite B, on aura une nouvelle suite C, qui représentera les tangentes des angles formés par les droites Gb, Gd, avec GS, GT ; & les angles qui répondent à ces tangentes, seront aigus ou obtus, selon que la valeur de la tangente sera positive ou négative. Du reste il n'est point nécessaire de déterminer exactement ces valeurs ; & à moins que les dégrés ne fussent trop voisins, un à-peu-près suffit, puisqu'il n'est question que de leur grandeur relative pour connoître l'ordre où elles doivent être placées.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	−4581.2	−1566.2	−386.2	69.8	372.8	418.8	883.8	1180.8	3807.8
B	−287.6	−0.6	−149.6	−58.6	31.4	−9.6	53.4	36.4	384.4
C	15.9	2610.	3.9	−1.	12.	−4.6	16.6	32.	10.

Les nombres C font connoître l'ordre dans lequel la droite mobile écartée de la position SGT, & passant par les positions A'GH, après une demi révolution autour du point G, arrive aux extrémités b, d des dégrés. On doit commencer par les quantités positives, dès les plus petites jusqu'aux plus grandes ; & continuer ensuite par les négatives, dès les plus grandes jusqu'aux plus petites ; & l'on trouvera l'ordre dans lequel les points sont rencontrés par la droite mobile, exprimé par les nombres suivans : 3, 9, 5, 1, 7, 8, 2, 6, 4.

On prendra dans cet ordre la somme des nombres A, sans avoir égard aux signes, jusqu'à ce qu'on parvienne à un nombre égal, ou plus grand que la moitié de la somme de tous ces nombres, laquelle moitié est égale & à la somme des positives, & à celle des négatives prises séparément, puisque par la nature du centre de gravité elles doivent être égales. Or la premiere est 6733.8, & la seconde 6733.6 : elles ne different pas notablement de la moitié de la somme, savoir 6733.7 ; & cette différence insensible vient de ce qu'on a négligé quelques petites fractions. Si l'on

à cette moitié ; mais si on leur ajoute le nombre qui répond à 1, on aura 9348.0 qui la surpasse : par conséquent la somme de toutes les corrections sera la moindre possible, lorsque la droite mobile atteindra l'extrémité du premier dégré, qui par-là même restera sans correction.

Par ce moyen on a déja deux dégrés qui doivent passer pour exacts, savoir 56750 valeur observée pour la latitude = 0, & 57037.6 pour la latitude de 42° 36′. De ces dégrés on peut déja déduire par la formule du n°. 289, Liv. V, l'ellipticité ; mais comme on a ici le premier dégré Aa, on la trouvera encore, & avec plus de facilité, par cette analogie : AN = 4581.2 : NG = 287.6 :: af = 10000 : fV = 627.8. Ce quatrieme terme sera la différence des dégrés au pôle & à l'équateur ; & si on divise celui-ci par le tiers de cette différence, & qu'on ajoute 2 au quotient, on aura 273 pour le dénominateur de l'ellipticité cherchée, qui se trouve $\frac{1}{273}$ suivant le théorème démontré par notre Auteur dans ces mêmes Supplémens, n°. 350, que nous venons de citer dans le passage tiré de ces Supplémens.

Cette ellipticité est encore au-dessous de $\frac{1}{248}$ qui est celle qu'avoient d'abord donnée les cinq dégrés : mais elle approche davantage de $\frac{1}{335}$, ellipticité requise dans l'hypothese d'un noyau sphérique par la fraction $\frac{1}{178}$ (Liv. V. n. 251).

Pour corriger tous les dégrés, il suffira de chercher la différence par excès de chaque dégré au dégré sous l'équateur, requise par cette détermination ; & de comparer chacune de ces différences avec celles de la cinquieme colonne, dans la note sur le n°. 301. Puisque af = 10000 doit être à chaque ligne comme aO, exprimée par les nombres de la quatrieme colonne ; comme fV = 627.8 à Oi, dont la différence à Ob, exprimée par les nombres de la cinquieme colonne, donne la correction cherchée ; il suffira de multiplier les nombres de la quatrieme colonne par 627.8, & de diviser le produit par 10000 ; enfin de retrancher du quotient les nombres de la cinquieme colonne : par ce moyen on aura les corrections suivantes 0, — 97.7, + 112.8, + 63.0, — 8.0, + 35.9, + 2.1, + 37.7, — 145.3. La somme des positives est 251.5 ; celle des négatives 251.0, ce qui fait à peu près des sommes égales ; & la moitié de la somme totale est environ 251.2. Or la somme de ces corrections, dans l'hypothese qu'on observe les deux premieres conditions, est un *minimum* ; ce qui est évident par cette méthode même dont on s'est servi pour les trouver : & l'on pourra encore s'en convaincre, en essayant de faire telle autre substitution qu'on voudra ; car elle donnera toujours une somme plus forte : c'est ce qu'on fera aisément, en faisant une correction arbitraire au premier dégré, & en déterminant par ce dégré ainsi corrigé, & par celui qu'on trouvera pour la latitude de 42° 36′, tous les autres dégrés, au moyen des nombres de la quatrieme colonne, puisque les différences par excès de chaque dégré sur le premier, doivent être dans le rapport de ces nombres.

percevoir que le dégré de M. l'Abbé *de la Caille* trouble beaucoup l'ordre des dégrés, puisqu'il surpasse les deux suivans qui sont dans une plus grande latitude. Mais d'autre part, ce dégré est dans l'hémisphere austral, au lieu que les autres dégrés sont dans notre hémisphere : ce qui donne lieu de soupçonner que les deux hémispheres ne se ressemblent pas pour la figure. Ainsi il sera à propos de n'avoir égard dans le calcul qu'aux 8 autres dégrés de cette table.

Par ce moyen on trouvera les sommes des nombres de la quatrieme & de la cinquieme colonne, qui, divisées par 8, donneront $aN = 4777.0$, $NG = 287.6$; d'où l'on tire pour la latitude de 43° 43′ le dégré de $56750 + 287.6 = 57037.6$. Ensuite on aura par la méthode proposée les nombres A, B, C, & la nouvelle suite C fera connoître l'ordre dans lequel la droite mobile atteint les extrémités de ces 8 dégrés, savoir 5, 2, 4, 9, 7, 1, 8, 6 : & si on prend dans ce même ordre les valeurs de la nouvelle suite A, on ne parvient à la moitié de la somme totale qu'après l'addition du sixieme terme, lequel répond au premier dégré, c'est-à-dire au dégré sous l'équateur, qui doit rester également ici sans correction. De là on a pour la différence des dégrés sous l'équateur & le pôle 602.1, & pour l'ellipticité $\frac{1}{285}$, qui approche encore davantage de la fraction $\frac{1}{335}$ requise par celle de la gravité dans l'hypothese d'un noyau sphérique. Or pour les corrections à faire à ces 8 dégrés, on trouvera 0, + 102.5, + 51.0, — 20.7, + 23.0, — 12.0, + 22.9, — 166.9. La somme des positives est 199.4; celle des négatives, 199.6 : elles sont à peu près égales. La moitié de la somme totale est 199.5, beaucoup moindre que la précédente, savoir 251.4, parcequ'on n'y tient pas compte de la correction du dégré de M. l'Abbé *de la Caille*; & que les autres corrections different très peu des précédentes : l'avant derniere est augmentée de 20 toises; les autres ne changent que de 10 à 13 toises.

De ces huit dégrés le second & le sixieme ont des corrections beaucoup plus fortes que les autres. Si on omet encore ces deux dégrés, & que par la même méthode on prenne un milieu pour les 6 dégrés restans, on aura toujours le premier dégré sans correction; le dégré 56998.5 pour la latitude de 41° 0′; la différence totale des dégrés sous l'équateur & le pôle 577.2; l'ellipticité $\frac{1}{297}$, qui approche encore plus de la fraction $\frac{1}{335}$ requise par celle de la gravité; enfin pour les corrections on aura 0, + 40.6, — 23.1, + 10.6, — 25.6, — 9.6, corrections moindres que les premieres.

Les quantités qu'on a trouvées serviront à faire connoître les valeurs absolues de l'axe & du diametre de l'équateur; car dans l'ellipse les demi-axes sont moyens proportionnels géométriques entre les rayons de courbure pris alternativement à leurs extrémités; & par conséquent les dégrés des premiers entre ceux des seconds : & lorsque les termes different peu entre eux, on peut substituer la progression arithmétique à la géomé-

différence au dégré sous le pole, ou $\frac{1}{3} \times 577.2 = 192.4$, on aura pour le dégré du demi-axe 56942.4, & si on ajoute encore un autre tiers, on aura pour celui du demi-diametre de l'équateur 57134.6. C'est pour cela qu'après avoir divisé le dégré du méridien sous l'équateur par le tiers de cette différence, on ajoute 2 au quotient pour avoir le dénominateur de l'ellipticité, ou de la différence des demi-axes de l'ellipse divisée par le grand axe. Or ayant les dégrés, on connoîtra aisément les rayons des cercles qui leur répondent : on trouvera le demi-axe $= 3262560$; le demi-diametre de l'équateur $= 3273572$; leur différence $= 11012$, différence très petite.

On se servira de la valeur qu'on vient de trouver du dégré de l'équateur, pour réformer celle qui exprime le rapport de la force centrifuge à la gravité primitive sous l'équateur (n. 71. Liv. V.), savoir $\frac{753}{216741}$, à laquelle on a substitué la fraction $\frac{1}{288}$ qui en approche beaucoup. Mais ces nombres ont été tirés du dégré de l'équateur que M. *Bouguer* avoit déduit de sa théorie, savoir 57264 (n. 69) ; & dès-là que ce dégré est plus petit, on doit diminuer la force centrifuge en raison doublée de ce dégré. Ainsi ce rapport corrigé sera $= \frac{753}{216741} \times \left(\frac{57134}{57264}\right)^2 = \frac{1}{289}$ à très peu près.

Toutes les combinaisons ci-dessus donnent une ellipticité moindre que celle qui est requise par l'homogénéité du fluide au noyau ; d'où il suit que le noyau, supposé qu'il soit sphérique, doit être plus dense que le fluide. Le rapport de leur densité peut se tirer de la formule du n°. 199, Liv. V, dans laquelle $x = \frac{nr}{2m\left(1 - \frac{3t}{5p}\right)}$; d'où il suit que $\frac{t}{p} = \frac{5}{3}\left(1 - \frac{nr}{2mx}\right)$. Or $\frac{t}{p}$ est, là-même, le rapport cherché de la densité du fluide à celle du noyau ; & $\frac{n}{m}$ le rapport de la force centrifuge à la gravité, que nous venons de trouver $= \frac{1}{289}$; $\frac{x}{r}$ le rapport de la différence du demi-diametre de l'équateur au demi-axe ; & par conséquent $\frac{r}{x}$ le dénominateur de l'ellipticité, diminué de l'unité, savoir 296. Si l'on aime mieux prendre un milieu entre ce dénominateur 297, & 335 qui est le dénominateur requis par la gravité, savoir 316, on aura $\frac{t}{p} = \frac{5}{3}\left(1 - \frac{315}{578}\right) = \frac{100}{131}$; c'est à-dire que la densité du fluide sera à celle du noyau à peu près dans la raison de 3 à 4.

Comme l'ellipticité qu'on en tire est beaucoup plus petite que celle qu'on suppose communément, il y aura plusieurs calculs à réformer ; par exemple

exemple ceux qui sont fondés sur le renflement des terres à l'équateur pour déterminer la précession des équinoxes & la nutation de l'axe ; ceux qui ont rapport aux parallaxes de la Lune, qui dépendent de l'ellipticité, & aux distances géographiques des lieux, lesquelles en dépendent aussi. Pour avoir tout cela avec encore beaucoup plus d'exactitude, il est à souhaiter qu'on nous donne beaucoup d'autres mesures de dégrés, afin d'achever de compenser & effacer totalement l'irrégularité des inégalités fortuites par le nombre des mesures.

Ceci étoit près d'être mis sous presse, lorsqu'on a reçu un extrait de la mesure d'un nouveau dégré, faite en Hongrie par le P. *Liesganig* qui a achevé au commencement de Février de cette année (1770) d'en déterminer la valeur par le calcul, & qui le fera bientôt imprimer. Cette mesure est une confirmation de l'irrégularité des dégrés : & si on l'ajoute aux autres pour prendre un milieu, l'on aura une ellipticité presque entierement conforme à celle que requiert la gravité dans l'hypothese d'un noyau sphérique. L'amplitude de l'arc, déterminée par les observations de deux étoiles fixes, s'est trouvée de 1°, 1', 34".7, avec un si grand accord, que l'un des résultats n'a été plus grand, l'autre plus petit, que de la dixieme partie d'une seconde. A l'égard des deux bases mesurées aux deux extrémités de la méridienne, l'une a été déduite de l'autre & de la chaîne des triangles par le calcul ; & la base calculée ne differe que d'une demi-toise de la mesure actuelle : d'où il s'ensuit qu'on ne doit pas craindre qu'il se soit même glissé une erreur de 10 toises dans la mesure du dégré : & cependant ce dégré s'est trouvé de 56882.0 toises de *Paris* ; & si on le réduit à la surface de la mer, on doit encore en ôter une toise. Or sa latitude moyenne est de 45°, 57', & sa longitude est de près de 4 dégrés plus grande que celle de *Gratz*. Il a été mesuré dans une plaine immense, qui n'étoit interrompue que par de petites inégalités, telles que des vagues sur une mer calme : & il s'accorde assez avec celui qui a été mesuré entre *Vienne* & *Gratz* (n. 299, note), & qui pour une latitude moyenne un peu plus grande, savoir 47° 38', s'est trouvé de 56909.6, ou de 29 toises plus grand que celui de Hongrie. Celui-ci s'accorde aussi à 7 toises près avec celui de l'Amérique septentrionale (n. 299 note), qui a été également mesuré avec une très grande exactitude dans une vaste plaine, quoiqu'il ait près de 6 dégrés de plus en latitude : les trois dégrés moyens dans la premiere table de cette note, surpassent l'un & l'autre de plus de 100 toises. Tout cela semble indiquer une irrégularité de tissure dans la Terre, même au-dessous de sa surface, & une figure d'équilibre pour ainsi dire ondoyante, comme notre Auteur s'en étoit déja autrefois douté ; ce qui prouve que deux dégrés ne peuvent suffire pour déterminer la figure de la Terre : il faut au contraire un grand nombre de dégrés mesurés en divers pays, avec cette exactitude & ces instrumens qui sont aujourd'hui en usage : & l'on doit en tirer un certain milieu par une méthode sûre, & non pas sur de simples préjugés faire aux observations des corrections arbitraires, & plus grandes.

jours.

Pour trouver ce milieu, nous substituerons dans la table précédente, au dégré unique du P. *Liesganig*, c'est-à-dire au dégré moyen de l'arc qui s'étend dans la Moravie, l'Autriche & la Stirie, trois autres dégrés, savoir celui de Hongrie, celui est qui est entre *Vienne* & *Gratz*, & celui qui est entre *Vienne* & *Sobjeschiz* : leurs latitudes moyennes sont 45° 57', 47° 38', 49° 13'; leurs valeurs en toises 56881, 56910, 57082 : de cette sorte on aura 11 dégrés. La méthode ci-dessus donnera pour l'ellipticité $\frac{1}{311}$; & si l'on omettoit le seul dégré de Lapponie qui differe trop des autres, surtout du dégré de l'Amérique septentrionale & de celui de Boheme, mesurés le premier par les Anglois, le second par le P. *Liesganig*, on auroit $\frac{1}{341}$. Ces deux fractions ne s'éloignent pas beaucoup de $\frac{1}{335}$ que requiert la gravité. Il est démontré dans cet ouvrage même, que les inégalités qui sont proche de la surface troublent beaucoup plus la mesure des dégrés, que la longueur des pendules isochrones. Ainsi puisque ces longueurs suivent presque exactement la loi de proportionalité avec les sinus verses d'une latitude double, & que ce milieu revient au même; on pourra prendre pour l'ellipticité cette même fraction $\frac{1}{335}$, & en tirer le rapport des densités au moyen de la formule $\frac{t}{p} = \frac{5}{3}\left(1 \frac{-nr}{2mx}\right) = \frac{5}{3}\left(1 \frac{-334}{578}\right)$ $= \frac{1220}{1734} = \frac{100}{142}$; ce qui fait à peu près $\frac{2}{3}$. Ainsi la densité du fluide sera à celle du noyau à peu près dans la raison de 2 à 3.



TABLE ALPHABÉTIQUE

DES MATIERES.

C

D

E

G

peuplée

N

Fin de la Table.

APPROBATION.

J'AI lu, par ordre de Monseigneur le Chancelier, un ouvrage intitulé *Voyage astronomique & géographique dans l'Etat de l'Eglise pour mesurer deux dégrés du méridien & corriger la carte géographique*, par les R. PP. *Maire* & *Boscovich* de la Compagnie de Jesus, traduit du latin avec des notes ; & il m'a paru que non seulement il n'y avoit rien qui pût en empêcher l'impression, mais qu'on devoit savoir gré au Traducteur d'avoir mis dans notre langue l'ouvrage de ces deux savans Astronomes. A Paris le 30 Août 1769. MONTUCLA.

PRIVILEGE DU ROI.

LOUIS, PAR LA GRACE DE DIEU, ROI DE FRANCE ET DE NAVARRE : A nos amés & féaux Conseillers, les Gens tenant nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand Conseil, Prevôt de Paris, Baillis, Sénéchaux, leurs Lieutenans civils, & autres, nos Justiciers qu'il appartiendra : SALUT, notre amé le sieur Jacques Lacombe Libraire, Nous a fait exposer qu'il desireroit faire imprimer & donner au public un ouvrage intitulé *Voyage astronomique & géographique pour la mesure des dégrés du méridien & la correction de la carte de l'Etat ecclésiastique, traduit du latin avec des corrections & des additions de l'Auteur.* S'il Nous plaisoit lui accorder nos Lettres de Privilege pour ce nécessaires. A CES CAUSES, voulant favorablement traiter l'Exposant, Nous lui avons permis & permettons par ces Présentes, de faire imprimer ledit ouvrage autant de fois que bon lui semblera, & de le vendre, faire vendre & débiter par-tout notre Royaume pendant le tems de six années consécutives, à compter du jour de la date des Présentes. FAISONS défenses à tous Imprimeurs, Libraires & autres personnes, de quelque qualité & condition qu'elles soient, d'en introduire d'impression étrangere dans aucun lieu de notre obéissance : comme aussi d'imprimer, ou faire imprimer, vendre, faire vendre, débiter, ni contrefaire ledit ouvrage, ni d'en faire aucun extrait sous quelque prétexte que ce puisse être, sans la permission expresse & par écrit dudit Exposant, ou de ceux qui auront droit de lui, à peine de confiscation des Exemplaires contrefaits, de trois mille livres d'amende contre chacun des contrevenans, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, & l'autre tiers audit Exposant, ou à celui qui aura droit de lui, & de tous dépens, dommages & intérêts, à la charge que ces Présentes seront enregistrées tout au long sur le registre de la Communauté des Imprimeurs & Libraires de Paris, dans trois mois de la date d'icelles ; que l'impression dudit ouvrage sera faite dans notre Royaume, & non ailleurs, en beau papier & beaux caracteres, conformément aux Réglemens de la Librairie, & notamment à celui du dix Avril mil sept cent vingt-cinq, à peine de déchéance du présent Privilege ; qu'avant de l'exposer en vente, le manuscrit qui aura servi de copie à l'impression dudit ouvrage, sera remis dans le même état où l'Approbation y aura été donnée, ès mains de notre très cher & féal Chevalier, Chancelier Garde des Sceaux de France, le sieur DE MAUPEOU ; qu'il en sera ensuite remis deux Exemplaires dans notre Bibliotheque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, & un dans celle dudit sieur DE MAUPEOU : le tout à peine de nullité des Présentes ; du contenu desquelles vous MANDONS & enjoignons de faire jouir ledit Exposant & ses ayant causes, pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchement. VOULONS que la copie des Présentes, qui sera imprimée tout au long, au commencement ou à la fin dudit ouvrage, soit tenue pour duement signifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amés &

au premier notre Huissier ou Sergent sur ce requis, de faire pour l'exécution d'icelles, tous actes requis & nécessaires, sans demander autre permission, & nonobstant clameur de haro, charte normande & lettres à ce contraires; car tel est notre plaisir. DONNÉ à Paris le mercredi quatrieme jour du mois de Septembre l'an de grace mil sept cent soixante neuf, & de notre regne le cinquante-cinquieme. PAR LE ROI EN SON CONSEIL. LEBEGUE.

Registré sur le Registre XVIII de la Chambre royale & syndicale des Libraires & Imprimeurs de Paris, N°. 775, fol. 21, conformément au Réglement de 1723. A Paris ce 10 Octobre 1769. BRIASSON Syndic.

Je cede le présent Privilege à Monsieur Tilliard, suivant les conventions faites entre nous. A Paris ce 26 Avril 1770. LACOMBE.

Registré la présente cession sur le Registre XVIII de la Chambre royale & syndicale des Libraires & Imprimeurs de Paris, N°. 219, conformément aux anciens Réglemens confirmés par celui du 28 Fevrier 1723. A Paris ce 19 Mai 1770. BRIASSON Syndic.

ERRATA.

PAGE VI, *lig.* 22 histoire, *lisez*, histoire

Lig. 28, très utiles *ajoutez* Le quatrieme apprend à mesurer un dégré.

VIII, *derniere ligne*, 14 *lisez* 114.

13, *lig.* 20, Maiman *lisez* Maimon

18, *note*, philosophiques *ajoutez* 1728

23, *note*, Dom .... Lieutenant *lisez* Don .... Lieutenans

35, *lig.* 7, l'observation *ajoutez* d'une étoile

36, *note*, *lig. pénult.* plus à raison *lisez* plus de raison

46, *lig.* 15, & ne présente *lisez* sans présenter

63, *lig.* 2, équarrées *lisez* équarries

66, *lig.* 19, ces *lisez* ses

Derniere ligne, Genarro *lisez* Gennaro

89, *lig.* 15, signe *lisez* cygne

128, *lig. pénult.* suffit *lisez* suffi

132, *lig.* 23, aux plus *lisez* au plus

173, *lig.* 5, 45' *lisez* 43'

175, *effacez la note, parcequ'on n'a pas pu avoir la carte du Duché d'Urbin.*

186, *lig.* 16, A A *lisez* A A'

249, *lig.* 19, 45° *lisez* 45°,

255, *lig.* 3, de réitérer *ajoutez* encore

257, *lig.* 33, au bout de trois mois *lisez* dans l'intervalle de trois mois

263, *lig.* 35, T *t g* *lisez* T *t* Q

269, *lig.* 1, de 1 minutes *lisez* de 10 minutes

313, *lig.* 20, à deux droits *lisez* à angles droits

375, *lig.* 1, F V *lisez* F V'

420, *lig.* 10, BK $\frac{1}{2}$ *lisez* BK $\frac{1}{2}$

436, *lig.* 2, à près *lisez* à peu pres

439, *lig.* 20, $\frac{1}{1057000}$ *lisez* $\frac{1}{1075000}$

440, *lig.* 21, $\frac{3^3}{2}cqr$ *lisez* $\frac{2}{3}cqr$

464, *lig.* 25, de pieds *lisez* de toises

469, *lig.* 26, 2520 *lisez* 3520

471, *Ce numéro 471, & ceux des neuf pages suivantes, sont répétés ; & c'est pour cela que ces endroits sont désignés par le numéro du texte.*

471, (*n°.* 258), *lig.* 19, ces points *lisez* ses points

471, (*n°.* 284), *lig.* 5, sans parler du rayon *lisez* en omettant le rayon

Ligne 8, de l'angle *lisez* d'un angle

472, (*n°.* 286), *lig.* 26, $hf = as$ *ajoutez* $HF = AS$

Ligne 29 & 31, $1 - \frac{A^2 + a^2}{A^2 S^2 - a^2 s^2}$ *lisez* $1 + \frac{-A^2 + a^2}{A^2 S^2 - a^2 s^2}$

Note, CD *lisez* CB.

478, (*n°.* 299), *note*, *lig.* 7, 3,″ *lisez* 33″.

484, *lig.* 3, $\frac{1}{155}$ *lisez* $\frac{1}{255}$

486, *lig.* 16, petit *lisez* petite

494, *lig.* 31, $\frac{1}{337}$ *lisez* $\frac{1}{315}$

497, *lig.* 3, du pendule *lisez* du fil à plomb

Item. pag. 501, *lig.* 33

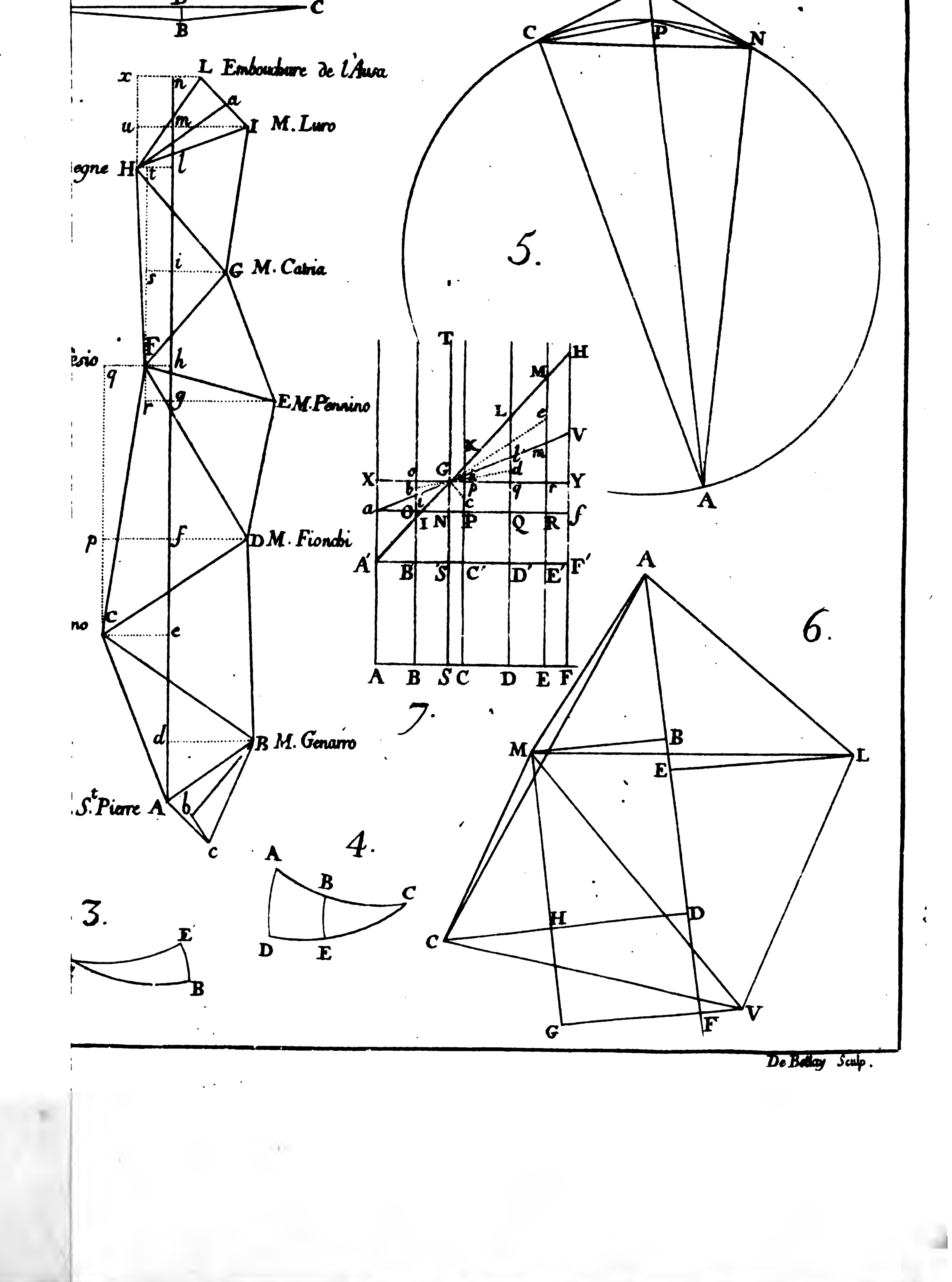
507, *lig.* 22, —386.2 *lisez* —586.2

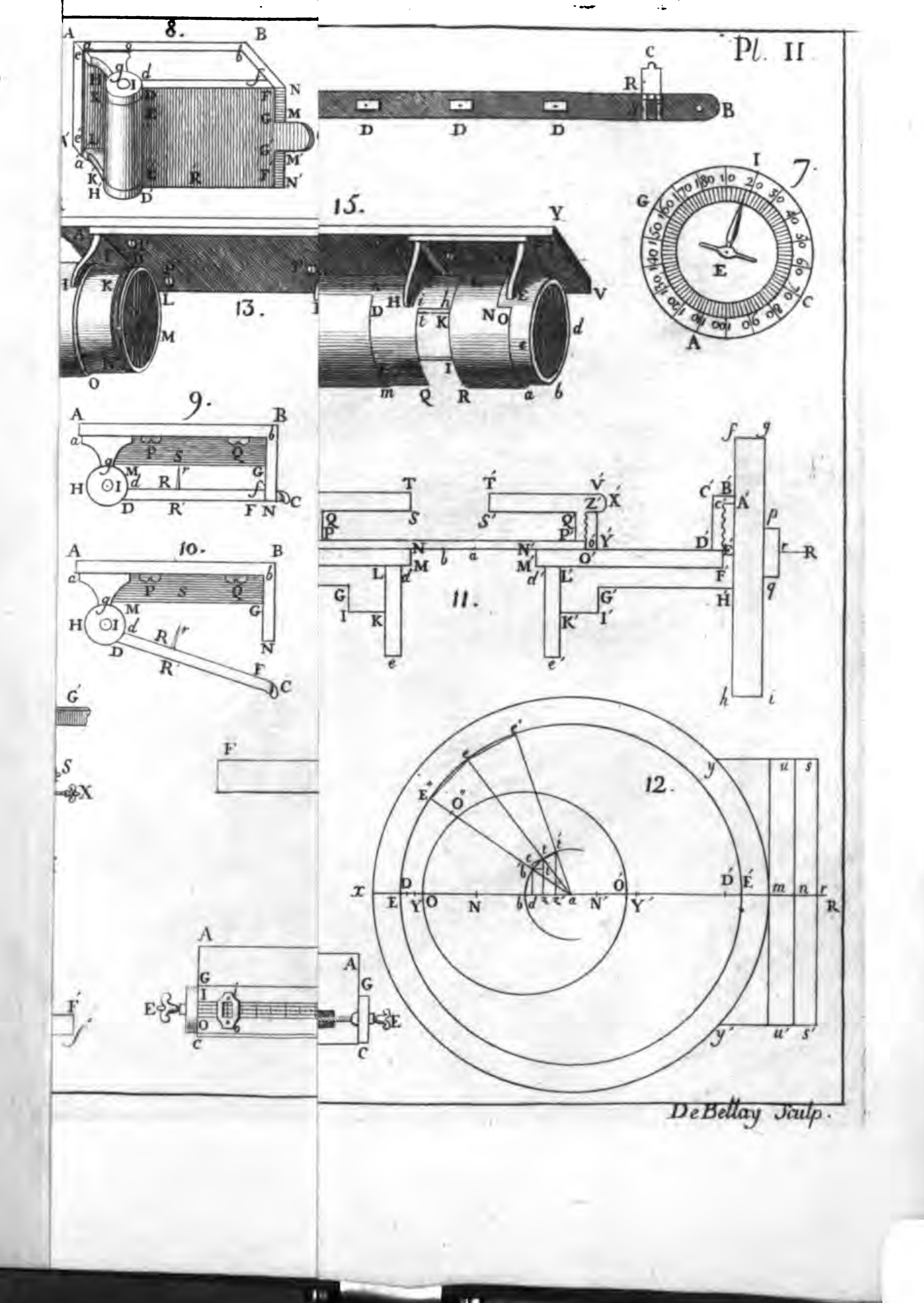
Ligne 24, —4.6 *lisez* —43.6

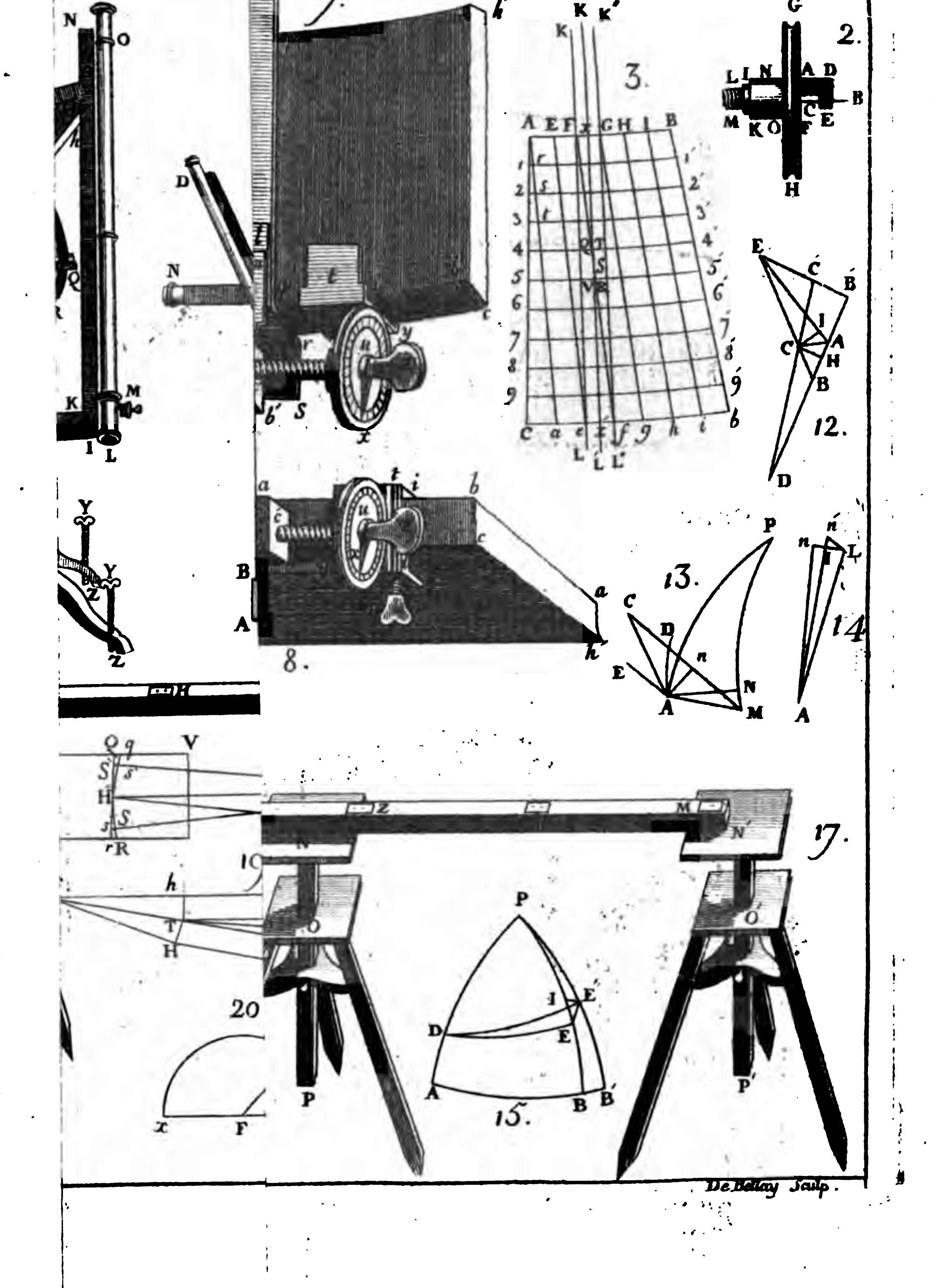
508, *lig.* 10, AN *lisez* aN

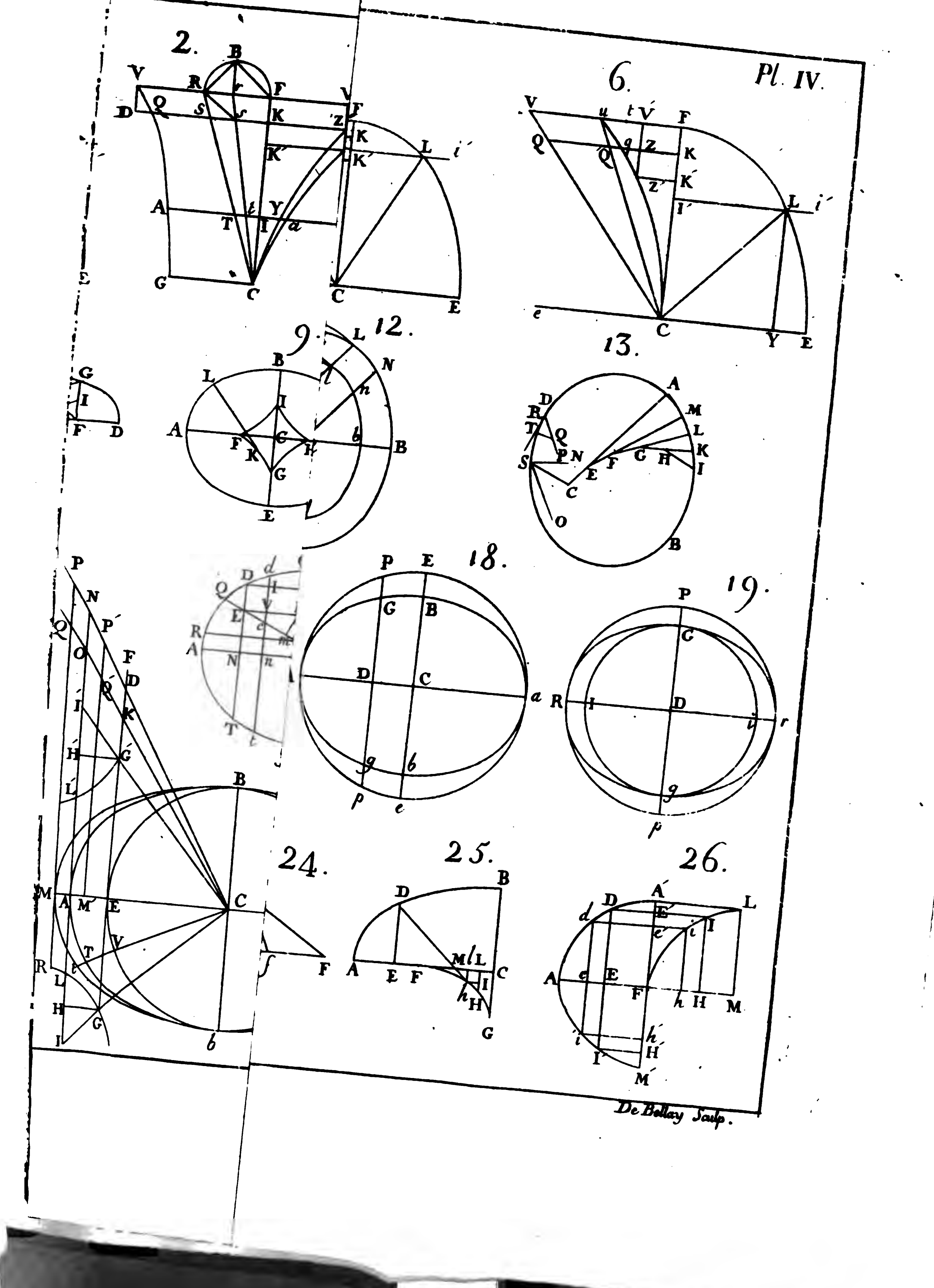
510, *lig.* 4, 57134.6 *lisez* 57134.8

F I N.


L Embouchure de l'Ausa
I M. Luro
G M. Catria
E M. Pennino
D M. Fionchi
B M. Genarro
S.t Pierre A
5.
6.
7.
4.
3.
De Bellay Sculp.


Pl. II
8.
15.
13.
7.
9.
10.
11.
12.
De Bellay Sculp.


De Bellay Sculp.


Pl. IV.
2.
6.
9.
12.
13.
18.
19.
24.
25.
26.
De Bellay Sculp.

